ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 234 (2024). С. 67–74
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-234-67-74

УДК 519.1, 511.334

КОМПОЗИЦИИ ЧИСЕЛ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ И ИЕРАРХИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ ПИРАМИДЫ ПАСКАЛЯ

© 2024 г. **О. В. КУЗЬМИН, М. В. СТРИХАРЬ**

Аннотация. Изучаются композиции натуральных чисел с ограничениями на значения натуральных частей и их взаимосвязь с комбинаторными объектами иерархической структуры. Выведена формула для подсчета числа таких композиций с тремя ограничениями на основе сумм элементов плоских сечений пирамиды Паскаля. Получены рекуррентные соотношения и производящие функции числа композиций и рассмотрены некоторые наиболее важные частные случаи на примере известных комбинаторных чисел.

Ключевые слова: композиция числа, иерархическая структура, пирамида Паскаля, треугольник Паскаля, рекуррентное соотношение, производящая функция, числа Трибоначчи, числа Фибоначчи.

COMPOSITION OF NUMBERS WITH CONSTRAINTS AND THE HIERARCHICAL STRUCTURE OF PLANAR SECTIONS OF PASCAL'S PYRAMID

© 2024 **O. V. KUZMIN, M. V. STRIKHAR**

Abstract. In this paper, we examine compositions of natural numbers with constraints on natural parts and their relationship with hierarchical combinatorial objects. We derive a formula for calculating the number of such compositions with three constraints based on the sums of elements of planar sections of Pascal's pyramid. Also, we obtain recurrence relations and generating functions for the numbers of compositions and examine some important special cases for well-known combinatorial numbers.

Keywords and phrases: composition of number, hierarchical structure, Pascal's pyramid, Pascal's triangle, recurrence relation, generating function, Tribonacci numbers, Fibonacci numbers.

AMS Subject Classification: 05A05, 11B75, 11P81

1. Введение. В комбинаторике и теории чисел композицией натурального числа называется его представление в виде упорядоченной суммы других натуральных чисел (см. [5]). Например, существует 16 композиций числа 5:

$$\begin{aligned}5 &= 5 = 4+1 = 1+4 = 3+2 = 2+3 = \\ &= 3+1+1 = 1+3+1 = 1+1+3 = 2+2+1 = 2+1+2 = 1+2+2 = \\ &= 2+1+1+1 = 1+2+1+1 = 1+1+2+1 = 1+1+1+2 = 1+1+1+1+1.\end{aligned}$$

Слагаемые, входящие в композицию, называются частями, а их количество — длиной композиции. Если ограничений на величину частей нет, то для числа n существует 2^{n-1} композиций, из которых $\binom{n-1}{k-1}$ композиций имеют длину k, где числа $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ — биномиальные коэффициенты, т.е. коэффициенты разложения бинома

$$(x_0 + x_1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_0^k x_1^{n-k}.$$

В данной работе будем рассматривать композиции натурального числа m с ограничениями на значения натуральных частей m_1, m_2 и m_3, где $m_1 < m_2 < m_3$, т.е. любое слагаемое исследуемой композиции является либо числом m_1, либо числом m_2, либо числом m_3, которые, для определенности в дальнейшем, образуют упорядоченное множество натуральных чисел.

Например, существует 13 композиций числа $m = 5$ с ограничениями на значения натуральных частей $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ и $m_3 = 3$:

$$\begin{aligned}
5 &= 3+2 = 2+3 = \\
&= 3+1+1 = 1+3+1 = 1+1+3 = 2+2+1 = 2+1+2 = 1+2+2 = \\
&= 2+1+1+1 = 1+2+1+1 = 1+1+2+1 = 1+1+1+2 = 1+1+1+1+1.
\end{aligned}$$

Не умаляя общности рассматриваемых случаев, далее положим, что наибольший общий делитель чисел m_1, m_2 и m_3 равен 1: $\gcd(m_1, m_2, m_3) = 1$. В противном случае, если $\gcd(m_1, m_2, m_3) = \mu \neq 1$, то рассматриваемые композиции числа m будут существовать только в случае $m = \mu k$, $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, и число таких композиций будет совпадать с числом композиций числа k с ограничениями на значения натуральных частей m_1/μ, m_2/μ и m_3/μ, где $\gcd(m_1/\mu, m_2/\mu, m_3/\mu) = 1$.

2. Пирамида и треугольник Паскаля. Пирамидой Паскаля (см. [3]) называется бесконечная иерархическая трехгранная пирамидальная структура, элементы которой для целых неотрицательных n, k, l удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\binom{n+1}{k,\ l} = \binom{n}{k-1,\ l} + \binom{n}{k,\ l-1} + \binom{n}{k,\ l},$$

с граничными условиями

$$\binom{0}{0,\ 0} = 1; \quad \binom{n}{k,\ l} = 0, \text{ если } \min(n, k, l, n-k-l) < 0.$$

В n-м сечении (треугольнике) пирамиды ($n = 0, 1, 2, \dots$), параллельном основанию, располагаются триномиальные коэффициенты

$$\binom{n}{k,\ l} = \frac{n!}{k!\,l!\,(n-k-l)!}$$

— коэффициенты разложения тринома в форме

$$(x_0 + x_1 + x_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n}{k,\ l} x_0^k x_1^l x_2^{n-k-l}.$$

Рекуррентные соотношения позволяют сделать вывод о том, что любой внутренний элемент пирамиды Паскаля, стоящий в n-м сечении, равен сумме трех элементов, расположенных в углах элементарного треугольника $(n-1)$-го сечения пирамиды.

Триномиальные коэффициенты удовлетворяют условиям

$$\binom{n}{0,\ 0} = \binom{n}{n,\ 0} = \binom{n}{0,\ n} = 1$$

и равенствам

$$\binom{n}{k,\ l} = \binom{n}{l,\ k} = \binom{n}{n-k-l,\ l} = \binom{n}{k,\ n-k-l},$$

подтверждающим наличие трех осей симметрии в пирамиде Паскаля.

Важным частным случаем пирамиды Паскаля является треугольник Паскаля, определяемый, как бесконечная иерархическая треугольная структура, элементы которой для целых неотрицательных n, k удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

с начальными условиями

$$\binom{0}{0} = 1; \quad \binom{n}{k} = 0, \text{ если } \min(n,k,n-k) < 0.$$

Биномиальные коэффициенты удовлетворяют граничным условиям

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

и равенству (правилу симметрии)

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

подтверждающему наличие оси симметрии в треугольнике Паскаля.

3. Плоские сечения пирамиды Паскаля. Пирамиду Паскаля можно строить в форме тетраэдра, а также пирамиды с различными значениями двухгранных углов, один из которых прямой. Для удобства дальнейшего изложения, совместим вершину пирамиды Паскаля с началом прямоугольной декартовой системы координат в пространстве, а ее элементы — с точками решетки первого октанта, имеющими неотрицательные координаты. При этом числа n расположим по оси абсцисс (Ox), k — по оси ординат (Oy), l — по оси аппликат (Oz). Тем самым устанавливается соответствие между точками решетки и элементами пирамиды Паскаля, которая ограничена плоскостями $k=0$, $n=0$ и $n-k-l=0$.

Рассмотрим произвольное плоское сечение (см. [4]) пирамиды Паскаля, представляющее собой некоторый треугольник. Обозначим углы, образованные этим сечением с осями ординат и аппликат, через ϕ_1 и ϕ_2 соответственно. Тогда уравнение сечения будет иметь вид:

$$n + \operatorname{tg}\phi_1 \cdot k + \operatorname{tg}\phi_2 \cdot l = \mathrm{const}\,.$$

Пронумеруем все параллельные между собою сечения пирамиды Паскаля, заданные таким уравнением, начиная от вершины пирамиды, и рассмотрим последовательность $\{S_m(\operatorname{tg}\phi_1, \operatorname{tg}\phi_2)\}$, $m \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,\dots\}$ сумм элементов этих сечений.

Пусть

$$\operatorname{tg}\phi_1 = \frac{m_1}{m_3} - 1, \quad \operatorname{tg}\phi_2 = \frac{m_2}{m_3} - 1,$$

где $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{N}$, $m_1 < m_2 < m_3$, $\gcd(m_1,m_2,m_3) = 1$. В этом случае $\operatorname{tg}\phi_1 > -1$, $\operatorname{tg}\phi_2 > -1$, поэтому треугольник сечения конечен, и уравнение m-го плоского сечения пирамиды Паскаля принимает вид:

$$n + \left(\frac{m_1}{m_3} - 1\right) k + \left(\frac{m_2}{m_3} - 1\right) l = \frac{m}{m_3}. \tag{1}$$

Рассмотрим сумму

$$S_m\left(\frac{m_1}{m_3} - 1, \frac{m_2}{m_3} - 1\right), \quad m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{N}, \quad m_1 < m_2 < m_3, \quad \gcd(m_1,m_2,m_3) = 1,$$

элементов m-го плоского сечения пирамиды Паскаля.

Теорема 1. *Сумма элементов m-го плоского сечения пирамиды Паскаля с параметрами $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{N}$, $m_1 < m_2 < m_3$, $\gcd(m_1,m_2,m_3) = 1$, определяется по формуле*

$$S_m\left(\frac{m_1}{m_3} - 1, \frac{m_2}{m_3} - 1\right) = \sum_{i=0}^{[m/m_1]} \sum_{j=0}^{[m/m_2 - i]} \left(\begin{array}{c} \frac{m}{m_3} - \left(\frac{m_1}{m_3} - 1\right) i - \left(\frac{m_2}{m_3} - 1\right) j \\ i,\ j \end{array} \right), \quad m \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Доказательство. Действительно, все слагаемые указанного вида удовлетворяют уравнению плоскости (1), так как

$$\frac{m}{m_3} - \left(\frac{m_1}{m_3} - 1\right) i - \left(\frac{m_2}{m_3} - 1\right) j + \left(\frac{m_1}{m_3} - 1\right) k + \left(\frac{m_2}{m_3} - 1\right) l = \frac{m}{m_3}.$$

Никаких других элементов пирамиды Паскаля в этой плоскости нет, рассмотрены все возможные целые неотрицательные значения величин i и j, которые являются соответственно ординатами и аппликатами элементов пирамиды Паскаля, расположенных в узлах целочисленной решетки первого октанта.

Поскольку пирамида Паскаля ограничена плоскостями $k = 0$, $n = 0$ и $n - k - l = 0$, то точки пересечения этих плоскостей с плоскостью сечения (1) определяют вершины треугольника, а именно элементы

$$\binom{m/m_3}{0,\ 0}, \quad \binom{m/m_2}{0,\ m/m_2}, \quad \binom{m/m_1}{m/m_1,\ 0},$$

которые, в свою очередь, задают верхние и нижние пределы суммирования. Следовательно, сумма элементов m-го плоского сечения пирамиды Паскаля определяется по формуле (2). □

4. Число композиций с тремя ограничениями.

Теорема 2. *Число различных композиций натурального числа m с ограничениями на значения натуральных частей m_1, m_2 и m_3, где $< m_1 < m_2 < m_3$, $\gcd(m_1, m_2, m_3) = 1$, равно сумме элементов m-го плоского сечения пирамиды Паскаля вида* (2).

Доказательство. Обозначим через $x_{i,j}$ количество различных композиций числа m, состоящих из i частей вида m_1, j частей вида m_2 и $(m - m_1 i - m_2 j)/m_3$ частей вида m_3:

$$m = \underbrace{m_1 + m_1 + \cdots + m_1}_{i} + \underbrace{m_2 + m_2 + \cdots + m_2}_{j} + \underbrace{m_3 + m_3 + \cdots + m_3}_{(m - m_1 i - m_2 j)/m_3}.$$

Поскольку длины таких композиций будут равны

$$i + j + \frac{m - m_1 i - m_2 j}{m_3} = \frac{m}{m_3} - \left(\frac{m_1}{m_3} - 1\right) i - \left(\frac{m_2}{m_3} - 1\right) j,$$

имеем

$$x_{i,j} = \frac{\left(\frac{m}{m_3} - \left(\frac{m_1}{m_3} - 1\right) i - \left(\frac{m_2}{m_3} - 1\right) j\right)!}{i!j!\left(\frac{m}{m_3} - \frac{m_1}{m_3} i - \frac{m_2}{m_3} j\right)!} = \binom{\frac{m}{m_3} - \left(\frac{m_1}{m_3} - 1\right) i - \left(\frac{m_2}{m_3} - 1\right) j}{i,\, j}.$$

Таким образом, общее число различных композиций натурального числа m с ограничениями на значения натуральных частей m_1, m_2 и m_3 равно

$$\sum_{i=0}^{[m/m_1]} \sum_{j=0}^{[m/m_2 - i]} x_{i,j} = \sum_{i=0}^{[m/m_1]} \sum_{j=0}^{[m/m_2 - i]} \binom{\frac{m}{m_3} - \left(\frac{m_1}{m_3} - 1\right) i - \left(\frac{m_2}{m_3} - 1\right) j}{i,\, j} = S_m\left(\frac{m_1}{m_3} - 1, \frac{m_2}{m_3} - 1\right),$$

что и требовалось доказать. □

Замечание. Определим случай композиции числа $m = 0$. Для любых натуральных значений m_1, m_2 и m_3, при условии, что $m_1 < m_2 < m_3$, $\gcd(m_1, m_2, m_3) = 1$, имеем

$$S_0 = \binom{0}{0,\ 0} = 1.$$

Это число соответствует вершине пирамиды Паскаля и будет играть большую роль в нахождении рекуррентных соотношений и формальной производящей функции для числа композиций натурального числа m с ограничениями на значения натуральных частей m_1, m_2 и m_3. Поэтому далее берем значения m из множества неотрицательных целых чисел, т.е. считаем, что

$$m \in \mathbb{N}_0.$$

5. Рекуррентное соотношение. Введем обозначение $S_m = S_m\left(\frac{m_1}{m_3}-1, \frac{m_2}{m_3}-1\right)$ и рассмотрим последовательность $\{S_m\}$, $m \in \mathbb{N}_0$, композиций натурального числа m с ограничениями на значения натуральных частей m_1, m_2 и m_3, где $m_1 < m_2 < m_3$, $\gcd(m_1, m_2, m_3) = 1$.

Теорема 3. *Последовательность чисел $\{S_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, удовлетворяет рекуррентному соотношению*

$$S_m = S_{m-m_1} + S_{m-m_2} + S_{m-m_3} \tag{3}$$

с начальными условиями

$$S_0 = 1, \quad S_1 = S_2 = \dots = S_{m_1-1} = 0; \tag{4}$$

числа S_m при $m = m_1, \dots, m_{m_2-1}$ задаются соотношениями

$$S_m = S_{m-m_1}; \tag{5}$$

числа S_m при $m = m_2, \dots, m_{m_3-1}$ задаются соотношениями

$$S_m = S_{m-m_1} + S_{m-m_2}. \tag{6}$$

Доказательство. Действительно, имеются только три возможности для того, чтобы составить композицию числа m из частей m_1, m_2 и m_3. В первом случае можно сначала составить композицию числа $(m - m_1)$ при помощи чисел m_1, m_2 и m_3, а затем добавить в сумму справа число m_1. Во втором случае можно сначала составить композицию числа $(m - m_2)$ при помощи чисел m_1, m_2 и m_3, а затем добавить в сумму справа число m_2. В третьем случае можно сначала составить композицию числа $(m - m_3)$ при помощи чисел m_1, m_2 и m_3, а затем добавить в сумму справа число m_3. Указанные возможности и образуют рекуррентное соотношение (3).

Если $0 < m < m_1 - 1$, то не существует ни одной композиции числа m, составленной из частей m_1, m_2 и m_3. Таким образом, получаем начальные условия (4). При $m = 0$ имеем $S_0 = 1$.

Если $m_1 \leqslant m < m_2 - 1$, то существует ровно столько композиций числа m, сколько существует композиций числа $m - m_1$. Получили соотношение (5).

Если $m_2 \leqslant m < m_3 - 1$, то можно составить композицию числа m только из частей m_1 и m_2. В данном случае имеется только две возможности сделать это. В первом случае можно сначала составить композицию числа $(m - m_1)$ при помощи чисел m_1 и m_2, а затем добавить в сумму справа число m_1. Во втором случае можно сначала составить композицию числа $(m - m_2)$ при помощи чисел m_1 и m_2, а затем добавить в сумму справа число m_2. Указанные возможности и образуют рекуррентную формулу (6). □

В силу симметрии пирамиды Паскаля из теоремы 3 получаем следующее утверждение.

Следствие. *Для натуральных чисел m_1, m_2 и m_3, $m_1 < m_2 < m_3$, $\gcd(m_1, m_2, m_3) = 1$, справедливы равенства*

$$\begin{aligned} S_m\left(\frac{m_1}{m_3}-1, \frac{m_2}{m_3}-1\right) &= S_m\left(\frac{m_2}{m_3}-1, \frac{m_1}{m_3}-1\right) = S_m\left(\frac{m_1}{m_2}-1, \frac{m_3}{m_2}-1\right) = \\ &= S_m\left(\frac{m_3}{m_2}-1, \frac{m_1}{m_2}-1\right) = S_m\left(\frac{m_2}{m_1}-1, \frac{m_3}{m_1}-1\right) = S_m\left(\frac{m_3}{m_1}-1, \frac{m_2}{m_1}-1\right). \end{aligned} \tag{7}$$

6. Производящая функция. Поставим в соответствие последовательности сумм $\{S_m\}$, $m \in \mathbb{N}_0$, формальный степенной ряд и запишем производящую функцию для этих сумм.

Теорема 4. *Производящая функция сумм $\{S_m\}$, $m \in \mathbb{N}_0$, имеет вид*

$$F_S(x) = \frac{1}{1 - x^{m_1} - x^{m_2} - x^{m_3}}. \tag{8}$$

Доказательство. В силу теоремы 3 последовательность сумм $\{S_m\}$, $m \in \mathbb{N}_0$, удовлетворяет рекуррентным соотношениям (3)–(6). Перепишем рекуррентное соотношение (3) в виде

$$S_{m+m_3} = S_{m+m_3-m_1} + S_{m+m_3-m_2} + S_m.$$

Умножив его почленно на x^{m+m_3} и просуммировав по m в пределах от нуля до бесконечности, получаем

$$\sum_{m=0}^{\infty} S_{m+m_3}x^{m+m_3} = x^{m_1}\sum_{m=0}^{\infty} S_{m+m_3-m_1}x^{m+m_3-m_1} + \\ + x^{m_2}\sum_{m=0}^{\infty} S_{m+m_3-m_2}x^{m+m_3-m_2} + x^{m_3}\sum_{m=0}^{\infty} S_m x^m.$$

Пусть

$$F_S(x) = \sum_{m=0}^{\infty} S_m x^m;$$

тогда из предыдущего равенства имеем

$$F_S(x) - \sum_{m=0}^{m_3-1} S_m x^m = x^{m_1}\left(F_S(x) - \sum_{m=0}^{m_3-m_1-1} S_m x^m\right) + \\ + x^{m_2}\left(F_S(x) - \sum_{m=0}^{m_3-m_2-1} S_m x^m\right) + x^{m_3}F_S(x).$$

Раскрывая скобки, получаем

$$F_S(x) - \sum_{m=0}^{m_3-1} S_m x^m = x^{m_1}F_S(x) - x^{m_1}\sum_{m=0}^{m_3-m_1-1} S_m x^m + \\ + x^{m_2}F_S(x) - x^{m_2}\sum_{m=0}^{m_3-m_2-1} S_m x^m + x^{m_3}F_S(x),$$

$$F_S(x) - x^{m_1}F_S(x) - x^{m_2}F_S(x) - x^{m_3}F_S(x) = \\ = \sum_{m=0}^{m_3-1} S_m x^m - x^{m_1}\sum_{m=0}^{m_3-m_1-1} S_m x^m - x^{m_2}\sum_{m=0}^{m_3-m_2-1} S_m x^m.$$

Преобразуем отдельно правую часть равенства, учитывая начальные условия (4) и рекуррентные соотношения (5) и (6):

$$\sum_{m=0}^{m_3-1} S_m x^m - x^{m_1}\sum_{m=0}^{m_3-m_1-1} S_m x^m - x^{m_2}\sum_{m=0}^{m_3-m_2-1} S_m x^m = \\ = \left(S_0 + \sum_{m=1}^{m_1-1} S_m x^m + \sum_{m=m_1}^{m_2-1} S_m x^m + \sum_{m=m_2}^{m_3-1} S_m x^m\right) - x^{m_1}\left(\sum_{m=0}^{m_2-m_1-1} S_m x^m + \sum_{m=m_2-m_1}^{m_3-m_1-1} S_m x^m\right) - \\ - x^{m_2}\sum_{m=0}^{m_3-m_2-1} S_m x^m = 1 + 0 + \sum_{m=m_1}^{m_2-1} S_m x^m + \sum_{m=m_2}^{m_3-1} S_m x^m - \sum_{m=0}^{m_2-m_1-1} S_m x^{m+m_1} - \\ - \sum_{m=m_2-m_1}^{m_3-m_1-1} S_m x^{m+m_1} - \sum_{m=0}^{m_3-m_2-1} S_m x^{m+m_2} = 1 + \sum_{m=m_1}^{m_2-1} S_m x^m + \sum_{m=m_2}^{m_3-1} S_m x^m - \\ - \sum_{m=m_1}^{m_2-1} S_{m-m_1} x^m - \sum_{m=m_2}^{m_3-1} S_{m-m_1} x^m - \sum_{m=m_2}^{m_3-1} S_{m-m_2} x^m =$$

$$= 1 + \sum_{m=m_1}^{m_2-1} (S_m - S_{m-m_1})\, x^m + \sum_{m=m_2}^{m_3-1} (S_m - S_{m-m_1} - S_{m-m_2})\, x^m =$$

$$= 1 + \sum_{m=m_1}^{m_2-1} 0 \cdot x^m + \sum_{m=m_2}^{m_3-1} 0 \cdot x^m = 1.$$

Следовательно,

$$F_S(x)\,(1 - x^{m_1} - x^{m_2} - x^{m_3}) = 1, \quad F_S(x) = \frac{1}{1 - x^{m_1} - x^{m_2} - x^{m_3}},$$

что и требовалось доказать. □

7. Числа Трибоначчи. Рассмотрим последовательность композиций числа m с ограничениями на значения натуральных частей $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ и $m_3 = 3$.

При $m = 1$ получаем одну композицию: $m = 1$.

При $m = 2$ получаем две композиции: $m = 1 + 1 = 2$.

При $m = 3$ получаем четыре композиции: $m = 1 + 1 + 1 = 1 + 2 = 2 + 1 = 3$.

При $m = 4$ получаем семь композиций: $m = 1+1+1+1 = 1+1+2 = 1+2+1 = 2+1+1 = 2+2 = 1 + 3 = 3 + 1$.

В итоге, учитывая, что $S_0 = 1$, образуется последовательность 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, …, сумм вида $S_m(-2/3, -1/3)$, $m \in \mathbb{N}_0$, плоских сечений пирамиды Паскаля при

$$\operatorname{tg}\phi_1 = -\frac{2}{3}, \operatorname{tg}\phi_2 = -\frac{1}{3}.$$

В силу (7) справедливы равенства

$$S_m\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) = S_m\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) = S_m\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = S_m\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = S_m(1, 2) = S_m(2, 1).$$

Число композиций в данном случае согласно (2) может быть вычислено, например, по формуле

$$S_m = S_m\,(1, 2) = \sum_{i=0}^{[m/2]} \sum_{j=0}^{[m/3-i]} \binom{m - i - 2j}{i,\ j},$$

и удовлетворяет, исходя из (3)–(6), рекуррентному соотношению

$$S_m = S_{m-1} + S_{m-2} + S_{m-3}, \quad S_0 = S_1 = 1, \quad S_2 = 2.$$

Заметим, что полученная последовательность композиций числа m совпадает с последовательностью чисел Трибоначчи (см. [3]), определяемой при помощи рекуррентного соотношения

$$t_{m+3} = t_{m+2} + t_{m+1} + t_m, \quad t_0 = t_1 = 0, \quad t_2 = 1;$$

при этом $S_m = t_{m+2}$. Производящая функция рассматриваемой последовательности, исходя из (8), имеет вид

$$F_S(x) = \frac{1}{1 - x - x^2 - x^3}.$$

8. Числа Фибоначчи. Если уменьшить количество ограничений до двух, то переходим в область треугольника Паскаля. Рассмотрим, например, последовательность композиций числа m с ограничениями на значения натуральных частей $m_1 = 1$ и $m_2 = 2$.

При $m = 1$ получаем одну композицию: $m = 1$.

При $m = 2$ получаем две композиции: $m = 1 + 1 = 2$.

При $m = 3$ получаем три композиции: $m = 1 + 1 + 1 = 1 + 2 = 2 + 1$.

При $m = 4$ получаем пять композиций: $m = 1+1+1+1 = 1+1+2 = 1+2+1 = 2+1+1 = 2+2$.

В итоге, учитывая, что $S_0 = 1$, образуется последовательность 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, …, сумм вида $S_m(-1/2)$, $m \in \mathbb{N}_0$, расположенных в сечениях треугольника Паскаля при

$\operatorname{tg}\phi = -1/2$. Поскольку, в силу симметрии треугольника Паскаля, $S_m(-1/2) = S_m(1)$, то число композиций в данном случае может быть вычислено по формуле

$$S_m = S_m(1) = \sum_{i=0}^{[m/2]} \binom{m-i}{i}$$

и удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$S_m = S_{m-1} + S_{m-2}, \quad S_0 = S_1 = 1.$$

Заметим, что эта последовательность совпадает с последовательностью чисел Фибоначчи (см. [3]):

$$f_m = f_{m-1} + f_{m-2}, \quad f_0 = 0, \quad f_1 = 1;$$

при этом $S_m = f_{m+1}$. Производящая функция рассматриваемой последовательности имеет вид

$$F_S(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}.$$

Полученные в данной работе соотношения достаточно легко обобщаются на случай n ограничений, что позволяет совершенствовать известные алгоритмы перечисления композиций (см. [1,2]) или строить новые, вычислять длины и количество композиций чисел фиксированной длины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бородин А. В., Бирюков Е. С.* О практической реализации некоторых алгоритмов, связанных с проблемой композиции чисел// Киберн. програм. — 2015. — № 1. — С. 27–45.
2. *Кручинин В. В.* Алгоритмы генерации и нумерации композиций и разбиений натурального числа n// Докл. Томск. гос. ун-та сист. управл. радиоэлектр. — 2008. — *17*, № 3. — С. 113–119.
3. *Кузьмин О. В.* Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения. — Новосибирск: Наука, 2000.
4. *Кузьмин О. В., Серегина М. В.* Плоские сечения обобщенной пирамиды Паскаля и их интерпретации// Дискр. мат. — 2010. — *22*, № 3. — С. 83–93.
5. *Эндрюс Г.* Теория разбиений. — Москва: Наука, 1982.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Кузьмин Олег Викторович (Kuz'min Oleg Viktorovich)
Иркутский государственный университет
(Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)
E-mail: `quzminov@mail.ru`

Стрихарь Марина Валерьевна (Strihar Marina Valerievna)
Забайкальский институт железнодорожного транспорта, Чита;
Иркутский государственный университет путей сообщения
(Transbaikal Institute of Railway Transport, Chita, Russia;
Irkutsk State University of Railway Engineering, Irkutsk, Russia)
E-mail: `mseryogina@mail.ru`