ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 234 (2024). С. 83–90
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-234-83-90

УДК 519.642.5

ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ ВХОДНОГО СИГНАЛА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, МОДЕЛИРУЕМЫХ ПОЛИНОМАМИ ВОЛЬТЕРРА

© 2024 г. С. В. СОЛОДУША, Ю. И. КОКОНОВА

Аннотация. Рассматривается один класс уравнений Вольтерра I рода, возникающих в задаче идентификации входного сигнала динамической системы. Изложен подход к приближенному решению полиномиальных уравнений Вольтерра, возникающих при моделировании нелинейной динамики аппаратом интегро-степенных рядов Вольтерра. Предложен способ построения численного решения с помощью итерационного процесса Ньютона—Канторовича. На основе стандартных квадратурных методов и метода интегрирования произведения получены расчетные формулы.

Ключевые слова: идентификация, нестационарная динамическая система, полиномиальное уравнение Вольтерра I рода, метод Ньютона—Канторовича.

THE PROBLEM OF IDENTIFYING THE INPUT SIGNAL OF DYNAMIC SYSTEMS MODELED BY VOLTERRA POLYNOMIALS

© 2024 S. V. SOLODUSHA, Yu. I. KOKONOVA

Abstract. In this paper, we consider one class of Volterra equations of the first kind that appear in the problem of identifying the input signal of a dynamic system. We discuss an approach to the approximate solution of Volterra polynomial equations that model nonlinear dynamics by integro-power Volterra series. A method for constructing a numerical solution using the Newton–Kantorovich iterative process is proposed. Based on standard quadrature methods and the product integration method, we obtain calculation formulas.

Keywords and phrases: identification, nonstationary dynamical system, polynomial Volterra equation of the first kind, Newton–Kantorovich method.

AMS Subject Classification: 45D05

1. Введение. Задача восстановления входного сигнала $x(t)$ по зарегистрированным значениям отклика $y(t)$ динамической системы относится к обратным задачам, в которых по следствию требуется найти причину наблюдаемого явления. Актуальность решения этой задачи продиктована широким спектром ее практического применения (см. [9]), в том числе при описании моделью типа «вход-выход» динамической системы, включающей исследуемый объект и измерительное устройство. В статье рассмотрен один из подходов к численному решению данной проблемы,

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00173).

возникающей при моделировании нелинейной динамики в виде полинома (отрезка интегро-степенного ряда) Вольтерра

$$y(t)=\sum_{\mu=1}^{N}\int\limits_0^t\cdots\int\limits_0^t K_\mu(t,s_1,\ldots,s_\mu)\prod_{i=1}^{\mu}x(s_i)\,ds_i \tag{1}$$

(см. [8]), где $t\in[0,T]$, $x(t)$ и $y(t)$ — скалярные функции времени, $y'(t)\in C_{[0,T]}$, $y(0)=0$ ($y\in \overset{\circ}{C}{}^{(1)}_{[0,T]}$), а ядра Вольтерра K_μ, $\mu=1,2,\ldots,N$, симметричны по переменным $s_1,\ldots,s_\mu$. В предположении, что ядра Вольтерра K_μ и $y(t)$ известны, при фиксированных значениях N исходная задача поиска $x(t)$ может быть сведена к решению N-степенных (полиномиальных) уравнений Вольтерра I рода.

Рассмотренные в работе интегральные уравнения в случае, когда погрешность входной информации выводит решение за пределы множества корректности, допускают применение методов саморегуляризации (см. [4]), где в качестве естественного параметра регуляризации выступает шаг сетки (см. [4, 7]). Очевидно, что разработка новых методов моделирования на основе устойчивых алгоритмов, с учетом идей саморегуляризации, является важной и актуальной прикладной задачей.

Как показано в [3], в предположениях

$$K_1(t,t)\neq 0,\quad t\in[0,\bar t],\quad (K_1(t,s))'_t\in C_\Delta,\quad \Delta=\bigl\{(t,s):0\leqslant s\leqslant t\leqslant \bar t\bigr\},\quad y\in \overset{\circ}{C}{}^{(1)}_{[0,\bar t]}, \tag{2}$$

функции K_μ ($\mu>1$) непрерывны по совокупности переменных и непрерывно дифференцируемы по t, уравнение (1) корректно на паре пространств $(C_{[0,\bar t]},\ \overset{\circ}{C}{}^{(1)}_{[0,\bar t]})$ при малом значении $\bar t<T$, что гарантирует существование, единственность и устойчивость решения в пространстве непрерывных функций $C_{[0,\bar t]}$. Специфика уравнения (1), которое можно представить в виде линейного уравнения

$$\int\limits_0^t K_1(t,s)x(s)ds=\tilde y(t) \tag{3}$$

с возмущенной правой частью

$$\tilde y(t)=y(t)-\sum_{\mu=2}^{N}\int\limits_0^t\cdots\int\limits_0^t K_\mu(t,s_1,\ldots,s_\mu)\prod_{i=1}^{\mu}x(s_i)ds_i, \tag{4}$$

рассмотрена в серии работ А. С. Апарцина (см. обзор в [6]). Отличие (1) при $N>1$ от линейного случая (3) заключается в локальности области T существования (единственного) непрерывного решения (см. [1]).

Таким образом, при известных ядрах Вольтерра уравнение (1) однозначно разрешимо в $C_{[0,\bar t]}$, при этом решение $x^*(0)$ определяется по формуле

$$x^*(0)=\frac{y'(0)}{K_1(0,0)}. \tag{5}$$

Равенство (5) есть решение эквивалентного уравнения Вольтерра II рода для $t=0$, полученного дифференцированием (1) по t.

Соотношение (5) используем далее при решении (1) итерационным методом Ньютона—Канторовича: учитывая представление в виде (3), (4), в качестве пробного решения естественно выбрать решение линейного по $x(t)$ уравнения. Ограничимся значениями $N=2,3$ в (1), наиболее распространенными на практике. Исследуем специфику численного решения (1) с помощью метода Ньютона—Канторовича (см. [5]). Случай с постоянными ядрами Вольтерра был изучен в [11]. В [12] рассмотрена ситуация, когда

$$K_\mu(t,s_1,\ldots,s_\mu)=\prod_{i=1}^{\mu}\varphi(t,s_i),$$

где $\varphi(t,s) \in C_\Delta$, $\Delta = \{(t,s) : 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \bar{t}\}$, $\bar{t} < T$. В данной работе обобщаются рассмотренные ранее случаи.

2. Численное решение уравнения для $N = 2$. Выберем для простоты $N = 2$ и проведем линеаризацию (1) по схеме Ньютона—Канторовича. Введем нелинейный интегральный оператор

$$Px(t) \equiv \int_0^t K_1(t,s_1)x(s_1)ds_1 + \int_0^t\int_0^t K_2(t,s_1,s_2)x(s_1)x(s_2)\,ds_1\,ds_2 - y(t). \tag{6}$$

Найдем производную (по Фреше) (6) в $x_0(t)$, где $x_0(t)$ — начальное приближение, так что

$$P'[x_0](x(t)) = \lim_{\omega\to 0}\frac{P(x_0(t)+\omega x(t)) - P(x_0(t))}{\omega} = \int_0^t K_1(t,s_1)x(s_1)ds_1 +$$
$$+ \int_0^t\int_0^t K_2(t,s_1,s_2)x_0(s_1)x(s_2)ds_1ds_2 + \int_0^t\int_0^t K_2(t,s_1,s_2)x(s_1)x_0(s_2)ds_1ds_2.$$

В операторной форме уравнение (1), $N = 2$, имеет вид $Px = 0$. Применяя метод Ньютона—Канторовича

$$P'(x_{m-1})(x_m - x_{m-1}) = -P(x_{m-1}), \quad m = 1,2,\ldots,$$
$$x_m = x_{m-1} - \left[P'(x_{m-1})\right]^{-1}\cdot P(x_{m-1}),$$

определим очередное приближение $x_m(t)$ в итерационном процессе

$$\int_0^t K_1(t,s_1)x_m(s_1)ds_1 + \int_0^t\int_0^t K_2(t,s_1,s_2)x_{m-1}(s_1)x_m(s_2)ds_1ds_2 +$$
$$+ \int_0^t\int_0^t K_2(t,s_1,s_2)x_m(s_1)x_{m-1}(s_2)ds_1ds_2 = \Phi_{m-1}(t), \tag{7}$$

где

$$\Phi_{m-1}(t) = \int_0^t\int_0^t K_2(t,s_1,s_2)x_{m-1}(s_1)x_{m-1}(s_2)ds_1ds_2 + y(t).$$

Применим для приближенного решения (7) численные методы, в которых процедура дискретизации обладает свойством саморегуляризации (см. [4]).

В частности, аппроксимация $x^*(t_i)$ в i-м узле сетки

$$t_i = ih, \quad t_j = jh, \quad i = 1,2,\ldots,n, \quad j = 1,2,\ldots,i, \quad nh = \bar{t}, \quad \bar{t} < T,$$

полученная с помощью метода правых прямоугольников, имеет следующий вид:

$$x_m^h(t_i) = \frac{G_{m-1}(t_i) - \sum\limits_{l=1}^{i-1} x_m^h(t_l)Q_{m-1}(t_i,t_l)}{Q_{m-1}(t_i,t_i)}, \tag{8}$$

$$G_{m-1}(t_i) = h^2\sum_{j=1}^{i}\sum_{l=1}^{i} K_2^h(t_i,t_j,t_l)\,x_{m-1}^h(t_j)x_{m-1}^h(t_l) + y(t_i),$$

$$Q_{m-1}(t_i,t_l) = hK_1^h(t_i,t_l) + 2h^2\sum_{j=1}^{i} K_2^h(t_i,t_j,t_l)x_{m-1}^h(t_j) \tag{9}$$

с начальным приближением

$$x_0^h(t_i) = \frac{1}{hK_1^h(t_i,t_i)}\left[y(t_i) - h\sum_{j=1}^{i-1} K_1^h(t_i,t_j)x_0^h(t_j)\right], \tag{10}$$

где $y(t_i)$ — значение отклика в i-м узле сетки. Отметим, что в (9) и (10) на каждой итерации должны выполняться следующие условия:

$$Q_{m-1}(t_i,t_i) \neq 0, \quad K_1^h(t_i,t_i) \neq 0.$$

При выводе (8) учитывалось свойство симметрии $K_2(t,s_1,s_2)$ по переменным s_1, s_2, так что $K_2^h(t_i,t_j,t_l) = K_2^h(t_i,t_l,t_j)$.

Для поиска аппроксимации $x^*(t)$ в $(i-1/2)$ узле из сеточного аналога (7), полученного с помощью метода интегрирования произведения (product integration; см. [10]), вместо (8)–(10) имеем

$$x_m^h(t_{i-1/2}) = \frac{1}{\mathbf{Q}_{m-1}(t_i,t_{i-1/2})}\left[\mathbf{G}_{m-1}(t_{i-1/2}) - \sum_{l=1}^{i-1} x_m^h(t_{l-1/2})\mathbf{Q}_{m-1}(t_i,t_{l-1/2})\right], \tag{11}$$

$$\mathbf{G}_{m-1}(t_{i-1/2}) = \sum_{j=1}^{i}\sum_{l=1}^{i} x_{m-1}^h(t_{j-1/2})x_{m-1}^h(t_{l-1/2}) \int\limits_{(j-1)h}^{jh}\int\limits_{(l-1)h}^{lh} K_2\left(t_i,s_1,s_2\right)ds_1ds_2 + y(t_i),$$

$$\mathbf{Q}_{m-1}(t_i,t_{l-1/2}) = \int\limits_{(l-1)h}^{lh} K_1(t_i,s_1)ds_1 + 2\sum_{j=1}^{i} x_{m-1}^h(t_{j-1/2}) \int\limits_{(j-1)h}^{jh}\int\limits_{(l-1)h}^{lh} K_2(t_i,s_1,s_2)ds_1ds_2 \tag{12}$$

с начальным приближением

$$x_0^h(t_{i-1/2}) = \left[y(t_i) - \sum_{j=1}^{i-1} x_0^h(t_{j-1/2}) \int\limits_{(j-1)h}^{jh} K_1(t_i,s_1)ds_1\right] \Bigg/ \left[\int\limits_{(i-1)h}^{ih} K_1(t_i,s_1)ds_1\right]; \tag{13}$$

при этом в (12) и (13) на каждой итерации должны выполняться соответствующие условия

$$\mathbf{Q}_{m-1}(t_i,t_{i-1/2}) \neq 0, \quad \int\limits_{(i-1)h}^{ih} K_1(t_i,s_1)ds_1 \neq 0.$$

3. Численное решение уравнения для $N = 3$. Пусть далее $N = 3$. Тогда, учитывая (1), вместо (6) имеем

$$Px(t) \equiv \int\limits_0^t K_1(t,s_1)x(s_1)ds_1 + \int\limits_0^t\int\limits_0^t K_2(t,s_1,s_2)x(s_1)x(s_2)ds_1ds_2 +$$
$$+ \int\limits_0^t\int\limits_0^t\int\limits_0^t K_3(t,s_1,s_2,s_3)x(s_1)x(s_2)x(s_3)ds_1ds_2ds_3 - y(t). \tag{14}$$

С учетом (14)

$$P'[x_0](x(t)) = \int\limits_0^t K_1(t,s_1)x(s_1)ds_1 + \int\limits_0^t\int\limits_0^t K_2(t,s_1,s_2)x_0(s_1)x(s_2)ds_1ds_2 +$$
$$+ \int\limits_0^t\int\limits_0^t K_2(t,s_1,s_2)x(s_1)x_0(s_2)ds_1ds_2 + \int\limits_0^t\int\limits_0^t\int\limits_0^t K_3(t,s_1,s_2,s_3)\prod_{i=1}^{2} x_0(s_i)x(s_3)ds_ids_3 +$$

$$+\int_0^t\int_0^t\int_0^t K_3(t,s_1,s_2,s_3)x_0(s_1)x(s_2)x_0(s_3)ds_1ds_2ds_3+\int_0^t\int_0^t\int_0^t K_3(t,s_1,s_2,s_3)x(s_1)\prod_{i=2}^{3}x_0(s_i)ds_1ds_i.$$

Обозначив левую часть (7) через $Z_m(t)$ и применяя метод Ньютона—Канторовича, получим

$$Z_m(t)+\int_0^t\int_0^t\int_0^t K_3(t,s_1,s_2,s_3)x_m(s_1)\prod_{i=2}^{3}x_{m-1}(s_i)ds_1ds_i+$$
$$+\int_0^t\int_0^t\int_0^t K_3(t,s_1,s_2,s_3)x_{m-1}(s_1)x_m(s_2)x_{m-1}(s_3)ds_1ds_2ds_3+$$
$$+\int_0^t\int_0^t\int_0^t K_3(t,s_1,s_2,s_3)\prod_{i=1}^{2}x_{m-1}(s_i)x_m(s_3)ds_ids_3=\Phi_{m-1}(t),\quad (15)$$

где

$$\Phi_{m-1}(t)=\int_0^t\int_0^t K_2(t,s_1,s_2)x_{m-1}(s_1)x_{m-1}(s_2)ds_1ds_2+$$
$$+2\int_0^t\int_0^t\int_0^t K_3(t,s_1,s_2,s_3)x_{m-1}(s_1)x_{m-1}(s_2)x_{m-1}(s_3)ds_1ds_2ds_3+y(t).$$

Используя метод правых прямоугольников, $x_0^h(t_i)$ вычисляем по формуле (10). Аппроксимируя определенные интегралы в (15) квадратурными формулами, получим расчетную формулу для $x_m^h(t_i)$ вида (8), в которой

$$G_{m-1}(t_i)=h^2\sum_{j=1}^{i}\sum_{l=1}^{i}K_2^h\left(t_i,t_j,t_k\right)x_{m-1}^h(t_j)x_{m-1}^h(t_k)+$$
$$+2h^3\sum_{j=1}^{i}\sum_{l=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}K_3^h\left(t_i,t_j,t_l,t_k\right)x_{m-1}^h(t_j)x_{m-1}^h(t_l)x_{m-1}^h(t_k)+y(t_i),$$

$$Q_{m-1}(t_i,t_l)=hK_1^h\left(t_i,t_l\right)+2h^2\sum_{j=1}^{i}K_2^h(t_i,t_j,t_l)x_{m-1}^h(t_j)+$$
$$+3h^3\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}K_3^h(t_i,t_j,t_k,t_l)x_{m-1}^h(t_j)x_{m-1}^h(t_k),$$

где $Q_{m-1}(t_i,t_i)\neq 0$ и, кроме того, в силу симметричности K_3 относительно s_1,s_2,s_3, выполняется соотношение

$$K_3^h(t_i,t_j,t_k,t_l)=K_3^h(t_i,t_j,t_l,t_k)=\cdots=K_3^h(t_i,t_k,t_j,t_l)=K_3^h(t_i,t_k,t_l,t_j).$$

По аналогии с предыдущим пунктом нетрудно получить, что расчетная формула $x^h(t_{i-1/2})$ на основе метода product integration имеет вид (11), (13), где

$$\mathbf{G}_{m-1}(t_{i-1/2})=\sum_{j=1}^{i}\sum_{l=1}^{i}x_{m-1}^h(t_{j-1/2})x_{m-1}^h(t_{l-1/2})\int\limits_{(j-1)h}^{jh}\int\limits_{(l-1)h}^{lh}K_2\left(t_i,s_1,s_2\right)ds_1ds_2+$$

$$+2\sum_{j=1}^{i}\sum_{l=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}x_{m-1}^{h}(t_{j-1/2})x_{m-1}^{h}(t_{l-1/2})x_{m-1}^{h}(t_{k-1/2})\times$$
$$\times\int\limits_{(j-1)h}^{jh}\int\limits_{(l-1)h}^{lh}\int\limits_{(k-1)h}^{kh}K_3\left(t_i,s_1,s_2,s_3\right)ds_1ds_2ds_3+y(t_i),$$

$$\mathbf{Q}_{m-1}(t_i,t_{l-1/2})=\int\limits_{(l-1)h}^{lh}K_1(t_i,s_1)ds_1+2\sum_{j=1}^{i}x_{m-1}^{h}(t_{j-1/2})\int\limits_{(j-1)h}^{jh}\int\limits_{(l-1)h}^{lh}K_2(t_i,s_1,s_2)ds_1ds_2+$$
$$+3\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}x_{m-1}^{h}(t_{j-1/2})x_{m-1}^{h}(t_{k-1/2})\int\limits_{(j-1)h}^{jh}\int\limits_{(k-1)h}^{kh}\int\limits_{(l-1)h}^{lh}K_3(t_i,s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3;$$

при этом $\mathbf{Q}_{m-1}(t_i,t_{i-1/2})\neq 0$.

Замечание 1. Аппроксимируя определенные интегралы в (7), (15) с помощью квадратурной формулы средних прямоугольников, легко получить по аналогии с представленными формулами алгоритм для расчета x_m^h, $m=0,1,2,\dots$.

4. О сходимости численных методов. Обозначим через $x_{m_i}^*\equiv x_m^*(t_i)$ каркас точного решения, а через $\varepsilon_m^h=\{\varepsilon_{m_i}^h\}=\{x_{m_i}^*-x_{m_i}^h\}$ $(i=1,2,\dots,n)$ — вектор ошибки сеточного решения $\{x_{m_i}^h\}$, $K_1^h(t_i,t_j)=K_{1_{i,j}}$, $K_2^h(t_i,t_j,t_l)=K_{2_{i,j,l}}$. Вектор $\{x_{m_i}^*\}$ удовлетворяет системе

$$h\sum_{j=1}^{i}K_{1_{i,j}}x_{m_j}^*+2h^2\sum_{j=1}^{i}\sum_{l=1}^{i}K_{2_{i,j,l}}x_{m_j}^*x_{m-1_l}^*=y_i+h^2\sum_{j=1}^{i}\sum_{l=1}^{i}K_{2_{i,j,l}}x_{m-1_j}^*x_{m-1_l}^*-R_i(x_m^*),\qquad(16)$$

где

$$R_i(x_m^*)=\int\limits_0^{t_i}K_1(t_i,s_1)x_m^*(s_1)ds_1+\int\limits_0^{t_i}\int\limits_0^{t_i}K_2(t_i,s_1,s_2)x_{m-1}^*(s_1)x_m^*(s_2)ds_1ds_2+$$
$$+\int\limits_0^{t_i}\int\limits_0^{t_i}K_2(t_i,s_1,s_2)x_m^*(s_1)x_{m-1}^*(s_2)ds_1ds_2-\int\limits_0^{t_i}\int\limits_0^{t_i}K_2(t_i,s_1,s_2)x_{m-1}^*(s_1)x_{m-1}^*(s_2)ds_1ds_2-$$
$$-\left(h\sum_{j=1}^{i}K_{1_{i,j}}x_{m_j}^*+2h^2\sum_{j=1}^{i}\sum_{l=1}^{i}K_{2_{i,j,l}}x_{m_j}^*x_{m-1_l}^*-h^2\sum_{j=1}^{i}\sum_{l=1}^{i}K_{2_{i,j,l}}x_{m-1_j}^*x_{m-1_l}^*\right).$$

Вычитая сеточный аналог (7) из (16), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно ε_m^h:

$$\begin{gathered}h\sum_{j=1}^{i}K_{1_{i,j}}\varepsilon_{m_j}^h+h^2\sum_{j=1}^{i}\sum_{l=1}^{i}K_{2_{i,j,l}}\varepsilon_{m_j}^h\left(x_{m-1_l}^h+x_{m-1_l}^*\right)=C_i(\varepsilon_{m-1}^h)-R_i(x_m^*),\\ C_i(\varepsilon_{m-1}^h)=h^2\sum_{j=1}^{i}\sum_{l=1}^{i}K_{2_{i,j,l}}\varepsilon_{m-1_j}^h\left[\left(x_{m-1_l}^h+x_{m-1_l}^*\right)-\left(x_{m_l}^h+x_{m_l}^*\right)\right].\end{gathered}\qquad(17)$$

Заменяя i в (17) на $i-1$, найдем разность между соседними строками системы (с учетом симметрии K_2 по второму и третьему аргументу):

$$\varepsilon_{m_i}^h\left(hK_{1_{i,i}}+h^2K_{2_{i,i,i}}\left(x_{m-1_i}^h+x_{m-1_i}^*\right)+h^2\sum_{l=1}^{i-1}K_{2_{i,i,l}}\left(x_{m-1_l}^h+x_{m-1_l}^*\right)\right)+$$

$$+ h\sum_{j=1}^{i-1}\left(K_{1_{i,j}} - K_{1_{i-1,j}}\right)\varepsilon^h_{m_j} + h^2\left(x^h_{m-1_i} + x^*_{m-1_i}\right)\sum_{j=1}^{i-1} K_{2_{i,j,l}}\varepsilon^h_{m_j} +$$
$$+ h^2\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{l=1}^{i-1}\left(K_{2_{i,j,l}} - K_{2_{i-1,j,l}}\right)\varepsilon^h_{m_j}\left(x^h_{m-1_l} + x^*_{m-1_l}\right) =$$
$$= C_i(\varepsilon^h_{m-1}) - C_{i-1}(\varepsilon^h_{m-1}) + R_{i-1}(x^*_m) - R_i(x^*_m). \quad (18)$$

Непосредственно из (18) при $m = 0$ имеем

$$\varepsilon^h_{0_i} hK_{1_{i,i}} + h\sum_{j=1}^{i-1}\left(K_{1_{i,j}} - K_{1_{i-1,j}}\right)\varepsilon^h_{0_j} = R_{i-1}(x^*_0) - R_i(x^*_0), \quad i = 2, 3, \ldots, n. \quad (19)$$

Разделим далее обе части (19) на h и перейдем к оценке $|\varepsilon^h_{0_i}|$:

$$|\varepsilon^h_{0_i}| \leqslant \frac{ch}{k} + \frac{h}{k}\sum_{j=1}^{i-1}|\varepsilon^h_{0_j}|L_1, \quad i = 2, 3, \ldots, n, \quad c = \mathrm{const}, \quad (20)$$

где

$$k = \min_{0\leqslant t\leqslant \bar t}|K_1(t,t)| > 0, \quad L_1 = \max_{0\leqslant s\leqslant t\leqslant \bar t}|K'_{1_t}(t,s)| \geqslant 0. \quad (21)$$

При этом для $i = 1$ справедливо неравенство

$$|\varepsilon^h_{0_1}| \leqslant \frac{|R_1(x^*_0)|/h}{k}.$$

Замечание 2. Техника получения оценки (20) основана на вспомогательном предположении

$$|R_{i-1}(x^*_m) - R_i(x^*_m)| \leqslant ch^2,$$

которое вытекает из оценки погрешности используемой квадратуры (см. [2, лемма 2]).

Дополнительно к (21) введем величину

$$M_2 = \max_{0\leqslant s\leqslant t\leqslant \bar t}|K_2(t,t,s)| \geqslant 0. \quad (22)$$

Следуя [2], предположим, что сеточный аналог решения уравнения (7) в условиях (2) удовлетворяет неравенству

$$|x^h_m(t_i)| \leqslant \Upsilon_m(\bar t), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \quad (23)$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Если функции $y(t)$, $K_1(t, s_1)$ и $K_2(t, s_1, s_2)$ являются достаточно гладкими и удовлетворяют условиям (2), то при выполнении неравенства*

$$h_0 M_2 \Upsilon_{m-1}(\bar t) + \bar t M_2 \Upsilon_{m-1}(\bar t) < k$$

в принятых обозначенияхxЁ(21)–(23) и $h \leqslant h_0$ справедлива оценка

$$\max_{0\leqslant i\leqslant n}|\varepsilon^h_{m_i}| = O(h).$$

Замечание 3. Доказательство основано на переходе от (18) к оценке по модулю и привлечении разностного аналога леммы Гронуолла—Беллмана.

5. Заключение. Работа посвящена обобщению результатов исследований, начатых в [11, 12]. Рассмотрено численное решение задачи идентификации входного сигнала квадратичных и кубичных полиномов Вольтерра, которые описывают динамику нелинейных систем типа «вход-выход». Разработаны численные алгоритмы приближенного решения N-степенных ($N = 2, 3$) интегральных уравнений Вольтерра I рода. Формулы аппроксимации искомого входного сигнала $x(t)$ получены с помощью метода Ньютона—Канторовича, метода правых (средних) прямоугольников и метода интегрирования произведения. В качестве пробного решения используется численное решение линейного уравнения Вольтерра I рода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Апарцин А. С.* Полилинейные интегральные уравнения Вольтерра I рода: элементы теории и численные методы// Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. мат. — 2007. — *1*, № 1. — С. 13–14.
2. *Апарцин А. С.* О сходимости численных методов решения билинейного уравнения Вольтерра I рода// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2007. — *47*, № 8. — С. 1378–1386.
3. *Апарцин А. С.* Полиномиальные интегральные уравнения Вольтерра I рода и функция Ламберта// Тр. ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2012. — *18*, № 1. — С. 69–81.
4. *Апарцин А. С., Бакушинский А. Б.* Приближенное решение интегральных уравнений Вольтерра I рода методом квадратурных сумм// в кн.: Дифференциальные и интегральные уравнения. — Иркутск: Иркут. гос. ун-т, 1972. — С. 248–258.
5. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. — М.: Физматлит, 1959.
6. *Солодуша С. В., Гражданцева Е. Ю.* Тестовое полиномиальное уравнение Вольтерра I рода в задаче идентификации входных сигналов// Тр. ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2021. — *27*, № 4. — С. 161–174.
7. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979.
8. *Volterra V.* A Theory of Functionals, Integral and Integro-Differential Equations. — New York: Dover, 1959.
9. *Kleiman E. G.* Identification of input signals in dynamical systems// Automat. Remote Contr. — 1999. — *60*, № 12. — P. 1675–1685.
10. *Linz P.* Product integration method for Volterra integral equations of the first kind// BIT Numer. Math. — 1971. — *11*, № 3. — P. 413–421.
11. *Solodusha S. V.* To the numerical solution of one class of systems of the Volterra polynomial equations of the first kind// Num. Anal. Appl. — 2018. — *11*, № 1. — P. 89–97.
12. *Solodusha S. V.* Identification of input signals in integral models of one class of nonlinear dynamic systems// Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. мат. — 2019. — *30.* — С. 73–82.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00173).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Солодуша Светлана Витальевна (Solodusha Svetlana Vitalievna)
Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова
Сибирского отделения РАН, Иркутск;
Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева
Сибирского отделения РАН, Иркутск
(V. M. Matrosov Institute of System Dynamics and Control Theory
of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia;
L. A. Melentiev Energy Systems Institute of the Siberian Branch
of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia)
E-mail: solodusha@isem.irk.ru

Коконова Юлия Игоревна (Kokonova Yulia Igorevna)
Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова
Сибирского отделения РАН, Иркутск;
Иркутский национальный исследовательский технический университет
(V. M. Matrosov Institute of System Dynamics and Control Theory
of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia;
Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russia)
E-mail: dudareva.yuliya@mail.ru