ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 234 (2024). С. 43–49
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-234-43-49

УДК 517.977.5

ОПОРНЫЕ МАЖОРАНТЫ И ПОЗИЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ МИНИМУМА ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

© 2024 г. **В. А. ДЫХТА**

Аннотация. Найдены условия опорности для двух классов задач: задач, для которых верен дискретный принцип максимума и для обобщенных решений, оптимальных в овыпукленной задаче с траекториями, реализуемыми в исходной постановке.

Ключевые слова: необходимые условия, дискретный принцип минимума, позиционный принцип минимума, неравенство Гамильтона—Якоби.

SUPPORT MAJORANTS AND FEEDBACK MINIMUM PRINCIPLES FOR DISCRETE OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

© 2024 **V. A. DYKHTA**

Abstract. Support conditions for two classes of problems are found: problems for which the discrete maximum principle is valid and for generalized solutions that are optimal in a convex problem with trajectories realized in the original formulation.

Keywords and phrases: necessary conditions, discrete minimum principle, feedback minimum principle, Hamilton–Jacobi inequality.

AMS Subject Classification: 49K15, 49L99

1. Введение. Статья посвящена необходимым условиям глобальной оптимальности для следующей задачи оптимального управления (задачи (P)):

$$x(t+1) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T, \tag{2}$$

$$J(\sigma) = l(x(N)) \to \min .$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$ — компактное множество, $T = \{0, \dots, N-1\}$, через σ обозначены пары последовательностей векторов $\{x(t), u(t)\}$, $t \in T \cup \{N\}$, вектор-функция f предполагается непрерывной по (x, u) при каждом $t \in T$ и гладкой по x, целевая функция l непрерывно дифференцируема.

Обозначим через D множество всех допустимых последовательностей σ, через $\bar\sigma = \{\bar x(t), \bar u(t)\} \in D$ — последовательность, исследуемую на оптимальность, через Φ — множество функций $\varphi(t, x) : T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, гладких по x при всех $t \in T$, и введем в рассмотрение неравенство типа Гамильтона—Якоби

$$\min_{u \in U} \varphi(t+1, f(t, x, u)) - \varphi(t, x) \leqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \ t \in T, \tag{3}$$

с граничным условием

$$\varphi(N, x) = l(x). \tag{4}$$

Решения неравенства (3) (даже без гладкости по x) обладают следующим свойством слабого убывания: для любой начальной позиции (t_*, x_*) существует такая траектория $\{x^*(t)\}$, $t = t_*, \dots, N$, системы (1) с соответствующим управлением $\{u^*(t)\}$, что

$$\varphi(t+1, x^*(t+1)) \leqslant \varphi(t, x^*(t)), \quad t = t_*, \dots, N-1. \tag{5}$$

Если φ удовлетворяет граничному условию (4), то φ-убывающая траектория $\{x^*(t)\}$ со свойством (5) при $t_* = 0$ удовлетворяет неравенству

$$\varphi(0, x_0) \geqslant \varphi(N, x^*(N)) = l(x^*(N)).$$

Отсюда следует оценка сверху функционала

$$J(\sigma) = l(x(N)) \leqslant \varphi(N, x^*(N)) \quad \forall \sigma \in D, \tag{6}$$

в силу которой все функции $\varphi \in \Phi$, являющиеся решением краевой задачи (3), (4), назовем *мажорантами функционала* J на множестве D. Из (6) следует массовое *достаточное условие неоптимальности*: неоптимальны все процессы $\sigma \in D$, для которых $l(x(N)) > \varphi(N, x^*(N))$ при какой-либо мажоранте φ и соответствующей ей φ-убывающей допустимой траектории. Другими словами, любая мажоранта φ доставляет инструмент отсева неоптимальных процессов посредством φ-убывающих траекторий. Для повышения эффективности процедуры отсева естественно использовать φ-убывающие траектории наискорейшего спуска.

Формализация этого замысла по образцу динамического программирования приводит к *общему позиционному принципу минимума* (кратко GF-ПМ). Его следует отличать от хорошо известного (см. [4]) частного принципа (F-ПМ) с квазилинейной мажорантой.

Отметим, что общий запас мажорант задачи (P) достаточно богат, поскольку любая функция $\varphi \in \Phi$ порождает мажоранту $\widetilde{\varphi}$ с помощью так называемой нормировки. Для описания этого приёма введем функцию

$$K^\varphi(t, x, u) = \varphi(t+1, f(t, x, u)) - \varphi(t, x),$$

где $\varphi \in \Phi$ — полное приращение φ на шаге t в силу системы (1), (2), и множество достижимости $\mathbb{R}(t)$ этой системы в период t. Выберем ограниченное отображение $Q(t) \supset \mathbb{R}(t)$ при всех $t \in T^N$: $T \cup \{N\}$ (что возможно в силу компактности множеств $\mathbb{R}(t)$), и определим функции

$$\begin{aligned} &m(t) = \sup_{x \in Q(t)} \min_{u \in U} K^\varphi(t, x, u), \quad t \in T, \\ &r(t) = r(t+1) - m(t), \quad r(N) = 0, \\ &\widetilde{\varphi}(t, x) = \varphi(t, x) - r(t), \quad (t, x) \in T \times Q(t). \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что полученная таким образом функция $\widetilde{\varphi}$, нормированная относительно исходной функции φ с граничным условием (4), является мажорантой функционала J на множестве $T \times Q(t)$, достаточном для анализа задачи (P).

Для приложений важно отметить, что так называемые экстремальные отображения $U^\varphi(t, x)$, $U^{\widetilde{\varphi}}(t, x)$ (см. п. 2) порождающей функции и нормированной совпадают. Отсюда следует, что практическое применение общего позиционного принципа минимума основано только на порождающих функциях $\varphi \in \Phi$, т.е. не требует нормировки.

2. φ-Экстремальные стратегии и присоединенная задача. Для функции $\varphi \in \Phi$ (или, в частности, мажоранты функционала) определим φ-экстремальное отображение

$$U^\varphi(t, x) = \operatorname*{Arg\,min}_{u \in U} K^\varphi(t, x, u). \tag{7}$$

Очевидно, что оно непусто, компактнозначно и полунепрерывно сверху по x для каждого $t \in T$. Любой селектор $v(t, x)$ отображения (7) назовем φ-экстремальным позиционным управлением, или стратегией. Множество всех таких стратегий обозначим через $\mathcal{V}^\varphi$.

Для любой стратегии $v(t, x) \in \mathcal{V}^\varphi$ можно определить траекторию $x(t; v)$ системы (1) при $u = v(t, x)$. Если φ — мажоранта, то легко убедиться, что $x(t; v)$ — φ-убывающая траектория из множества траекторий наискорейшего спуска. При этом имеет место следующее семейство необходимых условий оптимальности:

$(N(\varphi))$ *если процесс $\bar\sigma = \{\bar x(t), \bar u(t)\}$ оптимален в задаче (P), то при любой мажоранте φ выполняется неравенство*

$$l(\bar x(N)) \leqslant l(x(N; v)) \quad \forall v \in \mathcal{V}^\varphi. \tag{8}$$

Отсюда естественным образом возникает *φ-присоединенная экстремальная задача*:

$$l(x(N; v)) \to \min, \quad v \in \mathcal{V}^\varphi, \tag{9}$$

и напрашивается вопрос об оптимальности траектории $\{\bar x(t)\}$ в этой задаче.

Очевидно, что для произвольной мажоранты φ ответ отрицательный (неравенства (8) для этого недостаточно), поскольку априори существование стратегии $\bar v(t, x) \in \mathcal{V}^\varphi$, порождающей траекторию $\{\bar x(t)\}$, ниоткуда не следует.

Для анализа поставленного вопроса введем ряд определений.

Допустимое управление $\{u^c(t)\}$ назовем *совместимым* с траекторией $\{\bar x(t)\}$, если оно генерирует $\{\bar x(t)\}$ как решение системы (1) при $u = u^c(t)$. Множество всех совместимых управлений обозначим через $\mathcal{U}(\bar x)$, а множество пар $\sigma^c = \{\bar x(t), u^c(t)\}$ — через $D(\bar x)$. По определению считаем, что $\{\bar u(t)\} \in \mathcal{U}(\bar x)$, $\bar\sigma \in D(\bar x)$.

Введенные понятия учитывают неоднозначность управлений, генерирующих исследуемую траекторию $\{\bar x(t)\}$. Очевидно, что из оптимальности $\bar\sigma$ следует оптимальность всех пар $\sigma^c \in D(\bar x)$ и, как следствие, нарушение какого-либо необходимого условия оптимальности (например, экстремальности) для некоторой пары $\widetilde\sigma \in D(\bar x)$ влечет неоптимальность всех процессов $\sigma^c \in D(\bar x)$.

Определение 1. Мажоранту φ назовем *опорной* для траектории $\{\bar x(t)\}$, если $\{\bar x(t)\}$ оптимальна в φ-присоединенной задаче при подходящем выборе стратегии $\bar v \in \mathcal{V}^\varphi$. Если это условие выполнено, то будем говорить, что пара $\sigma^o = \{\bar x(t), u^o(t)\}$, $u^o(t) := \bar v(t, \bar x(t))$ удовлетворяет позиционному принципу минимума с мажорантой φ.

Отметим, что пара σ^o в данном определении принадлежит $D(\bar x)$ и лишь в частном случае совпадёт с $\bar\sigma$ — это зависит от выбора φ, $\bar v$ и реализуется при $\mathcal{U}(\bar x) = \{\bar u(t)\}$. Очевидно, что при опорной φ GF-ПМ усиливает необходимое условие $(N(\varphi))$.

Отметим также, что условия опорности мажорант в дискретной задаче (P) нельзя получить по образцу задач с непрерывным временем (см. [2]), поскольку для задачи (P) аналог принципа максимума Понтрягина не является универсальным необходимым условием оптимальности (см. [1, 3]).

3. Опорные мажоранты в задачах с выпуклым годографом. Рассмотрим класс задач типа (P), для которых множество $f(t, x, U)$ (годограф системы (1)) выпукло при всех $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$. Для задач этого класса справедлив дискретный принцип максимума (ДПМ), для формулировки которого в фиксированной задаче (P) вводятся функция $H(t, x, \psi, u) = \psi \cdot f(t, x, u)$, сопряженная система

$$\begin{cases} \psi(t) = H_x(t, x(t), \psi(t+1), u(t)), \quad t = N-1, \ldots, 1, \\ \psi(N) = l_x(x(N)), \end{cases} \tag{10}$$

и H-минимизирующее отображение

$$M(t, x, \psi) = \operatorname*{Arg\,min}_{w \in U} H(t, x, \psi, w). \tag{11}$$

Тогда ДПМ для процесса $\sigma = \{x(t), u(t)\} \in D$ можно записать в виде включения

$$u(t) \in M(t, x(t), \psi(t+1)) \quad \forall t \in T \tag{12}$$

с соответствующей σ котраекторией системы (10). Оптимальный процесс $\bar\sigma$ задачи (P) необходимо является экстремальным, т.е. удовлетворяет ДПМ с котраекторией $\{\bar\psi(t)\}$.

Гладкую по x мажоранту φ назовем *совместимой* с траекторией $\{\bar x(t)\}$, если существует такой φ-экстремальный селектор $v^o(t, x) \in \mathcal{V}^\varphi$, что имеет место равенство

$$\varphi_x(t+1, \bar x(t+1)) = \psi^o(t), \quad t \in T,$$

с котраекторией $\{\psi^o(t)\}$ пары $\sigma^o = \{\bar x(t), u^o(t)\}$, $u^o(t) = v^o(t, \bar x(t))$.

Заметим, что в сравнении с определением 1 здесь для описания пары $\sigma^o \in D(\bar x)$ использовано нейтральное обозначение селектора v^o вместо $\bar v$.

С учетом неравенства (8) свойство совместимости приводит к следующему заключению.

Теорема 1. *Пусть процесс $\bar{\sigma} = \{\bar{x}(t), \bar{u}(t)\}$ оптимален в задаче (P) с выпуклым годографом. Тогда любая мажоранта φ, совместимая с $\{\bar{x}(t)\}$, является опорной в точке $\bar{\sigma}$.*

Доказательство. Для произвольной $\varphi \in \Phi$ определим многозначное отображение

$$U_o^{\varphi}(t,x) = \operatorname*{Arg\,min}_{u \in U} \varphi_x(t+1, f(t,x,u)) \cdot f(t,x,u).$$

В силу гладкости φ и выпуклости годографа $\Gamma(t,x) = f(t,x,U)$ любой селектор $v(t,x)$ отображения (7) содержится в $U_0^{\varphi}(t,x)$ (это следует из условия минимума гладкой функции на выпуклом множестве). Поэтому при всех $(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n$ выполняется условие

$$\varphi_x(t+1, f(t,x,v(t,x))) \cdot f(t,x,v(t,x)) = \min_{u \in U} \varphi_x(t+1, f(t,x,u)) \cdot f(t,x,u).$$

Возьмем здесь φ и $v = v^o(t,x)$ из условия совместимости, а затем положим $x = \bar{x}(t)$ на T. В результате получим включение $u^o(t) \in M(t, \bar{x}(t), \psi^o(t+1))$ для всех $t \in T$, означающее выполнение ДПМ для процесса σ^o (см. (11), (12)). Вместе с тем получили, что $u^o(t) \in M(t, \bar{x}(t), \psi^o(t+1))$ вдоль орбиты траектории $\{\bar{x}(t)\}$. Так как отображение $(t,x) \to M(t,x,\psi^o(t))$ полунепрерывно сверху и компактнозначно, то оно имеет борелевский селектор $v^*(t,x)$. Положим теперь

$$\bar{v}(t,x) = \begin{cases} u^o(t), & (t,x) \in \operatorname{orb}\{x(t)\}, \\ v^*(t,x) & (t,x) \notin \operatorname{orb}\{x(t)\}. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что это искомый селектор, генерирующий $\{\bar{x}(t)\}$. $\square$

Аналогичный результат имеет место для задач, линейных по фазовой переменной (с управляемой структурой), в которых ДПМ справедлив без всяких предположений выпуклости.

4. Задачи с выпуклым годографом вдоль обобщенных траекторий. Следуя [3, §17], рассмотрим более широкий класс задач, для которых ДПМ остается верен, но имеет нетрадиционную форму.

Введем в рассмотрение овыпукленную (расширенную) дискретную систему

$$\begin{cases} x(t+1) = \sum\limits_{j=1}^{n+1} \alpha_j(t) f(t, x(t), u_j(t)), \quad x(0) = x_0, \\ \alpha_j(t) \geqslant 0, \quad \alpha_1(t) + \ldots + \alpha_{n+1}(t) = 1, \\ u_j(t) \in U, \quad j = 1, \ldots, n+1, \quad t \in T \end{cases} \tag{13}$$

с обобщенным управлением $\mu = \{\alpha_j(t), u_j(t) : \ j = 1, \ldots, n+1\}$, $t \in T$, и множество S пар $s = (\{x(t)\}, \mu)$, связанных системой (13).

Так как годограф системы (13) — выпуклое множество, то в овыпукленной задаче $(\operatorname{co} P)$ минимизации функционала $J(s) = l(x(N))$ на множестве S имеет место ДПМ. Пусть $s^0 = (\{x^0(t)\}, \mu^0)$ — некоторый оптимальный процесс расширенной задачи, удовлетворяющей ДПМ. Предположим, что выполняется следующее условие выпуклости годографа вдоль траектории $\{x^0(t)\}$:

$$\textit{множество } \Gamma(t, x^0(t)) := f(t, x^0(t), U) \textit{ выпукло на } T. \tag{14}$$

В этом предположении $\{x^0(t)\}$ одновременно является и траекторией исходной системы (1) (реализуемой в ней с некоторым обычным управлением $\{u^0(t)\}$). Поэтому для любого процесса, оптимального в задаче (P), должен выполняться ДПМ (см. [3, теорема (7.3)]).

Этот факт является ключевым для сведения вопроса опорности для класса задач со свойством (14) к ситуации п. 3 по следующей схеме.

Шаг 1. Будем исследовать на оптимальность процессы

$$\sigma^o = \big\{x^o(t), u^o(t)\big\} \in D, \quad s^o = \big\{x^o(t), \mu^o\big\} = \big\{x^o(t), \alpha_j^o(t), u_j^o(t) : j = 1, \ldots, n+1\big\} \in S,$$

о которых известно, что σ^o удовлетворяет ДПМ в задачах (P) и $(\operatorname{co} P)$, а s^o — в задаче $(\operatorname{co} P)$. Формально именно задача $(\operatorname{co} P)$ принимается за базовую, поскольку в ней аккумулирована входная информация. Ясно, что μ^o — одно из управлений, совместимых с $\{x^o(t)\}$ в $(\operatorname{co} P)$, множество которых обозначим через $\mathcal{M}(x^o)$.

Шаг 2. Для задачи $(\mathrm{co}\,P)$ определим все объекты, необходимые для формулировки опорности и GF-ПМ.

Обозначим через $g(t,x,\alpha,\omega)$ правую часть овыпукленной системы (13) с управлениями α из n-мерного симплекса A^n, $\omega=(u_1,\dots,u_{n+1})\in\Omega:=(U)^{n+1}$. Для гладкой по x функции φ положим

$$\begin{gathered}\mathcal{K}^\varphi(t,x,\alpha,\omega)=\varphi(t+1,g(t,x,\alpha,\omega))-\varphi(t,x),\\ W^\varphi(t,x)=\operatorname*{Arg\,min}_{(\alpha,\omega)\in W}\mathcal{K}^\varphi(t,x,\alpha,\omega),\end{gathered}\tag{15}$$

где $W=A^n\times\Omega$, т.е. введем аналог φ-экстремального отображения для неравенства Гамильтона—Якоби задачи $(\mathrm{co}\,P)$ (см. (3)) с граничным условием (4). Множество селекторов $v(t,x)=(v_\alpha,v_\omega)(t,x)$ отображения (15) обозначим, как и ранее, через $\mathcal{V}^\varphi$.

Теперь формулировка необходимого условия $(N(\varphi))$, определения φ-присоединенной задачи, опорной мажоранты и φ-позиционного принципа минимума становятся очевидными. Отметим лишь, что в рассматриваемом классе задач с условием (14) необходимые условия в задаче $(\mathrm{co}\,P)$ являются таковыми и для процессов $\sigma\in D$ (при их естественном вложении в S), поскольку значения задач (P) и $(\mathrm{co}\,P)$ совпадают.

Шаг 3. Остается модифицировать определение совместимости $\varphi\in\Phi$ с траекторией $\{x^o(t)\}$ в задаче $(\mathrm{co}\,P)$. Это приводит к требованию существования такого селектора $v^*(t,x)=(v^*_x,v^*_\omega)(t,x)\in\mathcal{V}^\varphi$, что имеет место равенство

$$\varphi_x(t+1,x^o(t+1))=\psi^*(t),\quad t\in T,$$

с котраекторией $\{\psi^*(t)\}$ процесса

$$s^*=\bigl\{x^o(t),\alpha^*_j,u^*_j:j=1,\dots,n+1\bigr\},\quad(\alpha^*(t),\omega^*(t))=v^*(t,x^o(t))\text{на }T.$$

Отсюда выводится следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть вдоль оптимальной траектории $\{x^o(t)\}$ овыпукленной задачи выполняется условие выпуклости годографа* (14). *Тогда любая мажоранта φ задачи* $(\mathrm{co}\,P)$, *совместимая с $\{x^o(t)\}$, является опорной для этой траектории и, следовательно, найдется процесс s^*, для которого выполняется позиционный принцип минимума.*

Доказательство этой теоремы отличается от доказательства теоремы 1 лишь техническими деталями и потому опускается.

Применение теоремы 2 требует знания хотя бы одной оптимальной траектории задачи $(\mathrm{co}\,P)$. Её можно находить, решая задачу итерациями позиционного спуска (см. [1]) с квазилинейной мажорантой

$$\varphi^*(t,x)=l(x)+\langle\psi^o(t)-l_x(x^o(t)),x\rangle+r(t).$$

5. Заключительные замечания и примеры. 1. В статье получены необходимые условия в форме общего позиционного ПМ с опорными нелинейными мажорантами (речь идет о серии необходимых условий оптимальности). Эти условия существенно усиливают дискретный ПМ для классов задач, в которых он имеет место: из GF-ПМ $\Longrightarrow$ ДПМ. Следовательно, и позиционные ПМ применимы к задачам с условием типа выпуклости годографа системы. Надо иметь в виду, что гораздо более широкую область применимости имеют мажоранты без свойства опорности в силу алгоритмичности и эффективности соответствующих итераций спуска на основе условия $(N(\varphi))$.

2. Обращение к нелинейным мажорантам естественно рекомендовать, если итерации спуска с квазилинейной мажорантой φ^*, или простой F-ПМ, не дают ожидаемых результатов. Апробировать разумно следующие по сложности за φ^* линейно-квадратичные мажоранты вида

$$\varphi^{**}(t,x)=\varphi^*(t,x)+\frac{1}{2}\Bigl\langle\bigl(\Psi^o(t)-l_{xx}(x^o(t))\bigr)x,x\Bigr\rangle+r(t),$$

где $\Psi^o(t)$ — матричная функция Габасова (см. [3, с. 252]) при двукратной гладкости по x функций f и l.

3. В связи со сказанным в замечании 1 отметим, что в отличие от непрерывных задач оптимального управления, условия экстремальности в дискретных задачах (как в смысле ДПМ, так и F-ПМ) не обладают весьма важным свойством инвариантности относительно эквивалентных преобразований задач; например, невырожденных преобразований фазовых координат. Это неприятное свойство довольно очевидно, ибо нелинейные преобразования разрушают выпуклость

отображений. Вот простейший пример: φ^*-экстремальное отображение в задаче (P) не совпадает с экстремальным отображением дискретного ПМ (см. (12) с x, ψ^o вместо $x(t)$, $\psi(t+1)$). Причина в одном: терминальный функционал задачи (P) преобразован в суммарный (что, естественно, не меняет задачи по существу) и φ^*-отображение соответствует преобразованной задаче. Но условия экстремальности в исходной и преобразованной задачах оказываются различными; на общей области применимости φ^*-экстремальность оказывается сильнее (см. примеры в [1]).

Обратимся к показательным примерам.

Пример 1 (см. [4, пример 2])**.** Для задачи

$$\begin{aligned}
&x(t+1) = x(t) + (t-1)u(t), \qquad x(0)=0,\\
&y(t+1) = y(t) + \big(u(t)-1\big)x(t), \quad y(0)=0,\\
&|u(t)| \leqslant 1, \quad t=0,1; \quad a>0,\\
&J = y(2) - ax^2(2) \to \min .
\end{aligned}$$

нетрудно проверить, что

$$\min J = \min_{\substack{|u(t)|\leqslant 1,\\ t=0,1}} \big\{ -\big(u(1)-1\big)u(0) - au^2(0)\big\} = -2-a.$$

Заметим, что в силу билинейности системы и вогнутости $l(x,y)$ для этого примера имеет место ДПМ без предположения выпуклости годографа.

Процесс $\bar\sigma$: $\bar u \equiv 1$, $\bar x(1) = \bar x(2) = -1$, $\bar y \equiv 0$, $\bar\psi \equiv 2a$, $J(\bar\sigma) = -a$, удовлетворяет ДПМ, т.е. ДПМ не бракует $\bar\sigma$.

φ^*-Экстремальное отображение приводит к следующим возможным стратегиям спуска:

$$\begin{aligned}
&t=0: \quad -au_0^2 \to \min \quad \Rightarrow \quad U_*(0,x_0) = \{\pm 1\};\\
&t=1: \quad x_1u_1 \to \min \quad \Rightarrow \quad U_*(1,x_1) = \begin{cases} \{-1\}, & x_1>0,\\ \{1\}, & x_1<0,\\ [-1,1], & x_1=0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Выбирая селектор $v(t,x)$ вида

$$v(0)=-1, \quad v(1,x) = \begin{cases} -1, & x\geqslant 0,\\ \ \ 1, & x<0, \end{cases}$$

получим процесс $\widetilde\sigma$: $\widetilde u \equiv -1$, $\widetilde x(1) = \widetilde x(2) = 1$, $\widetilde y(1) = 0$, $\widetilde y(2) = -2$, для которого

$$J(\widetilde\sigma) = -2-a < -a = J(\bar\sigma).$$

Таким образом, одна итерация спуска с мажорантой φ^* приводит к глобальному решению. Заметим, что экстремаль $\bar\sigma$ ДПМ бракуется, хотя $\bar x(t)$ допустима в φ^*-присоединенной задаче.

Пример 2 (задача с множеством реализуемых обобщенных траекторий; см. [3, с. 158])**.** Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned}
&y(t+1) = y(t) + f(t,u(t)), \qquad y(0)=y_0,\\
&z(t+1) = z(t) + cy^3(t) + g(t,u(t)), \quad z(0)=z_0,\\
&u(t)\in U, \quad t\in T=\{0,1\},\\
&J = z(2) - y^2(2) \to \inf,
\end{aligned}$$

где $x=(y,z)$, $U\subset\mathbb{R}$ — компакт, функции f, g произвольны, причем $|f(0,u)|\leqslant d$, $c\in\mathbb{R}$.

При помощи одного из критериев реализуемости в [3] установлено, что если параметры удовлетворяют условию

$$1-3cy_0 > 3d|c|,$$

то все оптимальные процессы данного примера удовлетворяют ДПМ.

Для любой экстремали $\bar\sigma$ *условие опорности на градиент* φ_x искомой мажоранты из теорем 1, 2 выполняется при выборе

$$\varphi(t,x) = \alpha(t)z + \beta(t)y^2 + \gamma z^3.$$

Это следует из формул для явного решения $\{\psi_y(t), \psi_z(t)\}$ сопряженной системы.

Но исследовать оптимальность некоторой траектории $\{\bar{x}(t)\}$ в φ-присоединенной задаче (т.е. собственно GF-ПМ) установить не удается из-за параметрической сложности примера.

Если взять квадратичную функцию $\varphi(y,z) = l(x) = z - y^2$, то

$$K^{\varphi}(x_t, u_t) = z_t + cy_t^3 + g_t(u_t) - (y_t + f_t(u_t))^2$$

(зависимость от t указываем индексом), и экстремальное отображение определится из условия

$$g_t(u_t) - 2y_t f_t(u_t) - f_t^2(u_t) \to \min, \quad u_t \in U.$$

Данный выбор φ можно использовать для итерационного решения примера, но условиям опорности теорем 1, 2 он не удовлетворяет.

Если воспользоваться теоретически более обоснованным выбором $\varphi = \varphi^*$, то с учетом равенств

$$y_1 = y_0 + f_0(u_0), \quad \psi_z \equiv 1, \quad \psi_y(1) = -2y_1 + f_1(u_1) + 3cy_1^2$$

нетрудно получить, что $U_0^{\varphi^*} = U$, а $U_1^{\varphi^*}$ находится из задачи

$$p_y(1) f_t(u_1) \to \min, \quad u_1 \in U,$$

где $p = (p_y, p_z)$ — возмущенная котраектория.

В частном варианте параметров $y_0 = -1$, $c = -1$, $d = 1$, $f = u^2 - 1$, $g = -|u|$ получаем систему

$$\begin{aligned} y(t+1) &= y(t) - 1 + u^2(t), & y(0) &= -1, \\ z(t+1) &= z(t) - y^3(t) - |u(t)|, & z(0) &= z_0 \end{aligned}$$

с прежним функционалом.

Отображение $U_1^{\varphi^*}$ тривиально: $-u^2 \to \min$, $|u| \leqslant 1$ и генерирует как обычные экстремали с $\bar{u} \equiv \pm 1$, так и обобщенное с управлением $u_1^o = +1$, $u_2^o = -1$, $\alpha_1^o = \alpha_2^o = 1/2$. Легко проверить, что все они оптимальны.

Использованный в работе метод доказательства общего позиционного принципа минимума допускает распространение на класс задач с аппроксимативным принципом максимума (см. [3]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Качественная теория оптимальных процессов. — Москва: Наука, 1971.
2. *Дыхта В. А.* О множестве необходимых условий оптимальности с позиционными управлениями, порожденном слабо убывающими решениями неравенства Гамильтона—Якоби спуска в задачах оптимального управления// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2022. — *28*, № 3. — С. 83–93.
3. *Мордухович Б. Ш.* Методы аппроксимации в задачах оптимизации и управления. — М.: Наука, 1988.
4. *Dykhta V. A., Sorokin S.* Feedback minimum principle for optimal control problems in discrete-time systems and its applications// Lect. Notes Comp. Sci. — 2019. — *11548*. — P. 449–460.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Дыхта Владимир Александрович (Dykhta Vladimir Aleksandrovich)
Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск;
Иркутский государственный университет
(V. M. Matrosov Institute of System Dynamics and Control Theory
of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia;
Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)
E-mail: `dykhta@gmail.com`