ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 234 (2024). С. 91–98
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-234-91-98

УДК 519.716.2

О НЕКОТОРЫХ S_I^*-ПРЕДПОЛНЫХ МНОЖЕСТВАХ МУЛЬТИФУНКЦИЙ РАНГА 2

© 2024 г. **Э. С. ТАГЛАСОВ**

Аннотация. Рассматриваются мультифункции, заданные на двухэлементном множестве и возвращающие в качестве значений любые подмножества заданного множества. Рассматривается вопрос об описании всех предполных относительно операции суперпозиции множеств. Приведены примеры двух предполных множеств, описанных на языке сохранения предиката функцией. Доказаны их замкнутость и предполнота относительно рассматриваемого замыкания, приведен пример полного множества.

Ключевые слова: мультифункция, суперпозиция, S_I^*-замыкание, предполное множество, гипероперация, мультиоперация, мультиклон, сохранение предиката.

ON SOME S_I^*-PRECOMPLETE SETS OF MULTIFUNCTIONS OF RANK 2

© 2024 **E. S. TAGLASOV**

Abstract. In this paper, we consider multifunctions defined on a two-element set and returning subsets of a given set as values. We discuss the question of describing all sets that are precomplete with respect to the superposition operation. We give examples of two precomplete sets described in the language of predicate preservation by function; their closedness and precompleteness with respect to the closure under consideration are proved, and an example of a complete set is given.

Keywords and phrases: multifunction, superposition, S_I^*-closure, precomplete set, hyperoperation, multioperation, multiclone, predicate preservation.

AMS Subject Classification: 03B50, 08A99

1. Введение. Гипероперации (гиперфункции) — операции, отображающие наборы элементов из некоторого множества A в непустые подмножества A, изучаются с прошлого века (см. [3]). Они встречаются в различных областях дискретной математики, например, многозначной логике, синтезе схем, обработке неполной и неточной информации.

Наряду гипероперациями рассматриваются частичные операции, отображающие наборы элементов из множества A в элементы множества A, но, возможно, и в пустое множество, а также частичные гипероперации, впоследствии называемые мультиоперациями (см. [4, 5]). Отметим, что наряду с термином «операция» в литературе используется термин «функция». Мультифункции возвращают в качестве своих значений подмножества (в том числе и пустое) множества, на котором они заданы.

Как правило, мультифункции рассматриваются вместе с операцией суперпозиции. Однако при обычном вычислении суперпозиции возникает проблема, так как внутренние функции могут возвращать подмножества, а на таких наборах внешняя функция не определена. Поэтому необходимо

Работа выполнена при поддержке гранта Иркутского государственного университета для молодых ученых, проект № 091-23-304 «Критерий S_I^*-полноты мультиопераций ранга 2».

ввести определение, по которому мультифункции можно вычислять на таких наборах. В зависимости от интерпретации подмножеств, суперпозицию вычисляют разными способами (см. [1]).

При изучении функциональной системы «функция, суперпозиция» ставят основную задачу описания решетки замкнутых классов. Однако суперпозиция, как правило, порождает счетное или континуальное множество замкнутых классов. Поэтому рассматривают часть (конечное множество) решетки, например, максимальные и минимальные классы. Из задачи нахождения максимальных классов вытекает задача критерия полноты.

В представленной работе рассматриваются мультифункции, заданные на двухэлементном множестве, с так называемой S_I^*-суперпозицией и описываются два предполных множества.

2. Основные определения. Множества мультифункций (M), всюду определенных функций (O) на конечном множестве A, определяются следующим образом. Пусть $n \in \mathbb{N}$, а $|X|$ — обозначение для мощности множества X. Тогда

$$M_n = \Big\{ f \;\Big|\; f : A^n \to 2^A \Big\}, \qquad M = \bigcup_n M_n,$$

$$O_n = \Big\{ f \in M_n \text{ и } |f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)| = 1,\ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in A^n \Big\}, \qquad O = \bigcup_n O_n.$$

Мощность множества A называется рангом функции. В работе рассматривается множество ранга 2: $E_2 = \{0, 1\}$.

Если f — n-местная мультифункция, $f_1, \dots, f_n$ — m-местные мультифункции или переменные, то суперпозиция $f(f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m))$ задает мультифункцию $g(x_1, \dots, x_m)$ следующим образом: если набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in E_2^m$, то по определению

$$g(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \begin{cases} \varnothing, & \text{если существует такой } i \in \{1, \dots, n\}, \text{ что} \\ & f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \varnothing \text{ или } f(\beta_1, \dots, \beta_n) = \varnothing \\ & \text{для некоторого набора } (\beta_1, \dots, \beta_n), \\ & \text{такого, что } \beta_j \in f_j(\alpha_1, \dots, \alpha_m),\ j \in \{1, \dots, n\}; \\ \bigcap\limits_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} f(\beta_1, \dots, \beta_n), & \text{если пересечение не пусто;} \\ \bigcup\limits_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} f(\beta_1, \dots, \beta_n) & \text{иначе.} \end{cases} \tag{1}$$

Набор $\tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ называется *двоичным*, если для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ выполняется $|\beta_i| = 1$.

Набор $\tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in E_2^n$ называется *уточнением* набора $(B_1, \dots, B_n) \in (2^{E_2} \setminus \{\varnothing\})^n$, если для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ выполняется $\beta_i \in B_i$.

Набор $\tilde{\beta}^{(0)} = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in E_2^n$ называется *нулевым уточнением* набора $(B_1, \dots, B_n) \in (2^{E_2} \setminus \{\varnothing\})^n$, если для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ выполняется $\beta_i = 0$, если $B_i = E_2$ и $\beta_i \in B_i$ — иначе.

Далее для множества E_2 будем использовать обозначение «$-$», а для пустого множества — обозначение «$*$». Множество из одного элемента будем обозначать элементом этого множества. Наряду с термином «мультифункция» будем использовать и термин «функции».

Определим S_I^*-замыкание множества $Q \subseteq M_2$ как множество всех мультифункций из M_2, которые можно получить из Q операциями введения фиктивных переменных и S_I^*-суперпозиции. S_I^*-Замыкание множества Q обозначаем символом $[Q]$.

Множество мультифункций, которое совпадает со своим замыканием, называется S_I^*-замкнутым классом. Будем говорить, что множество $R \subseteq Q$ порождает S_I^*-замкнутый класс Q (S_I^*-полно в классе Q), если $[R] = Q$. При $Q = M_2$ говорим о полных множествах.

Множество $R \subseteq Q$ называется предполным в M_2, если S_I^*-замыкание R отлично от M_2, но S_I^*-замыкание множества $R \cup \{f\}$ совпадает с M_2 для любой мультифункции $f \notin R$.

Пусть Q — замкнутое множество мультифункций. Символом f_Q будем обозначать мультифункцию, не содержащуюся в множестве Q.

Обозначим n-местную функцию, значения которой совпадают со значениями переменной x_i, через $e_i^n(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$. Функции e_i^n называются селекторными функциями или проекциями.

Клоном называется множество функций, замкнутое относительно операции суперпозиции и содержащее все селекторные функции.

Далее в работе рассматриваются замкнутые множества, являющиеся клонами, поэтому будем считать, что такие множества содержат все селекторные функции.

Пусть R^m — некоторый m-местный предикат. Будем говорить, что функция $f(x_1, \dots, x_n)$ сохраняет предикат R^m, если для любых n наборов $(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{m1})$, …, $(\alpha_{1n}, \dots, \alpha_{mn})$, принадлежащих предикату, набор $f(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n})$, …, $f(\alpha_{m1}, \dots, \alpha_{mn})$ принадлежит R^m. Определение суперпозиции позволяет рассматривать предикаты, заданные не только на множестве E_2, но и на множестве всех подмножеств этого множества. Подробнее см. в [2].

Множество функций, сохраняющих некоторый предикат R, обозначим $\operatorname{Pol} R$. Удобно задавать m-местный предикат, содержащий n наборов, матрицей размерности $m \times n$, в которой столбцами являются наборы из предиката.

Пусть задана n-местная мультифункция g и наборы $(\alpha_{1i}, \dots, \alpha_{mi})$, $i \in \{1, \dots, n\}$, принадлежащие некоторому m-местному предикату. Значением функции на данных наборах будем называть столбец

$$\begin{pmatrix} g(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n}) \\ \vdots \\ g(\alpha_{m1}, \dots, \alpha_{mn}) \end{pmatrix} \equiv g \begin{pmatrix} \alpha_{11} \dots \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \dots \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

В общем случае множество мультифункций, сохраняющих предикат, необязательно замкнуто относительно суперпозиции, однако справедливо следующее утверждение.

Лемма 1 (см. [2]). *Если мультифункция f получена суперпозицией функций g, g_1, …, g_m, сохраняющих некоторый предикат R, то на двоичных наборах из предиката мультифункция f обязательно возвращает набор (не обязательно двоичный) из предиката.*

3. Предполное множество. Рассмотрим следующие множества мультифункций:

$$K_1 = \operatorname{Pol} R_1, \quad R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & - & - & * & * & * & * & 0 & 1 & - \\ 0 & 1 & 1 & - & 1 & - & 0 & 1 & - & * & * & * & * \end{pmatrix},$$

$$K_2 = \operatorname{Pol} R_2, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & - & \beta \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & - & \gamma \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & - & \delta \end{pmatrix},$$

где $(\alpha\beta\gamma\delta)^T$ — недвоичные столбцы, которые удовлетворяют одному из условий:

(i) $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \subseteq \{*, 0, 1\}$;
(ii) $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \subseteq \{*, -\}$.

Теорема 1. *Множество K_1 является S_I^*-замкнутым.*

Доказательство. Пусть $f, f_1, \dots, f_m \in K$, а функция

$$g(x_1, \dots, x_n) = f(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

не принадлежит множеству K_1. Тогда существуют такие наборы

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n),$$

что $(\alpha_i \beta_i)^T$, $i \in \{1, \dots, n\}$, принадлежат R_1, а $g((\tilde{\alpha}\tilde{\beta})^T)$ не принадлежит R_1, т.е.

$$g \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & - \\ 0 & - & 0 \end{matrix} \right\}.$$

Отметим, что в наборах $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ не содержится значение $*$, иначе набор $g((\tilde{\alpha}\tilde{\beta})^T)$ будет содержать $*$.

(a) Пусть

$$g \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

По определению суперпозиции найдется уточнение $\tilde{\alpha}'$ набора $\tilde{\alpha}$, на котором $g(\tilde{\alpha}') = 1$. Тогда

$$g\begin{pmatrix} \tilde{\alpha}' \\ \tilde{\beta}' \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & - \end{matrix} \right\},$$

где $\tilde{\beta}'$ — такое уточнение набора $\tilde{\beta}$, что двоичный набор $(\alpha_i'\beta_i')^T$ содержится в R_1 для любого $i \in \{1, \dots, n\}$. В обоих случаях получили противоречие с леммой 1.

(b) Пусть

$$g\begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ - \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим набор $\tilde{\beta}$. Либо найдется такое уточнение $\tilde{\beta}'$, что $g(\tilde{\beta}') = 0$, либо на всех уточнениях функция g принимает значение $-$.

В первом случае получаем следующее противоречие с леммой 1:

$$g\begin{pmatrix} \tilde{\alpha}' \\ \tilde{\beta}' \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{matrix} 1 & - \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\},$$

где $\tilde{\alpha}'$ — такое уточнение набора $\tilde{\alpha}$, что двоичный набор $(\alpha_i'\beta_i')^T$ содержится в R_1 для любого $i \in \{1, \dots, n\}$.

Во втором случае найдется такое уточнение $\tilde{\alpha}''$ набора $\tilde{\alpha}$, что $g(\tilde{\alpha}'') = 1$. Тогда

$$g\begin{pmatrix} \tilde{\alpha}'' \\ \tilde{\beta}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ - \end{pmatrix},$$

где $\tilde{\beta}''$ — такое уточнение набора $\tilde{\beta}$, что набор $(\alpha_i''\beta_i'')^T$ содержится в R_1 для любого $i \in \{1, \dots, n\}$; противоречие с леммой 1.

(c) Пусть

$$g\begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим набор $\tilde{\alpha}$. Либо найдется такое уточнение $\tilde{\alpha'}$, что $g(\tilde{\alpha'}) = 1$, либо на всех уточнениях функция g принимает значение $-$.

В первом случае получаем противоречие с леммой 1:

$$g\begin{pmatrix} \tilde{\alpha}' \\ \tilde{\beta}' \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & - \end{matrix} \right\},$$

где $\tilde{\beta}'$ — такое уточнение набора $\tilde{\beta}$, что двоичный набор $(\alpha_i'\beta_i')^T$ содержится в R_1 для любого $i \in \{1, \dots, n\}$.

Во втором случае найдется такое уточнение $\tilde{\beta}''$ набора $\tilde{\beta}$, что $g(\tilde{\beta}'') = 0$. Тогда

$$g\begin{pmatrix} \tilde{\alpha}'' \\ \tilde{\beta}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $\tilde{\alpha}''$ — такое уточнение набора $\tilde{\alpha}$, что набор $(\alpha_i''\beta_i'')^T$ содержится в R_1 для любого $i \in \{1, \dots, n\}$; противоречие с леммой 1. □

Лемма 2. *Пусть функция $f(x_1, \dots, x_m)$ принимает все четыре значения $\{*, 0, 1, -\}$, а множество B полно в O_2. Тогда множество $\{f\} \cup B$ является полным в M_2.*

Доказательство. Пусть $h(x_1, \dots, x_n)$ — произвольная функция из M_2. Покажем, что ее можно получить с помощью суперпозиции функции f, которая принимает все четыре значения, и функций $g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)$, принадлежащие O_2.

Пусть набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in E_2^n$ таков, что $h(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sigma$, где $\sigma \in \{*, 0, 1, -\}$. Так как функция f принимает все четыре значения, то существует такой набор $(\beta_1, \dots, \beta_m) \in E_2^m$, что $f(\beta_1, \dots, \beta_m) = \sigma$.

Определим функции $g_i(x_1, \dots, x_n)$ так, чтобы $g_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \beta_i$ для любого $i \in \{1, \dots, m\}$. Тогда $f(g_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \dots, g_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = f(\beta_1, \dots, \beta_m) = \sigma = h(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. □

Замечание 1. Множества $\{(0001), (10)\}$ и $\{(0111), (10)\}$ полны в O_2.

Лемма 3. *Функции* (0111) *и* (0001) *принадлежат классу* K_1.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f_1(x_1, x_2) = (0111)$. Если она не принадлежат множеству K_1, то

$$f_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & - \\ 0 & - & 0 \end{matrix} \right\}$$

для некоторых $(\alpha_1\beta_1)^T$, $(\alpha_2\beta_2)^T$ из R_1, причем $* \notin \{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2\}$.

Пусть

$$f_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{matrix} 1 & - \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}.$$

Так как $f_1(\beta_1\beta_2) = 0$, то $\beta_1 = 0$ и $\beta_2 = 0$. Рассматривая наборы из предиката R_1 вида $(\alpha 0)^T$, получим $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$. Получили противоречие, так как $f_1(\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0) = 0$.

Рассмотрим оставшийся случай:

$$f_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ - \end{pmatrix}.$$

Из равенства $f_1(\beta_1\beta_2) = -$ получим $\beta_1 = -$, $\beta_2 \in \{0, -\}$ или $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = -$. Набору из предиката $(\alpha 0)^T$ соответствует значения $\alpha = 0$, а набору $(\alpha -)^T$ — значение $\alpha \in \{0, -\}$. Таким образом, получаем $\alpha_1 \in \{0, -\}$ и $\alpha_2 \in \{0, -\}$ при соответствующих значениях β_1, β_2. При любых случаях α_1 и α_2 возникает противоречие, так как получаем $f_1(\alpha_1\alpha_2) \in \{0, -\}$.

Доказательство для функции $f_2(x_1, x_2) = (0001)$ проводится двойственным образом. □

Теорема 2. *Множество* K_1 *является* S_I^**-предполным.*

Доказательство. Покажем, что множество $\{f_{K_1}\} \cup K_1$ является полным в M_2, где функция $f_{K_1}(x_1, \ldots, x_n)$ не принадлежит множеству K_1.

Отметим, что все одноместные функции, значения которых совпадают со значениями столбцов из R_1, принадлежат K_1. В этом несложно убедиться, вычислив $f(g(x))$, подставляя вместо функций $f(x)$ и $g(x)$ столбцы из предиката R_1.

Подставляя одноместные функции на соответствующие места в функцию f_{K_1}, получим одну из трех функций: (10), $(1-)$, (-0).

1. Рассмотрим функцию (10). Согласно замечанию 1 и лемме 3 можем получить все множество O_2. Осталось получить функцию, возвращающую все четыре значения. Ее получим следующим образом:

$$\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ - & 0 \\ - & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ - \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ - \\ 1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ - \\ * \end{pmatrix}.$$

Отметим, что функция $(010*)$ содержится в множестве K_1, так как в предикате содержатся все двухместные наборы с $*$; подставляя наборы из предиката в функцию $(010*)$, получим либо набор с $*$, либо набор соответствующий для функции (0101) на тех же наборах.

2. Получена функция $(1-)$. Следующие суперпозиции сводят этот случай к первому:

$$\begin{matrix} 1 \\ - \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ - \end{pmatrix}; \qquad \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ - & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ - \end{pmatrix}; \qquad \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ - \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ - & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Случай функции (-0) суперпозициями

$$\begin{matrix} - \\ 0 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \begin{pmatrix} - & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{matrix} - \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \begin{pmatrix} - & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

также сводится к первому. □

Лемма 4. *Пусть функция $g(x_1,\dots,x_n)$ принадлежит множеству K_2 и на некотором наборе $\tilde\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\{0,1,-\}^n$ возвращает значение $\sigma\in\{0,1\}$. Тогда на любом уточнении набора $\tilde\alpha$ функция g возвращает значение σ.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $\sigma=1$. Случай, когда $\sigma=0$, доказывается аналогичным образом.

По определению суперпозиции (1) функция g на любом уточнении набора $\tilde\alpha$ может возвращать только значения 1 или $-$, причем найдется уточнение $\tilde\alpha'$ этого же набора, на котором g возвращает 1. Если найдется уточнение $\tilde\alpha''$ набора $\tilde\alpha$, при котором $g(\tilde\alpha'')=-$, то получим противоречие с леммой 1, так как

$$g\big((\tilde\alpha'\tilde\alpha'\tilde\alpha''\tilde\alpha'')^T\big)=(11--)^T\notin R_2,\quad \big(\tilde\alpha_i'\tilde\alpha_i'\tilde\alpha_i''\tilde\alpha_i''\big)^T\in R_2$$

для любого $i\in\{1,\dots,n\}$. □

Теорема 3. *Множество K_2 является S_I^*-замкнутым.*

Доказательство. Покажем, что множество K_2 замкнуто относительно суперпозиции. Пусть $f,f_1,\dots,f_m\in K_2$, а функция

$$g(x_1,\dots,x_n)=f(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n))$$

не принадлежит множеству K_2. Тогда существуют такие наборы

$$\tilde\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n),\quad \tilde\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n),\quad \tilde\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_n),\quad \tilde\delta=(\delta_1,\dots,\delta_n),$$

что

$$\big(\alpha_i\beta_i\gamma_i\delta_i\big)^T\in R_2,\quad g\big(\big(\tilde\alpha\tilde\beta\tilde\gamma\tilde\delta\big)^T\big)\notin R_2.$$

Все возможные значения $g\big(\big(\tilde\alpha\tilde\beta\tilde\gamma\tilde\delta\big)^T\big)$ разобьем на два типа:

(i) все двоичные наборы, не принадлежащие множеству R_2:

$$g\begin{pmatrix}\tilde\alpha\\ \tilde\beta\\ \tilde\gamma\\ \tilde\delta\end{pmatrix}\in\left\{\begin{matrix}0&0&0&1&0&1&1&1\\ 0&0&1&0&1&0&1&1\\ 0&1&0&0&1&1&0&1\\ 1&0&0&0&1&1&1&0\end{matrix}\right\};$$

(ii) наборы, содержащие одновременно $-$ и $\nu\in\{0,1\}$:

$$g\begin{pmatrix}\tilde\alpha\\ \tilde\beta\\ \tilde\gamma\\ \tilde\delta\end{pmatrix}\in\left\{\begin{matrix}-&-&-&\nu&\nu_1&\nu_1&\nu&\nu_1&\nu_1&\nu&\nu_1&\nu_1\\ \nu&\nu_1&\nu_1&-&-&-&\nu_1&\nu&\nu_2&\nu_1&\nu&\nu_2\\ \nu_1&\nu&\nu_2&\nu_1&\nu&\nu_2&-&-&-&\nu_2&\nu_2&\nu\\ \nu_2&\nu_2&\nu&\nu_2&\nu_2&\nu&\nu_2&\nu_2&\nu&-&-&-\end{matrix}\right\},$$

где $\nu_1,\nu_2\in\{*,0,1,-\}$.

Случай (i). Так как перестановка строк не меняет предикат R_2, то достаточно рассмотреть один вариант. Пусть

$$g\big(\tilde\alpha\tilde\beta\tilde\gamma\tilde\delta\big)^T=\big(0\,0\,0\,1\big)^T.$$

По лемме 4 имеем

$$g\big(\tilde\alpha^{(0)}\tilde\beta^{(0)}\tilde\gamma^{(0)}\tilde\delta^{(0)}\big)^T=\big(0\,0\,0\,1\big)^T;$$

противоречие с леммой 1, так как

$$\big(\tilde\alpha_i^{(0)}\tilde\beta_i^{(0)}\tilde\gamma_i^{(0)}\tilde\delta_i^{(0)}\big)^T\in R_2\quad\forall i\in\{1,\dots,n\},\quad g\big(\big(\tilde\alpha^{(0)}\tilde\beta^{(0)}\tilde\gamma^{(0)}\tilde\delta^{(0)}\big)^T\big)\notin R_2.$$

Случай (ii). Как и в первом случае, достаточно рассмотреть только один вариант. Пусть $g\big(\big(\tilde\alpha\tilde\beta\tilde\gamma\tilde\delta\big)^T\big)=\big(-\,\nu\,\nu_1\,\nu_2\big)^T$. Рассмотрим $g\big(\big(\tilde\alpha\tilde\beta\big)^T\big)=\big(-\ 0\big)^T$. Доказательство для $\nu=1$ аналогично.

Если найдется уточнение $\tilde\alpha'$ набора $\tilde\alpha$, на котором функция g возвращает значение 0, то найдется уточнение $\tilde\alpha''$ этого же набора, на котором g возвращает значение 1. Тогда по лемме 4 можем получить: $g\big(\big(\tilde\alpha'\tilde\alpha''\tilde\beta'\tilde\beta''\big)^T\big)=\big(0\,1\,0\,0\big)^T\big)$, где уточнения $\tilde\beta'$, $\tilde\beta''$ набора $\tilde\beta$ таковы, что $\big(\tilde\alpha_i'\tilde\alpha_i''\tilde\beta_i'\tilde\beta_i''\big)^T\in R_2$. Получили противоречие с леммой 1.

Если нет уточнения набора α, при котором функция g возвращает значение 0, тогда на любых уточнениях этого же набора функция g возвращает $-$. По лемме 4 можем получить: $g\big((\tilde{\alpha}^{(0)}\tilde{\alpha}^{(0)}\tilde{\beta}^{(0)}\tilde{\beta}^{(0)})^T\big) = \big(- - 0\,0\big)^T$. Получили противоречие с леммой 1, так как $\big(\tilde{\alpha}_i^{(0)}\tilde{\alpha}_i^{(0)}\tilde{\beta}_i^{(0)}\tilde{\beta}_i^{(0)}\big)^T \in R_2$, а $g\big((\tilde{\alpha}^{(0)}\tilde{\alpha}^{(0)}\tilde{\beta}^{(0)}\tilde{\beta}^{(0)})^T\big) \notin R_2$. □

Теорема 4. *Множество K_2 является S_I^*-предполным.*

Доказательство. Покажем, что множество $\{f_{K_2}\} \cup K_2$ является полным в M_2, где функция $f_{K_2}(x_1, \ldots, x_n)$ не принадлежит множеству K_2.

Отметим, что все двухместные функции, значения которых совпадают со значениями столбцов из R_2, принадлежат K_2. Чтобы проверить, сохраняет ли функция $h(x_1, x_2)$ предикат R_2, необходимо показать, что

$$\text{для } \begin{pmatrix}\alpha_i\\ \beta_i\\ \gamma_i\\ \delta_i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha_j\\ \beta_j\\ \gamma_j\\ \delta_j\end{pmatrix} \in R_7 \text{ имеем } h\begin{pmatrix}\alpha_i & \alpha_j\\ \beta_i & \beta_j\\ \gamma_i & \gamma_j\\ \delta_i & \delta_j\end{pmatrix} \in R_7$$

для всех $i, j = \{1, \ldots, t\}$, где t — количество наборов в множестве R_2. Так как количество наборов в R_2 невелико, то проверить каждую двухместную функцию можно с помощью компьютерного счета. Реализованная компьютерная программа показала, что все двухместные функции, значения которых совпадают с наборами из предиката R_2, содержатся в множестве K_2.

Таким образом, подставляя эти функции на соответствующие места в f_{K_2}, получим двухместную функцию $g(x_1, x_2)$. Все возможные значения функции g разобьем на два варианта:

(i) восемь двоичных функций

x_1	x_2	$g(x_1,x_2)$							
0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1	1	1	0

(ii) функции, возвращающие значения $-$ и $\nu \in \{0, 1\}$:

x_1	x_2	$g(x_1,x_2)$											
0	0	$-$	$-$	$-$	ν	ν_1	ν_1	ν	ν_1	ν_1	ν	ν_1	ν_1
0	1	ν	ν_1	ν_1	$-$	$-$	$-$	ν_1	ν	ν_2	ν_1	ν	ν_2
1	0	ν_1	ν	ν_2	ν_1	ν	ν_2	$-$	$-$	$-$	ν_2	ν_2	ν
1	1	ν_2	ν_2	ν	ν_2	ν_2	ν	ν_2	ν_2	ν	$-$	$-$	$-$

где $\nu_1, \nu_2 \in \{*, 0, 1, -\}$;

Случай (i). Так как перестановка строк не меняет предикат R_2, то достаточно рассмотреть один вариант. Пусть $g(x_1, x_2) = (0001)$. По замечанию 1 имеем все булевы функции. Осталось получить функцию, содержащую все четыре значения. Ее получим следующим образом:

$$\begin{matrix}0\\0\\0\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}- & 0\\ - & 0\\ - & 1\\ - & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-\\-\end{pmatrix}; \quad \begin{matrix}0\\1\\1\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\\ - & 0\\ - & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-\\1\end{pmatrix}; \quad \begin{matrix}0\\1\\-\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & *\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-\\*\end{pmatrix}.$$

Случай (ii). Как и в первом случае, достаточно рассмотреть только один вариант. Пусть $g(x_1, x_2) = (-\,\nu\,\nu_1\,\nu_2)$. Подставляя в функцию g аргумент 0 вместо переменной x_1, получим $g(x) = (-\nu)$. Пусть $\nu = 0$; случай, когда $\nu = 1$, доказывается двойственным образом. Функцией

(-0) и суперпозициями

$$\begin{matrix} - \\ 0 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ - \end{pmatrix}; \qquad \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ - & 0 \\ - & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ - \\ - \end{pmatrix};$$

$$\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ - \\ - \end{matrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ - & 0 \\ - & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ - \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{matrix} 1 \\ - \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & - \\ 0 & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

получим все множество булевых функций и сведем к случаю (i). □

4. Заключение. В данной работе рассмотрена задача нахождения предполных множеств мультифункций ранга 2 относительно S_I^*-замыкания. Введены два множества мультифункций, описанных на языке сохранения предиката функцией. Первое множество мультифункций сохраняет двухместный предикат, второе — четырехместный. Доказаны их S_I^*-замкнутость и предполнота. Для доказательства предполноты множеств приведен пример полного множества. Следующим этапом исследования является нахождение всех предполных множеств и получение критерия полноты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пантелеев В. И., Тагласов Э. С.* О принадлежности мультифункций ранга два ES_I^*-предполным множествам// Вестн. Бурят. гос. ун-та. Мат. Информ. — 2021. — № 2. — С. 3–16.
2. *Пантелеев В. И., Тагласов Э. С.* ES_I-Замыкание мультифункций ранга 2: критерий полноты, классификация и типы базисов// Интел. сист. Теор. прилож. — 2021. — *25*, № 2. — С. 55–80.
3. *Marty F.* Sur une generalization de la notion de groupe// in: Congres des Mathematiciens Scandinaves. — Stockholm, 1934. — P. 45–49.
4. *Doroslovački R., Pantović J., Vojvodić G.* One interval in the lattice of partial hyperclones// Czechoslovak Math. J. — 2005. — *130*, № 55. — P. 719–724.
5. *Pouzet M., Rosenberg I.* Small clones and the projection property// Algebra Univ. — 2010. — № 63. — С. 37–44.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке гранта Иркутского государственного университета для молодых ученых, проект № 091-23-304 «Критерий S_I^*-полноты мультиопераций ранга 2».

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Тагласов Эдуард Станиславович (Taglasov Eduard Stanislavovich)
Иркутский государственный университет
(Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)
E-mail: `taglasov1@gmail.com`