



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 234 (2024). С. 59–66
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-234-59-66

УДК 517.957

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НУЛЕВЫМ ФРОНТОМ

© 2024 г. А. Л. КАЗАКОВ, Л. Ф. СПЕВАК

Аннотация. Рассматривается один класс точных решений многомерного нелинейного уравнения теплопроводности с источником, построение которых сводится к интегрированию семейства обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, причем при соответствующем задании условий Коши их можно интерпретировать как нетривиальные решения с нулевым фронтом. Доказана теорема существования с построением решения в виде сходящегося степенного ряда. Предложен приближенный алгоритм, основанный на методе коллокаций и разложении по радиальным базисным функциям, выполнены численные расчеты, проведен численный анализ полученных решений.

Ключевые слова: нелинейное параболическое уравнение, точное решение, теорема существования, метод коллокаций, радиальные базисные функции, численный анализ.

ON ONE CLASS OF EXACT SOLUTIONS OF THE MULTIDIMENSIONAL NONLINEAR HEAT EQUATION WITH A ZERO FRONT

© 2024 A. L. KAZAKOV, L. F. SPEVAK

ABSTRACT. We consider a class of exact solutions of a multidimensional nonlinear heat equation with a source. The construction of these solutions leads to the solution of a family of second-order ordinary differential equations. If appropriate Cauchy conditions are specified, exact solutions can be interpreted as nontrivial solutions with zero front. An existence theorem is proved and a solution is constructed in the form of a converging power series. An approximate algorithm based on the collocation method of radial basis functions is proposed. Test calculations and numerical analysis of the solutions obtained are performed.

Keywords and phrases: nonlinear parabolic system, exact solution, existence theorem, collocation method, radial basic functions, numerical analysis.

AMS Subject Classification: 35K40, 35K57

1. Введение. Рассмотрим нелинейное эволюционное параболическое уравнение

$$U_t = \Delta \Phi_1(U) + \Phi_2(U), \quad (1)$$

где t — время, Δ — лапласиан по пространственным переменным x_1, x_2, \dots, x_N ; $u(t, x_1, \dots, x_N)$ — искомая функция (см. [8]). Иногда (1) называют «generalized porous medium equation» (см. [17]). Наиболее часто в литературе встречается случай степенных функций $\Phi_1(U)$ и $\Phi_2(U)$ (см. [9]). Тогда уравнение (1) можно после замены $u = \Phi_1'(U)$ путем несложных преобразований привести

к виду

$$u_t = u\Delta u + \frac{1}{\sigma}(\nabla u)^2 + \alpha u^\beta, \quad (2)$$

где α, β, σ — действительные константы. Будем далее предполагать, что $\beta > 0, \sigma > 0$.

В свою очередь, уравнение (2) при наличии пространственных симметрий может быть записано в виде

$$u_t = uu_{\rho\rho} + \frac{u_\rho^2}{\sigma} + \frac{\nu uu_\rho}{\rho} + \alpha u^\beta, \quad (3)$$

где

$$\rho = \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right)^{1/2}$$

— новая пространственная переменная, $\nu = N - 1$. Самыми естественными случаями здесь являются $\nu = 0$ (плоская симметрия), $\nu = 1$ (цилиндрическая или круговая симметрия) и $\nu = 2$ (сферическая симметрия).

Значительный интерес как с точки зрения теоретической математики, так и для математической физики (см. [13]) представляют решения нелинейного уравнения теплопроводности с нулевым фронтом: нетривиальные конструкции, удовлетворяющие как (3), так и условию

$$u|_{\rho=a(t)} = 0. \quad (4)$$

Впервые такого рода решения были рассмотрены вскоре после Второй мировой войны в связи с высокотемпературными процессами в физике плазмы (см. [2]) и фильтрацией жидкостей и газов в пористых пластах (см. [1]; ссылки даны не на оригинальные статьи, которые являются библиографической редкостью, а на более поздние известные монографии тех же авторов). В дальнейшем решения с нулевым фронтом, который (в зависимости от физической интерпретации задачи) является фронтом *тепловой* или *фильтрационной волны*, изучались в научных школах академиков А. А. Самарского (см. [9]) и А. Ф. Сидорова (см. [10]).

В работах авторов решения с нулевым фронтом рассматривались неоднократно в контексте построения точных решений (см. [3, 4]), доказательства теорем существования и единственности (см. [3]) и разработки численных алгоритмов (см. [6, 16]) нахождения решений начально-краевых задач.

В настоящей статье рассматривается один класс точных решений уравнения (3), построение которых сводится к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) второго порядка. Их можно при соответствующем задании начальных данных интерпретировать как решения с нулевым фронтом. Доказывается теорема существования и единственности, предлагается приближенный алгоритм, основанный на методе коллокаций (см. [12]) и разложении по радиальным базисным функциям (см. [11, 14]), выполняются тестовые расчеты, проводится численный анализ построенных решений.

2. Редукция к обыкновенному дифференциальному уравнению. Следуя [5], будем искать решение уравнения (3) в виде

$$u = \rho^2 \psi(t) v(\xi), \quad \xi = \lambda \ln \frac{\rho}{a(t)}, \quad (5)$$

где $\lambda \neq 0$ — константа. Подставив выражение (5) в (3), приведя подобные и приравняв к константам коэффициенты перед v , ее степенями и производными, получим

$$\beta = 1, \quad \psi(t) = \frac{a'(t)}{\lambda a(t)},$$

где $a(t)$ может иметь вид $a_1(t) = C_2 \exp(C_1 t)$ или $a_2(t) = (C_3 t + C_4)^\gamma$, а для нахождения $v(\xi)$ имеем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$vv'' + \frac{(v')^2}{\sigma} + \frac{(\nu + 3)\sigma + 4}{\lambda\sigma} vv' + v' + \frac{2[(\nu + 1)\sigma + 2]}{\lambda^2\sigma} v^2 + \gamma v = 0. \quad (6)$$

Здесь $\gamma = \alpha$, если $a = a_1(t)$; $\gamma = 1/\omega$, если $\alpha = 0$, $a = a_2(t)$. Уравнение (6) для частного случая $\alpha = 0$, $\nu = 0, 1, 2$ было получено в [5], однако ранее не исследовалось.

3. Теорема существования. Любые решения уравнения (6) порождают решения уравнения (3) вида

$$u = \rho^2 \frac{a'(t)}{\lambda a(t)} v \left(\lambda \ln \frac{\rho}{a(t)} \right), \quad (7)$$

однако с точки зрения настоящего исследования наиболее интересны решения с нулевым фронтом. Можно видеть, что условие на нулевом фронте (4) для (7) имеет вид $v(0) = 0$, при этом функция $a(t)$ может иметь вид $a_1(t)$ либо $a_2(t)$, иначе говоря, ее нельзя задавать произвольным образом.

Рассмотрим для уравнения (6) условия Коши

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = v_1. \quad (8)$$

Для задачи (6), (8) справедлива приведенная ниже теорема. Отметим, что применить классические теоремы существования (Коши, Пеано и т. п.) в данном случае не представляется возможным из-за того, что обращается в нуль множитель перед старшей (второй) производной в точке $\xi = 0$, так что уравнение имеет в этой точке особенность.

Теорема 1. *Задача (6), (8) имеет следующие классические (дважды непрерывно дифференцируемые) решения:*

- (i) если $v_1 = 0$ – тривиальное решение $v \equiv 0$;
- (ii) если $v_1 = -\sigma$ – нетривиальное решение, представимое в виде ряда Маклорена.

Иных классических решений задача не имеет.

Будем строить решение в виде ряда

$$v(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_k \xi^k}{k!}, \quad v_k = \left. \frac{d^k v}{d\xi^k} \right|_{\xi=0}. \quad (9)$$

Из начального условия получаем $v_0 = 0$. Подставив $\xi = 0, v(0) = 0$ в уравнение (6), находим $v_1^2/\sigma + v_1 = 0$. Отсюда следует, что либо $v_1 = 0$ и тогда получается случай (i), поскольку $v_1 = 0 = v_2 = \dots$, либо $v_1 = -\sigma$. При всех прочих значениях v_1 задача Коши оказывается несовместной, что влечет отсутствие классического решения.

Пусть далее $w_1 = -\sigma < 0$. Для нахождения w_2 продифференцируем уравнение (6) по ξ и положим $\xi = 0$. С учетом ранее найденных значений $v_0 = 0$ и $v_1 = -\sigma$, получим, что

$$-\sigma v_2 + \frac{2(-\sigma)v_2}{\sigma} + \frac{(\nu+3)\sigma+4}{\lambda\sigma}(-\sigma)^2 + v_2 - \gamma\sigma = 0.$$

Приведем подобные и выразив v_2 , имеем

$$v_2 = \frac{\sigma}{\sigma+1} \left[\frac{(\nu+3)\sigma+4}{\lambda} - \gamma \right].$$

Далее, пусть известны коэффициенты v_i при $i = 0, \dots, k$. Продифференцировав уравнение (6) k раз по ξ и положив $\xi = 0$, получаем

$$v_{k+1} = \frac{1}{1+k\sigma} \left[\sum_{i=2}^k C_k^i v_i v_{k+2-i} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^{k-1} C_k^i v_i v_{k+1-i} + \frac{(\nu+3)\sigma+4}{\lambda\sigma} \sum_{i=1}^k C_k^i v_i v_{k+1-i} + \frac{2[(\nu+1)\sigma+2]}{\lambda^2\sigma} \sum_{i=1}^{k-1} C_k^i v_i v_{k+1-i} + \gamma v_k \right]. \quad (10)$$

Можно видеть, что правая часть формулы (10) содержит полином, зависящий от переменных v_1, v_2, \dots, v_k . Если они известны, то коэффициент v_{k+1} однозначно определяется (напомним, что $\sigma > 0$). Итак, в соответствии с принципом математической индукции, формальное решение задачи (6), (8) в виде ряда (9) построено.

Сходимость ряда (9), носящая локальный характер, доказывается посредством построения мажорантной задачи, имеющей тип Ковалевской. Процедура построения не приводится из-за громоздкости.

4. Алгоритм численного решения. Выбор метода для приближенного решения задачи Коши (6), (8) обусловлен особенностью при старшей производной в точке $\xi = 0$. Используемый авторами итерационный подход (см. [6, 7, 16]) показал свою эффективность для раскрытия таких особенностей, поскольку позволяет построить непрерывно дифференцируемое решение, что в свою очередь дает возможность без дополнительных сложностей оценивать его точность. В данной работе мы используем метод коллокаций с использованием разложения по радиальным базисным функциям, подробно изложенный в [16].

Представим задачу (6), (8) в виде

$$v'' = P(v, v'), \quad \xi \in [\xi_T, 0], \quad (11)$$

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = -\sigma. \quad (12)$$

Здесь $\xi_T < 0$,

$$P(v, v') = -\frac{1}{v} \left(\frac{(v')^2}{\sigma} + v' \right) - \frac{2[(\nu + 1)\sigma + 2]}{\lambda^2 \sigma} v - \frac{(\nu + 3)\sigma + 4}{\lambda \sigma} - \gamma.$$

Для построения решения исходной задачи (3), (4) на интервале времени $t \in [0, T]$, нужно решить задачу (11), (12) при $\xi_T = \lambda \ln(a(0)/a(T))$.

Решение будем искать в виде

$$v(\xi) = p(\xi) + h(\xi),$$

где $p(\xi)$ — частное решение уравнения (11), $h(\xi)$ — единственное при известном $p(\xi)$ решение соответствующей задачи для однородного уравнения,

$$h'' = 0, \quad h(0) = -p(0), \quad h'(0) = -\sigma - p'(0).$$

Итерационный алгоритм имеет вид:

$$p_0 \equiv 0, \quad (13)$$

$$h_n = -(\sigma + p'_n(0))\xi - p_n(0), \quad (14)$$

$$v_n = p_n + h_n, \quad (15)$$

$$p''_{n+1} = P(v_n, v'_n). \quad (16)$$

Здесь v_n, p_n, h_n — n -е итерации решений. Для решения уравнения (16) используется разложение его правой части по системе радиальных базисных функций:

$$P(v_n, v'_n) = \sum_{i=1}^M c_i^{(n+1)} \phi_i(\xi), \quad (17)$$

где $\phi_i(\xi) = \phi_i(|\xi - \xi_i|)$, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M$ — точки коллокации; для каждой функции ϕ_i существует такая функция \hat{u}_i , что $f_i = \hat{u}_i''$. Коэффициенты $c_i^{(n+1)}$, $i = 1, \dots, M$, определяются из решения системы линейных алгебраических уравнений

$$P(v_n, v'_n)|_{\xi=\xi_k} = \sum_{i=1}^M c_i^{(n+1)} \phi_i(\xi_k), \quad k = 1, \dots, M. \quad (18)$$

Тогда

$$p_{n+1} = \sum_{i=1}^M c_i^{(n+1)} \hat{u}_i(\xi). \quad (19)$$

Итерационная процедура (13)–(19) останавливается при условии

$$\left| \frac{v_{n+1}(\xi_T) - v_n(\xi_T)}{v_n(\xi_T)} \right| < \varepsilon, \quad (20)$$

где ε — заданная точность.

5. Численный анализ. Вычислительный эксперимент начнем с оценки корректности предложенного алгоритма. Ввиду отсутствия тестовых решений, точность будем оценивать с помощью невязки уравнения (6) при подстановке построенного решения:

$$\delta(v) = \max_{\xi \in [\xi_T, 0]} \left| vv'' + \frac{(v')^2}{\sigma} + \frac{(\nu + 3)\sigma + 4}{\lambda\sigma} vv' + v' + \frac{2[(\nu + 1)\sigma + 2]}{\lambda^2\sigma} v^2 + \gamma v \right|. \quad (21)$$

В таблице 1 приведены значения невязки (21) при $\varepsilon = 10^{-10}$, $\sigma = 2$, $\lambda = 1$ и различных значениях параметров ν , γ , ξ_T , M . В качестве радиальных базисных функций использовались мультикватратичные функции $\phi_i(\xi) = \sqrt{1 + \varepsilon^2(\xi - \xi_i)^2}$, точки коллокации располагались равномерно внутри отрезка $[\xi_T, 0]$, параметр формы ε был принят в соответствии с [15]. Приведенные результаты расчетов демонстрируют хорошую точность решения даже при небольшом количестве точек коллокации, а также уменьшение невязки с увеличением этого количества. Отметим наблюдающуюся стабильную сходимост ь итерационных процедур.

Таблица 1. Невязки уравнения (6)

ν	γ	ξ_T	M	$\delta(v)$	ν	γ	ξ_T	M	$\delta(v)$
1	0	-0.5	20	7.3×10^{-7}	1	1	-0.5	20	8.0×10^{-7}
1	0	-0.5	50	2.7×10^{-7}	1	1	-0.5	50	3.2×10^{-7}
1	0	-1	20	7.0×10^{-5}	1	1	-1	20	5.6×10^{-5}
1	0	-1	50	1.4×10^{-5}	1	1	-1	50	2.3×10^{-5}
2	0	-0.5	20	1.7×10^{-6}	2	1	-0.5	20	9.8×10^{-7}
2	0	-0.5	50	8.5×10^{-7}	2	1	-0.5	50	7.5×10^{-7}
2	0	-1	20	8.0×10^{-5}	2	1	-1	20	7.0×10^{-5}
2	0	-1	50	2.5×10^{-5}	2	1	-1	50	4.2×10^{-5}

Большой интерес представляет качественное поведение решений задачи (11), (12), влияющее на поведение тепловых волн, удовлетворяющих уравнению (3) и условию (4). Проведенный численный анализ позволил сделать некоторые выводы, проиллюстрированные на рис. 1–3. В случае, когда $\gamma = 0$, что соответствует показательному фронту тепловой волны при $\alpha = 0$, решение монотонно и неограниченно возрастает при $\xi \rightarrow -\infty$ (графики 1, 2 на рис. 1), что позволяет построить глобальное решение задачи (3), (4). При $\gamma > 0$ решение может иметь такой же характер (графики 3, 4 на рис. 1), а может быть немонотонным и обращаться в нуль в некоторой точке $\xi = \xi_0 < 0$ (рис. 2). Такое решение соответствует тепловой волне типа солитона; при этом задача (3), (4) имеет решение в исходной постановке лишь на ограниченном промежутке времени $t \in [0, T]$, где

$$T = a^{-1}(a(0)e^{-\xi_0/\lambda}).$$

Отметим, что немонотонное решение в некоторых случаях имеет выраженный перегиб внутри отрезка $[\xi_0, 0]$ (графики 2, 4 на рис. 2). Ранее при исследовании подобных задач такое поведение решений не наблюдалось.

В завершение численного анализа был рассмотрен вопрос возможности построения непрерывного (но, разумеется, не классического) решения уравнения (11) при нулевых начальных условиях

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0. \quad (22)$$

Вычислительный эксперимент показал, что предложенный алгоритм (13)–(19) сходится в этом случае к нетривиальному решению, если принять ненулевое начальное приближение в (13): $p_0 = \phi_M(\xi)$, где функция $\phi_M(\xi)$ соответствует ближайшей к нулю точке коллокации ξ_M . Построенные решения приведены на рис. 3. На рис. ?? и 5 показаны первые и вторые производные полученных решений, соответственно. По построению они являются гладкими, однако графики показывают, что производные решения аппроксимируют излом первой производной, а также разрыв второй производной, которые имеют место вблизи нуля.

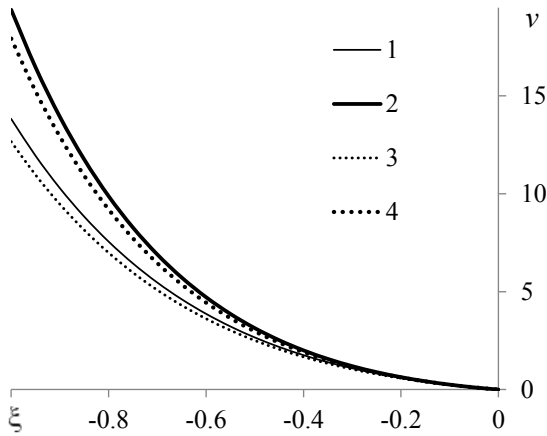


Рис. 1. Монотонные решения задачи (11), (12) при $\lambda = 1$, $\sigma = 2$: **1** — $\nu = 1$, $\gamma = 0$; **2** — $\nu = 2$, $\gamma = 0$; **3** — $\nu = 1$, $\gamma = 1$; **4** — $\nu = 2$, $\gamma = 1$.

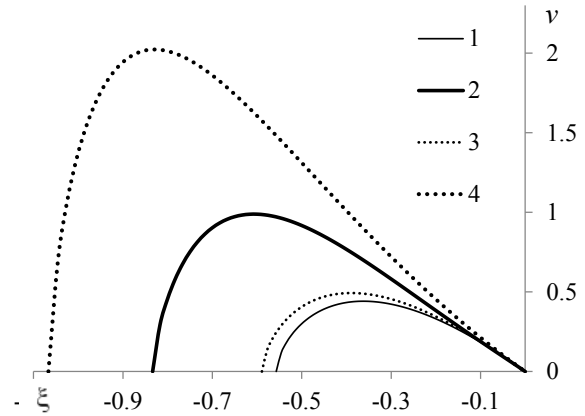


Рис. 2. Немонотонные решения задачи (11), (12) при $\sigma = 2$, $\gamma = 10$: **1** — $\nu = 1$, $\lambda = 2$; **2** — $\nu = 1$, $\lambda = 1$; **3** — $\nu = 2$, $\lambda = 2$; **4** — $\nu = 2$, $\lambda = 1$.

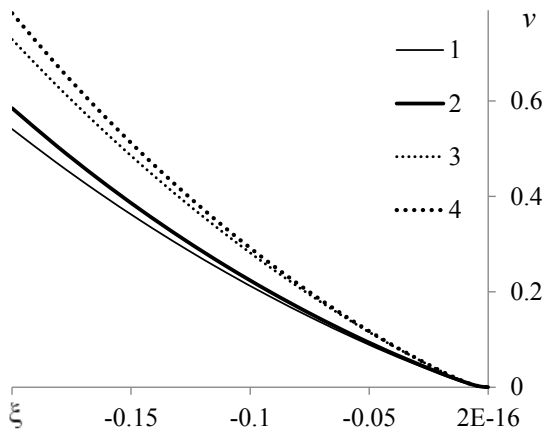


Рис. 3. Нетривиальные решения задачи (11), (22): **1** — $\sigma = 2$, $\nu = 1$, $\lambda = 1$, $\gamma = 0$; **2** — $\sigma = 2$, $\nu = 2$, $\lambda = 1$, $\gamma = 0$; **3** — $\sigma = 3$, $\nu = 1$, $\lambda = 1$, $\gamma = 0,5$; **4** — $\sigma = 3$, $\nu = 2$, $\lambda = 1$, $\gamma = 0,5$.

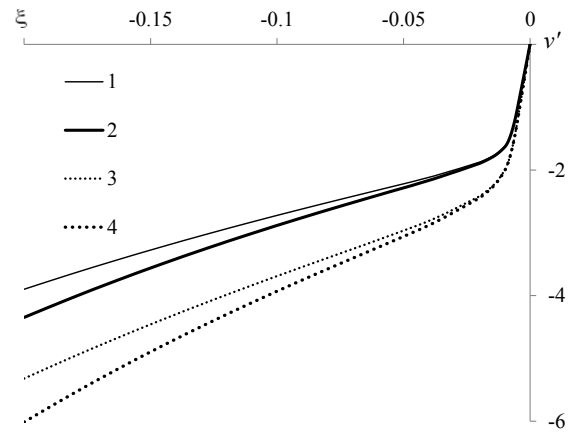


Рис. 4. Первые производные решений задачи (11), (22): **1** — $\sigma = 2$, $\nu = 1$, $\lambda = 1$, $\gamma = 0$; **2** — $\sigma = 2$, $\nu = 2$, $\lambda = 1$, $\gamma = 0$; **3** — $\sigma = 3$, $\nu = 1$, $\lambda = 1$, $\gamma = 0,5$; **4** — $\sigma = 3$, $\nu = 2$, $\lambda = 1$, $\gamma = 0,5$.

Таким образом, используемый авторами подход к построению численных решений задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, к которому сводится нахождение точных решений вырождающегося нелинейного уравнения теплопроводности, показал свою эффективность. Несмотря на особенность при старшей производной у ОДУ, наблюдается стабильная сходимость итерационного процесса, а также повышение точности решения с увеличением числа точек коллокации. Особо стоит отметить возможность построения нетривиального решения задачи (11), (22) с нулевыми условиями Коши.

6. Заключение. В работе исследована задача Коши для ОДУ, к которой сводится построение решений с нулевым фронтом для многомерного нелинейного параболического уравнения теплопроводности. Доказана новая теорема существования аналитических решений указанной задачи

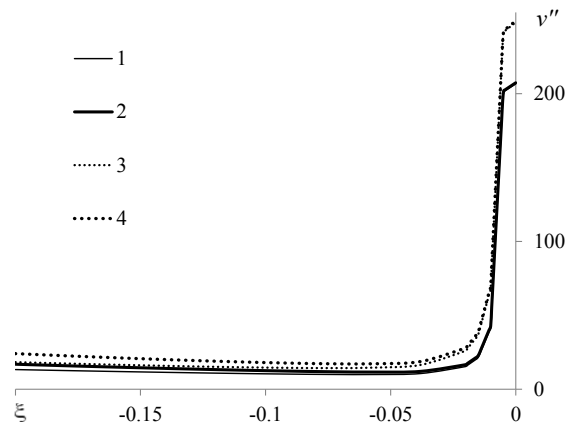


Рис. 5. Вторые производные решений задачи (11), (22): **1** — $\sigma = 2$, $\nu = 1$, $\lambda = 1$, $\gamma = 0$; **2** — $\sigma = 2$, $\nu = 2$, $\lambda = 1$, $\gamma = 0$; **3** — $\sigma = 3$, $\nu = 1$, $\lambda = 1$, $\gamma = 0,5$; **4** — $\sigma = 3$, $\nu = 2$, $\lambda = 1$, $\gamma = 0,5$.

и решения построены в виде рядов Маклорена. Показано, что имеется два аналитических решения: тривиальное и нетривиальное, и других классических (гладкости два и более) решений у данной задачи не существует.

С помощью алгоритма численного решения, основанного на применении метода коллокаций и радиальных базисных функций, проведен численный анализ решений. Установлена стабильная сходимость итерационного процесса, а также удовлетворительная точность, повышающаяся с увеличением числа точек коллокации. Сделаны некоторые выводы о характере поведения решений. В частности, описаны случаи, когда решение ОДУ является монотонным и существует глобальное решение исходной задачи, и примеры, когда решение ОДУ имеет максимум и решение исходной задачи существует на конечном промежутке времени. Также показана возможность построения нетривиального решения при нулевом начальном значении производной, когда классического решения, в соответствии с доказанной теоремой, заведомо не существует.

Полученные результаты могут быть использованы для верификации алгоритмов численного решения нелинейного уравнения теплопроводности. Логика дальнейших исследований предполагает проведение анализа рассмотренного уравнения методами качественной теории дифференциальных уравнений и сопоставление полученных результатов с численными расчетами, а также поиск и изучение других новых классов точных решений многомерного нелинейного уравнения теплопроводности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баренблатт Г. И., Ентов В. Н., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. — М.: Недра, 1984.
2. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — М.: Физматлит, 1966.
3. Казаков А. Л. О точных решениях краевой задачи о движении тепловой волны для уравнения нелинейной теплопроводности// Сиб. электрон. мат. изв. — 2019. — 16. — С. 1057–1068.
4. Казаков А. Л., Орлов С. С. О некоторых точных решениях нелинейного уравнения теплопроводности// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2016. — 22, № 1. — С. 112–123.
5. Казаков А. Л., Орлов С. С., Орлов С. С. Построение и исследование некоторых точных решений нелинейного уравнения теплопроводности// Сиб. мат. ж. — 2018. — 59, № 3. — С. 544–560.
6. Казаков А. Л., Нефедова О. А., Спесак Л. Ф. Решение задач об иницировании тепловой волны для нелинейного уравнения теплопроводности методом граничных элементов// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2019. — 16. — С. 1057–1068.

7. Казаков А. Л., Нефедова О. А., Спевак Л. Ф., Спевак Л. Ф. О численных методах построения эталонных решений для нелинейного уравнения теплопроводности с особенностью// *Diagn. Res. Mech. Mater. Struct.* — 2020. — № 5. — С. 26–44.
8. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.
9. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. — М.: Наука, 1987.
10. Сидоров А. Ф. Избранные труды: Математика. Механика. — М.: Физматлит, 2001.
11. *Buhmann M. D. Radial basis functions.* — Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
12. *Chen C. S., Chen W., Fu Z. J. Recent Advances in Radial Basis Function Collocation Method.* — Berlin/Heidelberg: Springer, 2013.
13. *Courant R., Hilbert D. Methods of Mathematical Physics. Vol. II: Partial Differential Equations.* — New York: Interscience, 2008.
14. *Fornberg B., Flyer N. Solving PDEs with radial basis functions// Acta Num.* — 2015. — 24. — P. 215–258.
15. *Kansa E. J. Multiquadrics—A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—II solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations// Comput. Math. Appl.* — 1990. — 19, № 8-9. — P. 147–161.
16. *Kazakov A. L., Spevak L. F. Constructing exact and approximate diffusion wave solutions for a quasilinear parabolic equation with power nonlinearities// Mathematics.* — 2022. — 10. — 1559.
17. *Vazquez H. L. The Porous Medium Equation: Mathematical Theory.* — Oxford: Clarendon Press, 2007.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Казаков Александр Леонидович (Kazakov Aleksandr Leonidovich)
 Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова
 Сибирского отделения РАН, Иркутск;
 Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова
 Уральского отделения РАН, Екатеринбург
 (V. M. Matrosov Institute of System Dynamics and Control Theory
 of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia;
 E. S. Gorkunov Institute of Engineering Science
 of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia)
 E-mail: kazakov@icc.ru

Спевак Лев Фридрихович (Spevak Lev Fridrihovich)
 Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова
 Уральского отделения РАН, Екатеринбург
 (E. S. Gorkunov Institute of Engineering Science
 of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia)
 E-mail: lfs@imach.uran.ru