ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 234 (2024). С. 35–42
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-234-35-42

УДК 517.957

ЗАДАЧА КОШИ ЧАСТНОГО СЛУЧАЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В НАПОРНОМ ТРУБОПРОВОДЕ

© 2024 г. **Е. Ю. ГРАЖДАНЦЕВА**

Аннотация. Предложено точное решение задачи Коши для гиперболической системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, описывающей движение жидкости в трубопроводе, находящемся под давлением.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, частная производная, задача Коши.

CAUCHY PROBLEM FOR A SPECIAL CASE OF FLUID MOTION IN A PRESSURE PIPELINE

© 2024 **E. Yu. GRAZHDANTSEVA**

Abstract. In this paper, we obtain an exact solution of the Cauchy problem for a system of inhomogeneous first-order partial differential equations of hyperbolic type, which describes a motion of a fluid in a pressure pipeline.

Keywords and phrases: differential equation, partial derivative, Cauchy problem.

AMS Subject Classification: 35L02, 35L60

1. Введение. Многочисленные процессы движения жидкости в трубопроводе (трубопроводных системах) описываются дифференциальными уравнениями или системами дифференциальных уравнений в частных производных. С этим можно ознакомиться, например, в [1, 2, 4–9]. В частности, возникающие в трубопроводах некоторые волновые процессы допускают описание системой двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка, содержащих две неизвестные (искомые) функции. Дифференциальные уравнения в системе могут быть как однородными, так и неоднородными. При необходимости, уравнения системы связывают такие физические характеристики, как расход жидкости и её давление, которые выступают в роли неизвестных функций, зависящих от пространственной и временной переменных. Такую систему классифицируют как систему дифференциальных уравнений гиперболического типа. Зная начальные расход и давление, появляется возможность сформулировать задачу Коши для такой системы.

2. Постановка задачи. Рассматривается система неоднородных линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial x}{\partial l} + a\frac{\partial p}{\partial t} = f, \quad \frac{\partial p}{\partial l} + c\frac{\partial x}{\partial t} = g \tag{1}$$

с начальными условиями

$$x(l,0) = \varphi(l), \quad p(l,0) = \psi(l), \tag{2}$$

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FWEU-2021-0006, тема АААА-А21-121012090034-3).

где $x = x(l,t)$ и $p = p(l,t)$ — неизвестные функции достаточной гладкости со значениями в $\mathbb{R}$ (в частности, характеризуют масовый расход и давление жидкости, соответственно), l и t — пространственная и временная независимые переменные, $l \in [0, L]$, $L \in \mathbb{R}_+$, $t \geqslant 0$, $(l,t) \in D \subset \mathbb{R}^2$, a и c — такие действительные числа, что $ac > 0$ (это неравенство обеспечивает гиперболичность рассматриваемой системы), $f = f(l,t)$ и $g = g(l,t)$ — непрерывные по каждой переменной и по совокупности переменных со значениями в $\mathbb{R}$ (в частности, описывают внешнее воздействие на процесс); функции $\varphi(l)$, $\psi(l)$ непрерывны со значениями в $\mathbb{R}$.

3. Основные результаты. Пусть функции $\varphi(l)$ и $\psi(l)$ непрерывны, дифференцируемы и существуют непрерывные производные $\varphi'(l)$ и $\psi'(l)$ для любых l, удовлетворяющих условию $(l,t) \in D \subset \mathbb{R}^2$, a и b — действительные числа, $ac > 0$, функции $u = u(l,t)$ и $v = v(l,t)$ непрерывны вместе с своими частными производными для любых $(l,t) \in D \subset \mathbb{R}^2$.

Для системы однородных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial l} + a\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial l} + c\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{3}$$

с неоднородными условиями

$$u\big|_{t=\tau} = \varphi(l), \quad v\big|_{t=\tau} = \psi(l), \tag{4}$$

где $\tau \in \mathbb{R}$, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. *Если $\varphi(l)$ и $\psi(l)$ непрерывны и существуют непрерывные производные $\varphi'(l)$ и $\psi'(l)$ для любых l, удовлетворяющих условию $(l,t) \in D \subset \mathbb{R}^2$, a и b — действительные числа, $ac > 0$, то для задачи* (3)–(4) *существует точное решение вида*

$$u = u(l,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi\left(l - \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}}\right) + \varphi\left(l + \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}}\right)\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{c}}\left(\psi\left(l - \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}}\right) - \psi\left(l + \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}}\right)\right), \tag{5}$$

$$v = v(l,t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}\left(\varphi\left(l - \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}}\right) - \varphi\left(l + \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(\psi\left(l - \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}}\right) + \psi\left(l + \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}}\right)\right). \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $u = u(l,t)$, $v = v(l,t)$ имеют вид (5) и (6) соответственно. Тогда, полагая $t = \tau$, получим

$$u\big|_{t=\tau} = \left[\frac{1}{2}\left(\varphi\left(l - \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}}\right) + \varphi\left(l + \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}}\right)\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{c}}\left(\psi\left(l - \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}}\right) - \psi\left(l + \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}}\right)\right)\right]_{t=\tau} = \frac{1}{2}(\varphi(l) + \varphi(l)) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{c}}(\psi(l) - \psi(l)) = \varphi(l),$$

$$v\big|_{t=\tau} = \left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}\left(\varphi\left(l - \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}}\right) - \varphi\left(l + \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(\psi\left(l - \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}}\right) + \psi\left(l + \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}}\right)\right)\right]_{t=\tau} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}(\varphi(l) - \varphi(l)) + \frac{1}{2}(\psi(l) + \psi(l)) = \psi(l).$$

Следовательно, функции (5) и (6) удовлетворяют условиям (4).

Введем следующие обозначения:

$$z = l - \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}}, \quad y = l + \frac{t-\tau}{ac}.$$

Согласно правилу дифференцирования сложной функции частные производные функций $u = u(l,t)$ и $v = v(l,t)$ по переменным l и t преобразуются следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{1}{2}\left(\varphi'(z)\cdot\frac{\partial z}{\partial l} + \varphi'(y)\cdot\frac{\partial y}{\partial l}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{c}}\left(\psi'(z)\cdot\frac{\partial z}{\partial l} - \psi'(y)\cdot\frac{\partial y}{\partial l}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\varphi'(z)\cdot 1 + \varphi'(y)\cdot 1\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{c}}\left(\psi'(z)\cdot 1 - \psi'(y)\cdot 1\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\varphi'(z) + \varphi'(y)\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{c}}\left(\psi'(z) - \psi'(y)\right);$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\varphi'(z)\cdot\frac{\partial z}{\partial t} + \varphi'(y)\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{c}}\left(\psi'(z)\cdot\frac{\partial z}{\partial t} - \psi'(y)\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\varphi'(z)\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{ac}}\right) + \varphi'(y)\cdot\frac{1}{\sqrt{ac}}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{c}}\left(\psi'(z)\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{ac}}\right) - \psi'(y)\cdot\frac{1}{\sqrt{ac}}\right) =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{ac}}\left(-\varphi'(z) + \varphi'(y)\right) + \frac{1}{2c}\left(-\psi'(z) - \psi'(y)\right);$$

$$\frac{\partial v}{\partial l} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}\left(\varphi'(z)\cdot\frac{\partial z}{\partial l} - \varphi'(y)\cdot\frac{\partial y}{\partial l}\right) + \frac{1}{2}\left(\psi'(z)\cdot\frac{\partial z}{\partial l} + \psi'(y)\cdot\frac{\partial y}{\partial l}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}\left(\varphi'(z)\cdot 1 - \varphi'(y)\cdot 1\right) + \frac{1}{2}\left(\psi'(z)\cdot 1 + \psi'(y)\cdot 1\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}\left(\varphi'(z) - \varphi'(y)\right) + \frac{1}{2}\left(\psi'(z) + \psi'(y)\right);$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}\left(\varphi'(z)\cdot\frac{\partial z}{\partial t} - \varphi'(y)\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}\left(\psi'(z)\cdot\frac{\partial z}{\partial t} + \psi'(y)\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}\left(\varphi'(z)\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{ac}}\right) - \varphi'(y)\cdot\frac{1}{\sqrt{ac}}\right) + \frac{1}{2}\left(\psi'(z)\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{ac}}\right) + \psi'(y)\cdot\frac{1}{\sqrt{ac}}\right) =$$
$$= \frac{1}{2a}\left(-\varphi'(z) - \varphi'(y)\right) + \frac{1}{2\sqrt{ac}}\left(-\psi'(z) + \psi'(y)\right).$$

Следовательно, справедливы следующие цепочки равенств:

$$\frac{\partial u}{\partial l} + a\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\varphi'(z) + \varphi'(y)\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{c}}\left(\psi'(z) - \psi'(y)\right) +$$
$$+ a\left(\frac{1}{2a}\left(-\varphi'(z) - \varphi'(y)\right) + \frac{1}{2\sqrt{ac}}\left(-\psi'(z) + \psi'(y)\right)\right) = 0;$$

$$\frac{\partial v}{\partial l} + c\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}\left(\varphi'(z) - \varphi'(y)\right) + \frac{1}{2}\left(\psi'(z) + \psi'(y)\right) +$$
$$c\left(\frac{1}{2\sqrt{ac}}\left(-\varphi'(z) + \varphi'(y)\right) + \frac{1}{2c}\left(-\psi'(z) - \psi'(y)\right)\right) = 0.$$

Таким образом, функции (5) и (6) при подстановке их в уравнения системы (3) обращают эти уравнения в тождества, т.е. являются решением системы (3). Утверждение 1 доказано. □

Замечание 1 (см. [3]). Если в (5) и (6) положить $\tau = 0$, то получим точное решение системы (3), удовлетворяющее условиям $u\big|_{t=0} = \varphi(l)$ и $v\big|_{t=0} = \psi(l)$.

Пусть $\mathbb{R}$-значные функции $f = f(l,t)$ и $g = g(l,t)$ непрерывны вместе со своими частными производными, $w_1 = w_1(l,t)$ и $w_2 = w_2(l,t)$ — неизвестные функции достаточной гладкости со значениями в $\mathbb{R}$.

Рассмотрим систему неоднородных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial w_1}{\partial l} + a\frac{\partial w_2}{\partial t} = f, \quad \frac{\partial w_2}{\partial l} + c\frac{\partial w_1}{\partial t} = g \tag{7}$$

с однородными условиями типа

$$w_1\big|_{t=0} = 0, \quad w_2\big|_{t=0} = 0. \tag{8}$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. *Если a и b — действительные числа, $ac > 0$, функции $f = f_1(l,t)$ и $g = g(l,t)$ непрерывны по каждой переменной и по совокупности переменных вместе с своими частными производными для любых $(l,t) \in D \subset \mathbb{R}^2$, то задача Коши (7)–(8) имеет точное решение вида*

$$w_1 = w_1(l,t) = \int\limits_0^t \tilde{w}_1(l,t,\tau)d\tau, \quad w_2 = w_2(l,t) = \int\limits_0^t \tilde{w}_2(l,t,\tau)d\tau, \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{w}_1(l,t,\tau) = \frac{1}{2c}\left(g\left(l - \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}},\tau\right) + g\left(l + \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}},\tau\right)\right) + \\ + \frac{1}{2\sqrt{ac}}\left(f\left(l - \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}},\tau\right) - f\left(l + \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}},\tau\right)\right),\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\tilde{w}_2(l,t,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{ac}}\left(g\left(l - \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}},\tau\right) - g\left(l + \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}},\tau\right)\right) + \\ + \frac{1}{2a}\left(f\left(l - \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}},\tau\right) + f\left(l + \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}},\tau\right)\right).\end{aligned} \tag{11}$$

Доказательство. Пусть функции $w_1 = w_1(l,t)$, $w_2 = w_2(l,t)$ имеют вид (9), а функции $\tilde{w}_1 = \tilde{w}_1(l,t,\tau)$, $\tilde{w}_2 = \tilde{w}_2(l,t,\tau)$ имеют вид (10) и (11) соответственно. Обозначим

$$z = l - \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}}, \quad y = l + \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}}.$$

Тогда, учитывая введенные обозначения и согласно правила дифференцирования сложной функции, для частных производных функций (10) и (11) справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial l} &= \frac{1}{2c}\left(\frac{\partial}{\partial z}g(z,\tau)\cdot\frac{\partial z}{\partial l} + \frac{\partial}{\partial y}g(y,\tau)\cdot\frac{\partial y}{\partial l}\right) + \frac{1}{2\sqrt{ac}}\left(\frac{\partial}{\partial z}f(z,\tau)\cdot\frac{\partial z}{\partial l} - \frac{\partial}{\partial y}f(y,\tau)\cdot\frac{\partial y}{\partial l}\right) = \\ &= \frac{1}{2c}\left(\frac{\partial}{\partial z}g(z,\tau) + \frac{\partial}{\partial y}g(y,\tau)\right) + \frac{1}{2\sqrt{ac}}\left(\frac{\partial}{\partial z}f(z,\tau) - \frac{\partial}{\partial y}f(y,\tau)\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial t} &= \frac{1}{2c}\left(\frac{\partial}{\partial z}g(z,\tau)\cdot\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}g(y,\tau)\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\right) + \frac{1}{2\sqrt{ac}}\left(\frac{\partial}{\partial z}f(z,\tau)\cdot\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y}f(y,\tau)\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \\ &= \frac{1}{2c}\left(\frac{\partial}{\partial z}g(z,\tau)\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{ac}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}g(y,\tau)\cdot\frac{1}{\sqrt{ac}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{ac}}\left(\frac{\partial}{\partial z}f(z,\tau)\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{ac}}\right) - \frac{\partial}{\partial y}f(y,\tau)\cdot\frac{1}{\sqrt{ac}}\right) = \\ &= \frac{1}{2c\sqrt{ac}}\left(-\frac{\partial}{\partial z}g(z,\tau) + \frac{\partial}{\partial y}g(y,\tau)\right) + \frac{1}{2ac}\left(-\frac{\partial}{\partial z}f(z,\tau) - \frac{\partial}{\partial y}f(y,\tau)\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{w}_2}{\partial l} &= \frac{1}{2\sqrt{ac}}\left(\frac{\partial}{\partial z}g(z,\tau)\cdot\frac{\partial z}{\partial l} - \frac{\partial}{\partial y}g(y,\tau)\cdot\frac{\partial y}{\partial l}\right) + \frac{1}{2a}\left(\frac{\partial}{\partial z}f(z,\tau)\cdot\frac{\partial z}{\partial l} + \frac{\partial}{\partial y}f(y,\tau)\cdot\frac{\partial y}{\partial l}\right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{ac}}\left(\frac{\partial}{\partial z}g(z,\tau) - \frac{\partial}{\partial y}g(y,\tau)\right) + \frac{1}{2a}\left(\frac{\partial}{\partial z}f(z,\tau) + \frac{\partial}{\partial y}f(y,\tau)\right),\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \tilde{w}_2}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{ac}}\left(\frac{\partial}{\partial z}g(z,\tau)\cdot\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}g(y,\tau)\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\right) + \frac{1}{2a}\left(\frac{\partial}{\partial z}f(z,\tau)\cdot\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}f(y,\tau)\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\right) =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{ac}}\left(\frac{\partial}{\partial z}g(z,\tau)\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{ac}}\right) - \frac{\partial}{\partial y}g(y,\tau)\cdot\frac{1}{\sqrt{ac}}\right) + \frac{1}{2a}\left(\frac{\partial}{\partial z}f(z,\tau)\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{ac}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}f(y,\tau)\cdot\frac{1}{\sqrt{ac}}\right) =$$
$$= \frac{1}{2ac}\left(-\frac{\partial}{\partial z}g(z,\tau) - \frac{\partial}{\partial y}g(y,\tau)\right) + \frac{1}{2a\sqrt{ac}}\left(-\frac{\partial}{\partial z}f(z,\tau) + \frac{\partial}{\partial y}f(y,\tau)\right).$$

Следовательно, по правилу дифференцирования интеграла с переменным пределом, учитывая вид частных производных, представленных выше, получим:

$$\frac{\partial w_1}{\partial l} + a\frac{\partial w_2}{\partial t} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial l}\left(\int_0^t \tilde{w}_1(l,t,\tau)d\tau\right) + a\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t \tilde{w}_2(l,t,\tau)d\tau\right) = \int_0^t \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial l}d\tau + a\left(\int_0^t \frac{\partial \tilde{w}_2}{\partial t}d\tau + \tilde{w}_2\big|_{\tau=t}\right) =$$
$$= \int_0^t \left(\frac{1}{2c}\left(\frac{\partial}{\partial z}g(z,\tau) + \frac{\partial}{\partial y}g(y,\tau)\right) + \frac{1}{2\sqrt{ac}}\left(\frac{\partial}{\partial z}f(z,\tau) - \frac{\partial}{\partial y}f(y,\tau)\right)\right)d\tau +$$
$$+ a\int_0^t \left(\frac{1}{2ac}\left(-\frac{\partial}{\partial z}g(z,\tau) - \frac{\partial}{\partial y}g(y,\tau)\right) + \frac{1}{2a\sqrt{ac}}\left(-\frac{\partial}{\partial z}f(z,\tau) + \frac{\partial}{\partial y}f(y,\tau)\right)\right)d\tau +$$
$$+ a\left(\frac{1}{2\sqrt{ac}}(g(l,t) - g(l,t)) + \frac{1}{2a}(f(l,t) + t(l,t))\right) = f(l,t),$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial l} + c\frac{\partial w_1}{\partial t} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial l}\left(\int_0^t \tilde{w}_2(l,t,\tau)d\tau\right) + c\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t \tilde{w}_1(l,t,\tau)d\tau\right) = \int_0^t \frac{\partial \tilde{w}_2}{\partial l}d\tau + c\left(\int_0^t \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial t}d\tau + \tilde{w}_1\big|_{\tau=t}\right) =$$
$$= \int_0^t \left(\frac{1}{2\sqrt{ac}}\left(\frac{\partial}{\partial z}g(z,\tau) - \frac{\partial}{\partial y}g(y,\tau)\right) + \frac{1}{2a}\left(\frac{\partial}{\partial z}f(z,\tau) + \frac{\partial}{\partial y}f(y,\tau)\right)\right)d\tau +$$
$$+ c\int_0^t \left(\frac{1}{2c\sqrt{ac}}\left(-\frac{\partial}{\partial z}g(z,\tau) + \frac{\partial}{\partial y}g(y,\tau)\right) + \frac{1}{2ac}\left(-\frac{\partial}{\partial z}f(z,\tau) - \frac{\partial}{\partial y}f(y,\tau)\right)\right)d\tau +$$
$$+ c\left(\frac{1}{2c}(g(l,t) + g(l,t)) + \frac{1}{2\sqrt{ac}}(f(l,t) - t(l,t))\right) = g(l,t).$$

Таким образом, получаем подтверждение того, что функции вида (9) удовлетворяют уравнениям системы (7) (т.е. при подстановке их в уравнения системы (7) обращают эти уравнения в тождества). Также очевидно, что функции (9) удовлетворяют условиям (8). Следовательно, функции (9) являются решением задачи (7)–(8). Утверждение 2 доказано. □

Теорема 1. *Если функции $\varphi(l)$, $\psi(l)$, $f = f(l,t)$ и $g = g(l,t)$ непрерывны вместе со своими частными производными для любых $(l,t) \in D \subset \mathbb{R}^2$, a и b — действительные числа, $ac > 0$. Тогда при $\tau = 0$ задача (1)–(2) имеет решение вида*

$$x = x(l,t) = u(l,t) + w_1(l,t), \tag{12}$$
$$p = p(l,t) = v(l,t) + w_2(l,t), \tag{13}$$

где функции $u(l,t)$ и $v(l,t)$ восстанавливаются по формулам (5) и (6), соответственно (полагая в них $\tau = 0$), а функции $w_1(l,t)$ и $w_2(l,t)$ — по формулам (9), (10), (11).

Доказательство. Чтобы убедиться в справедливости теоремы, достаточно подтверждения того, что (12) и (13) обращают уравнения системы (1) и условия (2) в тождества. Пусть $x = x(l,t)$, $p = p(l,t)$, $u = u(l,t)$, $v = v(l,t)$, $w_1 = w_1(l,t)$, $w_2 = w_2(l,t)$, $f = f(l,t)$, $g = g(l,t)$. После подстановки (12) и (13) в (1) и (2) получаем систему

$$\frac{\partial u}{\partial l} + \frac{\partial w_1}{\partial l} + a\frac{\partial v}{\partial t} + a\frac{\partial w_2}{\partial t} = f, \quad \frac{\partial v}{\partial l} + \frac{\partial w_2}{\partial l} + c\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial w_1}{\partial t} = g, \tag{14}$$

и условия

$$u\big|_{t=0} + w_1\big|_{t=0} = \varphi(l), \quad v\big|_{t=0} + w_2\big|_{t=0} = \psi(l), \tag{15}$$

поскольку

$$\frac{\partial x}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial l} + \frac{\partial w_1}{\partial l}, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial w_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial p}{\partial l} = \frac{\partial v}{\partial l} + \frac{\partial w_2}{\partial l}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial w_2}{\partial t}.$$

Это позволяет представить систему (14) в виде совокупности двух систем, а именно, системы однородных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial l} + a\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial l} + c\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

и системы неоднородных уравнений

$$\frac{\partial w_1}{\partial l} + a\frac{\partial w_2}{\partial t} = f, \quad \frac{\partial w_2}{\partial l} + c\frac{\partial w_1}{\partial t} = g,$$

а условия (15) представить в виде

$$u\big|_{t=0} = \varphi(l), \qquad v\big|_{t=0} = \psi(l), \tag{16}$$

$$w_1\big|_{t=0} = 0, \qquad w_2\big|_{t=0} = 0. \tag{17}$$

Таким образом, задачу (1)–(2) можно рассматривать как совокупность двух задач, одна из которых является задачей поиска решения системы однородных уравнений с однородными условиями типа (16) (оно же является условием (4) при $\tau = 0$), решением которой являются функции (5) и (6) если в них положить $\tau = 0$ (см. замечание 1), а другая — задачей поиска решения системы неоднородных уравнений с однородными условиями типа (17), решение которой восстанавливается по формулам (9), (10), (11). При этом решение задачи (1)–(2) примет вид суммы решений выше описанных задач. □

Теорема 2. *Если функции $\varphi(l)$, $\psi(l)$, $f = f(l,t)$ и $g = g(l,t)$ непрерывны вместе со своими частными производными для любых $(l,t) \in D \subset \mathbb{R}^2$, τ, a и b — действительные числа, $ac > 0$. Тогда решение системы* (1), *удовлетворяющее неоднородным условиям типа* (4), *имеет решение вида* (12), (13), *где функции $u = u(l,t)$ и $v = v(l,t)$ восстанавливаются по формулам* (5) *и* (6) *соответственно, а функции $w_1(l,t)$ и $w_2(l,t)$ — по формулам*

$$w_1 = w_1(l,t) = \int\limits_0^{t-\tau} \tilde{w}_1(l,t,\eta)d\eta, \quad w_2 = w_2(l,t) = \int\limits_0^{t-\tau} \tilde{w}_2(l,t,\eta)d\eta, \tag{18}$$

где

$$\tilde{w}_1(l,t,\eta) = \frac{1}{2c}\left(g\left(l - \frac{t-\tau-\eta}{\sqrt{ac}}, \eta+\tau\right) + g\left(l + \frac{t-\tau-\eta}{\sqrt{ac}}, \eta+\tau\right)\right) + \\ + \frac{1}{2\sqrt{ac}}\left(f\left(l - \frac{t-\tau-\eta}{\sqrt{ac}}, \eta+\tau\right) - f\left(l + \frac{t-\tau-\eta}{\sqrt{ac}}, \eta+\tau\right)\right), \tag{19}$$

$$\tilde{w}_2(l,t,\eta) = \frac{1}{2\sqrt{ac}}\left(g\left(l - \frac{t-\tau-\eta}{\sqrt{ac}}, \eta+\tau\right) - g\left(l + \frac{t-\tau-\eta}{\sqrt{ac}}, \eta+\tau\right)\right) + \\ + \frac{1}{2a}\left(f\left(l - \frac{t-\tau-\eta}{\sqrt{ac}}, \eta+\tau\right) + f\left(l + \frac{t-\tau-\eta}{\sqrt{ac}}, \eta+\tau\right)\right). \tag{20}$$

Доказательство. Пусть $x = x(l,t)$, $p = p(l,t)$, $u = u(l,t)$, $v = v(l,t)$, $w_1 = w_1(l,t)$, $w_2 = w_2(l,t)$, $f = f(l,t)$, $g = g(l,t)$. Чтобы убедиться в справедливости теоремы, достаточно подтверждения того, что (12) и (13) обращают уравнения системы (1) и условия (4) в тождества. После подстановки (12) и (13) в систему (1) и условия (4) получим систему вида (14), и условия вида

$$u\big|_{t=\tau} + w_1\big|_{t=\tau} = \varphi(l), \quad v\big|_{t=\tau} + w_2\big|_{t=\tau} = \psi(l), \tag{21}$$

поскольку

$$\frac{\partial x}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial l} + \frac{\partial w_1}{\partial l}, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial w_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial p}{\partial l} = \frac{\partial v}{\partial l} + \frac{\partial w_2}{\partial l}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial w_2}{\partial t}.$$

Так как функции $u = u(l,t)$ и $v = v(l,t)$ вида (5) и (6), как показано в утверждении 1, удовлетворяют равенствам

$$\frac{\partial u}{\partial l} + a\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial l} + c\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad u\big|_{t=\tau} = \varphi(l), \quad v\big|_{t=\tau} = \psi(l),$$

достаточно убедиться в справедливости равенств

$$\frac{\partial w_1}{\partial l} + a\frac{\partial w_2}{\partial t} = f, \quad \frac{\partial w_2}{\partial l} + c\frac{\partial w_1}{\partial t} = g, \quad w_1\big|_{t=\tau} = 0, \quad w_2\big|_{t=\tau} = 0 \tag{22}$$

(см. (21)). Для удобства дифференцирования введем обозначения

$$z = l - \frac{t-\tau-\eta}{\sqrt{ac}}, \quad s = l + \frac{t-\tau-\eta}{\sqrt{ac}}.$$

Тогда

$$g\left(l - \frac{t-\tau-\eta}{\sqrt{ac}}, \eta+\tau\right) = g(z,\eta+\tau), \quad g\left(l + \frac{t-\tau-\eta}{\sqrt{ac}}, \eta+\tau\right) = g(s,\eta+\tau),$$
$$f\left(l - \frac{t-\tau-\eta}{\sqrt{ac}}, \eta+\tau\right) = f(z,\eta+\tau), \quad f\left(l + \frac{t-\tau-\eta}{\sqrt{ac}}, \eta+\tau\right) = f(s,\eta+\tau);$$

согласно правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial l} + a\frac{\partial \tilde{w}_2}{\partial t} = \frac{1}{2c}\left(\frac{\partial}{\partial z}g(z,\eta+\tau) + \frac{\partial}{\partial y}g(y,\eta+\tau)\right) + \frac{1}{2\sqrt{ac}}\left(\frac{\partial}{\partial z}f(z,\eta+\tau) - \frac{\partial}{\partial y}f(y,\eta+\tau)\right) +$$
$$+ a\left(\frac{1}{2ac}\left(-\frac{\partial}{\partial z}g(z,\eta+\tau) - \frac{\partial}{\partial y}g(y,\eta+\tau)\right) + \frac{1}{2a\sqrt{ac}}\left(-\frac{\partial}{\partial z}f(z,\eta+\tau) + \frac{\partial}{\partial y}f(y,\eta+\tau)\right)\right) = 0,$$

$$\frac{\partial \tilde{w}_2}{\partial l} + c\frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{ac}}\left(\frac{\partial}{\partial z}g(z,\eta+\tau) - \frac{\partial}{\partial y}g(y,\eta+\tau)\right) + \frac{1}{2a}\left(\frac{\partial}{\partial z}f(z,\eta+\tau) + \frac{\partial}{\partial y}f(y,\eta+\tau)\right) +$$
$$+ c\left(\frac{1}{2c\sqrt{ac}}\left(-\frac{\partial}{\partial z}g(z,\eta+\tau) + \frac{\partial}{\partial y}g(y,\eta+\tau)\right) + \frac{1}{2ac}\left(-\frac{\partial}{\partial z}f(z,\eta+\tau) - \frac{\partial}{\partial y}f(y,\eta+\tau)\right)\right) = 0,$$

где $\tilde{w}_1$ и $\tilde{w}_2$ имеют вид (19) и (20) соответственно.

Кроме того, учитывая вышеизложенное и правило дифференцирования интеграла с переменным пределом, имеем

$$\frac{\partial w_1}{\partial l} + a\frac{\partial w_2}{\partial t} =$$
$$= \int\limits_0^{t-\tau} \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial l}d\eta + a\left(\int\limits_0^{t-\tau} \frac{\partial \tilde{w}_2}{\partial t}d\eta + \tilde{w}_2\big|_{\eta=t-\tau}\right) = \int\limits_0^{t-\tau}\left(\frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial l} + a\frac{\partial \tilde{w}_2}{\partial t}\right)d\eta + a\cdot\tilde{w}_2\big|_{\eta=t-\tau} =$$
$$= 0 + a\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{ac}}(g(l,t) - g(l,t)) + \frac{1}{2a}(f(l,t) + f(l,t))\right) = f(l,t),$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial l} + c\frac{\partial w_1}{\partial t} =$$
$$= \int\limits_0^{t-\tau} \frac{\partial \tilde{w}_2}{\partial l} d\eta + c\left(\int\limits_0^{t-\tau} \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial t} d\eta + \tilde{w}_1\big|_{\eta=t-\tau}\right) = \int\limits_0^{t-\tau} \left(\frac{\partial \tilde{w}_2}{\partial l} + c\frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial t}\right) d\eta + c\cdot \tilde{w}_2\big|_{\eta=t-\tau} =$$
$$= 0 + c\cdot\left(\frac{1}{2c}(g(l,t)+g(l,t)) + \frac{1}{2\sqrt{ac}}(f(l,t)-f(l,t))\right) = g(l,t).$$

Таким образом, получаем подтверждение того, что функции (18) удовлетворяют первым двум уравнениям (22). Остальные два равенства (22) также выполнены, так как справедливо равенство

$$w_i\big|_{t=\tau} = \left(\int\limits_0^{t-\tau} \tilde{w}_i(l,t,\eta)\,d\eta\right)\Bigg|_{t=\tau} = \int\limits_0^{0} \tilde{w}_i(l,t,\eta)d\eta = 0, \quad i=1,2.$$

Следовательно, теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Альтшуль А. Д.* Гидравлические сопротивления. — М.: Недра, 1982.
2. *Бондарев Э. А., Васильев О. Ф., Воеводин А. Ф. и др.* Термодинамика систем добычи и транспорта газа. — Новосибирск: Наука, 1988.
3. *Гражданцева Е. Ю.* О точном решении одной гиперболической системы дифференциальных уравнений// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2023. — *224*. — С. 35–42.
4. *Картвелишвили Н. А.* Динамика напорных трубопроводов. — М.: Энергия, 1979.
5. *Кутателадзе С. С.* Основы теории теплообмена. — М.: Атомиздат, 1979.
6. *Рождественский Б. Н., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука, 1978.
7. *Тарасевич В. В.* Развитие теории и методов расчета гидродинамических процессов в напорных трубопроводных системах/ Дисс. на соиск. уч. степ. докт. физ.-мат. наук — Новосибирск, 2017.
8. *Фокс Д.А.* Гидравлический анализ неустановившегося течения в трубопроводах. — М.: Энергоиздат, 1981.
9. *Чарный И. А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубопроводах. — М.: Недра, 1975.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FWEU-2021-0006, тема АААА-А21-121012090034-3).

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Гражданцева Елена Юрьевна (Grazhdantseva Elena Yur'evna)
Иркутский государственный университет;
Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева Сибирского отделения РАН, Иркутск
(Irkutsk State University, Irkutsk, Russia;
L. A. Melentiev Energy Systems Institute of the Siberian Branch
of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia)
E-mail: grelyur@mail.ru