ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 208 (2022). С. 3–10
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-208-3-10

УДК 517.968.2

О ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМАХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА

© 2022 г. **М. В. БУЛАТОВ, Л. С. СОЛОВАРОВА**

Аннотация. Рассматриваются двумерные системы интегральных уравнений Вольтерра первого рода. Хорошо изучен случай, когда путем дифференцирования уравнений получают систему интегральных уравнений второго рода. В работе рассмотрен случай, когда указанный подход дает систему интегральных уравнений с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью. В терминах матричных пучков сформулированы достаточные условия существования единственного гладкого решения.

***Ключевые слова*:** двумерное интегральное уравнение типа Вольтерра, интегро-алгебраическое уравнение, матричный пучок.

ON TWO-DIMENSIONAL SYSTEMS OF VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND

© 2022 **M. V. BULATOV, L. S. SOLOVAROVA**

Abstract. In this paper, we consider two-dimensional systems of Volterra integral equations of the first kind. The case where a system of integral equations of the second kind is obtained by differentiating the equations is well studied. We examine the case where this approach leads to a system of integral equations with an degenerate matrix of the principal part. We formulate sufficient conditions for the existence of a unique smooth solution in terms of matrix pencils.

***Keywords and phrases*:** two-dimensional integral equation of Volterra type, integro-algebraic equation, matrix pencil.

***AMS Subject Classification*:** 35R09, 45Fxx, 45Dxx

1. Введение. В настоящей работе рассмотрены системы линейных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра

$$\int_0^t \int_0^x K(t,x,\tau,s)u(\tau,s)dsd\tau = \varphi(t,x), \quad (t,x) \in \Omega = [0,T] \times [0,X], \tag{1}$$

где $K(t,x,\tau,s)$ — матрица-ядро размерности $(n \times n)$, $u(t,x)$ — искомая, $\varphi(t,x)$ — заданная n-мерные вектор-функции. Здесь проведено исследование систем (1) с условием

$$\det K(t,x,t,x) \equiv 0. \tag{2}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 20-51-S52003, 20-51-54003.

К настоящему времени системы вида (1) практически не изучены. Исключением являются некоторые частные случаи, например, $K(t,x,\tau,s)$ — функция, причем существуют такие минимальные целые неотрицательные числа r, q, что суперпозиция оператора $\dfrac{\partial^q}{\partial x^q}\dfrac{\partial^r}{\partial t^{qr}}$ с уравнением (1) дает интегральное двумерное уравнение Вольтерра второго рода. Другой случай это когда $\det K(t,x,t,x) \not\equiv$ при всех $(t,x) \in \Omega$.

К близким по приведенным здесь исследованиям относятся статьи, посвященные интегро-алгебраических уравнений (ИАУ). По данной тематике см., например, [1, 3, 10–16, 18–20] и приведенную там библиографию. В работах [13, 14] проведено исследование на предмет существования и единственности решения ИАУ и предложен метод их решения, основанный на простейшей неявной кубатурной формуле. В статье [4] рассмотрены одномерные системы линейных интегральных уравнений типа Вольтерра с тождественно вырожденной матрицей-ядром на диагонали. Для таких систем сформулированы достаточные условия существования единственного достаточно гладкого решения, предложены и обоснованы численные методы решения первого и второго порядков.

Относительно исследования системы (1) на предмет существования и единственности решения с условием (2) авторам неизвестны результаты. Этот факт и послужил мотивацией для проведения данного исследования.

2. Постановка задачи и ее свойства. Рассмотрим систему (1) с условием (2). Здесь и всюду в дальнейшем изложении предполагается, что элементы матрицы $K(t,x,\tau,s)$ и правой части $\varphi(t,x)$ обладают той гладкостью, которая необходима для проведения всех выкладок.

Данные системы уравнений принципиально отличаются от уравнений Вольтерра второго и первого родов. Эти системы могут иметь множество решений, а могут и не иметь решения в классе достаточно гладких функций; кроме того, решение (при корректно заданной правой части (1)) может зависеть от высоких производных (смешанных) входных данных.

Приведем примеры. В ряде примеров двойной интеграл заменен на повторный. Отметим, что порядок интегрирования может быть изменен. Это возможно в силу гладкости входных данных и теоремы Фубини [7].

Пример 1. Рассмотрим систему уравнений

$$\int_0^t\int_0^x \begin{pmatrix} a_{11}(\tau,s) & (t-\tau)(x-s) & 0 \\ 0 & a_{22}(\tau,s) & (t-\tau)(x-s) \\ (t-\tau)(x-s) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(\tau,s) \\ u_2(\tau,s) \\ u_3(\tau,s) \end{pmatrix} ds d\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(t,x) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Будем предполагать, что функции $a_{11}(t,x)$, $a_{22}(t,x)$, $f(t,x)$ обладают той гладкостью, которая необходима для проведения выкладок. Кроме этого будем считать, что правая часть $f(t,x)$ задана корректно.

Дифференцируя дважды третье уравнение по t, затем дважды по x, получим

$$u_1(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t,x). \tag{4}$$

Подставляя это значение в первое уравнение (3), будем иметь

$$\int_0^t\int_0^x a_{11}(\tau,s)u_1(\tau,s) + (t-\tau)(x-s)u_2(\tau,s) = 0. \tag{5}$$

Аналогично, дифференцируя дважды это уравнение сначала по t, затем по x, получим

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(a_{11}(t,x)u_1(t,x)) + u_2(t,x) = 0,$$

или, учитывая (4) и достаточную гладкость данных,

$$u_2 = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(a_{11}(t,x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t,x)).$$

Проводя такие же выкладки для второго уравнения, имеем

$$u_3 = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(a_{22}(t,\tau)(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}a_1(t,\tau)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(t,x))).$$

У этого примера ранг $K(t,x,t,x)$ равен

(i) двум, если $a_{11}(t,x)a_{22}(t,x) \neq 0$ при всех $(t,s) \in \Omega$;
(ii) единице в тех точках $(t,x) \in \Omega$, где $a_{11}(t,x) = 0$ или $a_{22}(t,x) = 0$;
(iii) нулю, если $a_{11}(t,x) = a_{22}(t,s) \equiv 0$.

Однако в этом случае точки перемены ранга матрицы $K(t,x,t,x)$ не являются сингулярными. Существование единственного непрерывного решения данного примера гарантирует корректно заданная правая часть и достаточная гладкость, по совокупности аргументов, функций $a_{11}(t,x)a_{22}(t,s)$ и $f(t,x)$.

Следующие два примера приведены для случая, когда $K(t,x,t,x) = k(t,\tau)l(x,s)$ и вектор-функции $u(t,x)$, зависящей только от одного аргумента, т.е. $u(t,x) = u(x)$. Тогда исходную систему, с учетом гладкости входных данных, можно записать в виде

$$\int_0^t\int_0^x K(t,x,t,x)u(\tau,s)dsd\tau = \int_0^t k(t,\tau)(\int_0^x l(x,s)u(s)ds)d\tau = \varphi(t,x). \tag{6}$$

Рассмотрим однородную задачу (6), у которой внутренний интеграл равен нулю, т.е.

$$\int_0^x l(x,s)u(s) = 0, \quad s \in [0,X]. \tag{7}$$

Если данная система уравнений имеет нетривиальное решение, то и однородная система (6) имеет ненулевое решение.

Пример 2. Легко непосредственно проверить, что система интегральных уравнений

$$\int_0^x \begin{pmatrix} s-2(x-s) & 1+x-2s \\ x-s & x-s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{pmatrix} ds = 0, \quad s \in [0,1], \tag{8}$$

имеет множество решений вида

$$u_1 = \begin{cases} 0, & s \in [0,1/2], \\ c\sqrt{2s-1}, & s \in [1/2,1], \end{cases} \qquad u_2 = \begin{cases} 0, & s \in [0,1/2], \\ -c\sqrt{2s-1}, & s \in [1/2,1]. \end{cases}$$

Таким образом, и система

$$\int_0^t\int_0^x k(t,\tau)l(x,s)u(s)dsd\tau = 0,$$

у которой матрица $l(x,s)$ определена из формулы (8), имеет множество решений.

Пример 3. Однородная система интегральных уравнений вида (6) с матрицей

$$l(x,s) = \begin{pmatrix} a & b(x-s) \\ c(x-s) & d(x-s)^2 \end{pmatrix}, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0, \quad d \neq 0, \tag{9}$$

при условии $2ad - cb = 0$ имеет множество решений при любой матрице $k(t,\tau)$. В самом деле, система интегральных уравнений (внутренний интеграл)

$$\int_0^x \begin{pmatrix} a & b(x-s) \\ c(x-s) & d(x-s)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

эквивалентна системе

$$au_1(x) + b\int\limits_0^x u_2(s)ds = 0, \quad cu_1 + 2d\int\limits_0^x u_2(s)ds = 0. \tag{10}$$

Дифференцируя первое уравнение (10) один раз, а второе — дважды, находим

$$\begin{cases} au_1'(x) + bu_2(x) = 0, \\ cu_1'(x) + 2du_2(x) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Учитывая условие $2ad - cb = 0$, получим, что данная система, а следовательно, и система (10), и исходные интегральные уравнения имеют множество решений.

Пример 4. Система интегральных уравнений вида

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^x \begin{pmatrix} 1 & K(t,x,\tau,s) \\ (t-\tau)(x-s) & (t-\tau)(x-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(\tau,s) \\ u_2(\tau,s) \end{pmatrix} dsd\tau = \begin{pmatrix} \varphi_1(t,x) \\ \varphi_2(t,x) \end{pmatrix}, \quad (t,x)\in\Omega, \tag{12}$$

имеет единственное решение при корректно заданной правой части и при $K(t,x,t,x) \neq 1$ для всех $(t,x)\in\Omega$. В самом деле, дифференцируя первое уравнение (12) по t, а затем по x, получим

$$u_1(t,x) + K(t,x,t,x)u_2(t,x) + \int\limits_0^t K_t'(t,x,\tau,x)u_2(\tau,x)d\tau +$$
$$+\int\limits_0^x K_x'(t,x,t,s)u_2(t,s)ds + \int\limits_0^t\int\limits_0^x K_{tx}''(t,x,\tau,s)u_2(\tau,s)dsd\tau = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1(t,x). \tag{13}$$

Дифференцируя второе уравнение (12) по t, а затем дважды по x, получим

$$u_1(t,x) + u_2(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi_2(t,x). \tag{14}$$

Объединяя уравнения (13) и (14) в систему, находим

$$\begin{pmatrix} 1 & K(t,x,t,x) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1(t,x) \\ u_2(t,x) \end{pmatrix} + \int\limits_0^t \begin{pmatrix} 0 & K_t'(t,x,\tau,x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1(\tau,x) \\ u_2(\tau,x) \end{pmatrix} d\tau +$$
$$+\int\limits_0^x \begin{pmatrix} 0 & K_x'(t,x,t,s) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1(t,s) \\ u_2(t,s) \end{pmatrix} ds + \int\limits_0^t\int\limits_0^x \begin{pmatrix} 0 & K_{tx}''(t,x,\tau,s) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1(\tau,s) \\ u_2(\tau,s) \end{pmatrix} dsd\tau =$$
$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial t}\varphi_1(t,x) \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi_2(t,x) \end{pmatrix}. \tag{15}$$

В силу условия $K(t,x,t,x) \neq 1$, $(t,x)\in\Omega$, матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & K(t,x,t,x) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

является невырожденной, т.е. (15) является системой интегральных уравнений второго рода, которое имеет единственное решение.

Пример 5. Однородная система

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^x \begin{pmatrix} 1 & t-\tau \\ x-s & (t-\tau)(x-s) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1(\tau,s) \\ u_2(\tau,s) \end{pmatrix} dsd\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

имеет множество решений. В самом деле, действуя на уравнения (16) операторами

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

соответственно, получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u_1(t,x) + u_2(t,x) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}u_1(t,x) + u_2(t,x) = 0 \end{cases},$$

которая имеет множество решений. Следовательно, и первоначальная задача имеет множество решений.

Приведем заключительный пример.

Пример 6. Система (1) с матрицей размера (4×4) вида

$$K(t,x,\tau,s) = \mathrm{diag}(1, t-\tau, x-s, (t-\tau)(x-s) \tag{17}$$

имеет единственное решение

$$u(t,x) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\varphi_1(t,x),\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial x}\varphi_2(t,x),\ \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi_3(t,x),\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi_4(t,x)\right)^\top$$

при корректно заданной правой части.

Итак, данные примеры показывают принципиальное отличие уравнений (1) с условием (2) от стандартных систем интегральных уравнений Вольтерра первого рода, у которых $\det K(t,x,t,x) \neq 0$, $(t,x) \in \Omega$.

В дальнейшем нам потребуются некоторые факты из теории матричных пучков и матричных полиномов.

Определение 1 (см. [6])**.** Выражение вида $\lambda A(t,x) + B(t,x)$, где $A(t,x)$, $B(x,s)$ — $(m \times n)$-матрицы, λ — скалярный параметр, $(t,s) \in \Omega[0,T] \times [0,X]$, называется матричным пучком. Матричный пучок является регулярным, если $m = n$ и $\det(\lambda A(t,x) + B(t,x) \not\equiv 0$ при всех $(t,s) \in \Omega$.

Определение 2 (см. [9])**.** Регулярный матричный пучок $\lambda A(t,x)+B(t,x)$ удовлетворяет критерию «ранг-степень» (имеет индекс 1), если $\mathrm{rank}\, A(t,x) = k = \mathrm{const}$ для всех $(t,x) \in \Omega$ и

$$\det(\lambda A(t,x) + B(t,x)) = a_k(t,x)\lambda^k + a_{k-1}(t,x)\lambda^{k-1} + \ldots + a_0(t,x),$$

где $a_k(t,x) \neq 0$ при всех $(t,x) \in \Omega$.

Определение 3. Будем говорить, что двупараметрический матричный полином

$$\lambda\xi A_0(t,x) + \lambda A_1(t,x) + \xi A_2(t,x) + A_3(t,x),$$

где λ и ξ — скалярные параметры, имеет простую структуру в области Ω, если выполнены следующие условия:

(i) $\mathrm{rank}\, A_0(t,x) = r_0 = \mathrm{const}$ при всех $(t,x) \in \Omega$;
(ii) $\mathrm{rank}(A_0(t,x)|A_1(t,x)) = r_0 + r_1 = \mathrm{const}$ при всех $(t,x) \in \Omega$;
(iii) $\mathrm{rank}(A_0(t,x)|A_1(t,x)|A_2(t,x)) = r_0 + r_1 + r_2 = \mathrm{const}$ при всех $(t,x) \in \Omega$;
(iv) $\det\big(\lambda\xi A_0(t,x)+\lambda A_1(t,x)+\xi A_2(t,x)+A_3(t,x)\big) = \lambda^{r_0+r_1}\xi^{r_0+r_2}\alpha_0(t,x)+\lambda^{r_0+r_1-1}\xi^{r_0+r_2}\alpha_1(t,x)+\lambda^{r_0+r_1}\xi^{r_0+r_2-1}\alpha_2(t,x)+\ldots$, где $\alpha_0(t,x), \alpha_1(t,x), \alpha_2(t,x), \ldots$ — функции, причем $\alpha_0(t,x) \neq 0$ при всех $(t,x) \in \Omega$.

Если матрица $A_1(t,x)$ (или $A_2(t,x)$) тождественно нулевая и исходные матрицы зависят только от одного аргумента, то такой случай был исследован в [5].

Если матричный полином $\lambda\xi A_0(t,x) + \lambda A_1(t,x) + \xi A_2(t,x) + A_3(t,x)$ имеет простую структуру, то имеют место следующие утверждения:

(a) при $A_1(t,x) = A_2(t,x) \equiv 0$, или $A_1(t,x) = A_3(t,x) \equiv 0$, или $A_2(t,x) = A_3(t,x) \equiv 0$, будем иметь матричные пучки (соответственно $\omega A_0(t,x) + A_2(t,x)$, $(\lambda A_0(t,x) + A_2(t,x))$, $\lambda(\xi A_0(t,x) + A_2(t,x))$, где $\omega = \lambda\xi$), удовлетворяющие критерию «ранг-степень»;

(b) при $\lambda = 0$ или $\xi = 0$, будем иметь матричные пучки $\xi A_2(t,x) + A_3(t,x)$ или $\lambda A_1(t,x) + A_3(t,x)$, которые удовлетворяют критерию «ранг-степень».

Лемма 1 (см. [9]). *Если матричный пучок $\lambda A(t,x) + B(t,x)$ удовлетворяет критерию «ранг-степень», матрица $A(t,x)$ имеет блочный вид*

$$\begin{pmatrix} A_{11}(t,x) & A_{12}(t,x) \\ A_{21}(t,x) & A_{22}(t,x) \end{pmatrix},$$

где $\operatorname{rank}(A_{11}(t,x)|A_{12}(t,x)) = r = \mathrm{const}$ в области $\Omega = [0,T] \times [0,X]$, то существует такая невырожденная $(n \times n)$-матрица $P(t,x)$, элементы которой имеют ту же гладкость, что и элементы матриц $A(t,x)$, $B(t,x)$, что

$$P(t,x)(\lambda A(t,x) + B(t,x)) = \lambda \begin{pmatrix} A_1(t,x) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1(t,x) \\ B_2(t,x) \end{pmatrix}. \qquad (18)$$

Здесь $A_1(t,x)$, $B_1(t,x)$ — $(r \times n)$-матрицы, $B_2(t,x)$ — $((n-r) \times n)$-матрица и

$$\operatorname{rank} A_1(t,x) = r = \mathrm{const}, \quad (t,x) \in \Omega.$$

Лемма 2. *Если матричный пучок(18) удовлетворяет критерию «ранг-степень» в области Ω и $\operatorname{rank} A_1(t,x) = r = \mathrm{const}$, то*

$$\det \begin{pmatrix} A_1(t,x) \\ cB_2(t,x) \end{pmatrix} \neq 0, \quad (t,x) \in \Omega$$

для любого скаляра $c \neq 0$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству в [13].

Приведем следующий факт о системах интегральных уравнений Вольтерра.

Утверждение 1. *Система интегральных уравнений Вольтерра*

$$u(t,x) + \int_0^t L(t,x,\tau,x)u(t,x)d\tau + \int_0^x M(t,x,\tau,s)u(t,s)ds + \\ + \int_0^t \int_0^x N(t,x,\tau,s)u(t,s)dsd\tau = \Psi(t,x), \qquad (19)$$

где $L(\cdot)$, $M(\cdot)$, $N(\cdot)$ — $(n \times n)$-матрицы с непрерывными элементами, $\Psi(t,x)$ — n-мерная вектор-функция с непрерывными элементами, имеет единственное непрерывное решение.

Доказательство этого утверждения вытекает из принципа сжатых отображений (см. [7, 8]).

Вернемся к исходной системе (1) с условием (2). Приведем достаточные условия существования единственного непрерывного решения данной задачи.

Утверждение 2. *Предположим, что для однородной задачи* (1) *с условием* (2) *выполнены следующие условия*:

(1) *элементы матриц $K(\cdot)$ и $\varphi(\cdot)$ обладают достаточной гладкостью по совокупности элементов;*
(2) $\varphi(0,x) = \varphi(t,0)$*;*
(3) *матричный полином*

$$R(\lambda,\xi,t,x) = \lambda\xi K(t,x,t,x) + \xi K'_t(t,x,t,x)\big|_{\tau=t} + \lambda K'_x(t,x,t,s)\big|_{s=x} + K''_{tx}(t,x,\tau,s)\big|_{\tau=t,s=x}$$

имеет простую структуру:

$$K'_t(t,x,t,x)\big|_{\tau=t} \equiv 0; \quad K'_x(t,x,t,s)\big|_{s=x} \equiv 0; \quad K'_t(t,x,t,x)\big|_{\tau=t} = K'_x(t,x,t,s)\big|_{s=x} \equiv 0.$$

Тогда исходная система имеет единственное непрерывное решение.

Доказательство этого факта основано на блочном представлении исходных матриц, которое обобщает результаты [13].

Для неоднородной задачи (1) с условием (2) справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3. *Пусть для задачи* (1) *выполнены условия утверждения* 2. *Если правая часть задана корректно, т.е. задача имеет решение, то это решение единственно в области* Ω.

Доказательства этих утверждений основаны на построении дифференциального оператора

$$D = D_0(t,x)\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x} + D_1(t,x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial x} + D_2(t,x)\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_2(t,x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \tag{20}$$

суперпозиция которого с исходной системой (1) дает систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода вида (19). При конструировании оператора (20) использованы результаты их теории проекторов и обобщенных обратных матриц [2, 4, 17].

Приведем анализ примеров. В примере 1 матричный полином

$$R(\lambda,\xi,t,x) = \lambda\xi K(t,x,t,x) + \xi K'_t(t,x,t,x)\big|_{\tau=t} + \lambda K'_x(t,x,t,s)\big|_{s=x} + K''_{tx}(t,x,\tau,s)\big|_{\tau=t,s=x}$$

не имеет простой структуры. В самом деле, ранг матрицы $K(t,x,t,x)$ может равняться либо нулю, либо единице, либо двум, в то время как определитель матрицы $R(\lambda,\xi,t,x)$ не зависит от λ и ξ, он всегда равен единице.

Пример 2 является одномерной системой интегральных уравнений. В этом случае мы имеем не матричный полином $R(\lambda,\xi,t,x)$, а матричный пучок $\lambda K(x,x) + K'_x(x,s)\big|_{s=x}$. У данного пучка ранг матрицы $K(x,x)$ равен 1 при всех $x \in [0,1]$,

$$\det \lambda K(x,x) + K'_x(x,s)\big|_{s=x} = \lambda(2x-1) - 3.$$

При $x = 1/2$ имеем $2x - 1 = 0$; таким образом, в точке $x = 1/2$ нарушено условие

$$\det(\lambda K(x,x) + K'_x(x,s))\big|_{s=x} = a_1(x)\lambda^k + a_0,$$

где $a_1(x) \neq 0$. Точка $x = 1/2$ является для данного примера сингулярной.

В примере 3 матричный пучок $\lambda K(x,x) + K'_x(x,s)\big|_{s=x}$ не обладает свойством «ранг-степень». В самом деле, ранг матрицы $K(x,x)$ равен 1 при всех $x \in [0,1]$ и $a \neq 0$, $\det \lambda K(x,x) + K'_x(x,s)\big|_{s=x} = bc$, поэтому, как и в предыдущем случае, гарантировать существование единственного решения нельзя.

В примере 4 матричный полином имеет вид

$$\begin{aligned} R(\lambda,\xi,t,x) &= \lambda\xi K(t,x,t,x) + \xi K'_t(t,x,t,x)\big|_{\tau=t} + \lambda K'_x(t,x,t,s)\big|_{s=x} + \\ &+ K''_{tx}(t,x,\tau,s)\big|_{\tau=t,s=x}\lambda\xi \begin{pmatrix} 1 & K(t,x,t,x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & K'_t(t,x,\tau,x)\big|_{\tau=t} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \xi \begin{pmatrix} 0 & K'_x(t,x,t,\xi)\big|_{\xi=x} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda\xi \begin{pmatrix} 0 & K''(t,x,\tau,\xi)\big|_{\tau=t,\xi=x} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Если $K(t,x,t,x) \neq 1$ при всех $(t,x) \in \Omega$, то данный матричный полином имеет простую структуру, а при $K(t,x,t,x) = 1$ матрица $R(\lambda,\xi,t,x)$ будет тождественно вырожденной.

Точно так же можно показать, что в примере 5 матричный полином $R(\lambda,\xi,t,x)$ не имеет простой структуры, так как матрица

$$\lambda\xi K(t,x,t,x) + \xi K'_t(t,x,t,x)\big|_{\tau=t} + \lambda K'_x(t,x,t,s)\big|_{s=x} + K''_{tx}(t,x,\tau,s)\big|_{\tau=t,s=x}$$

является тождественно вырожденной. Аналогично можно показать, что в примере 6 матричный полином будет иметь простую структуру.

3. Заключение. В работе сформулированы достаточные условия существования решения двумерных интегральных уравнений Вольтерра первого рода в терминах матричных пучков. В дальнейшем планируется получить обобщение этих результатов (формулировка достаточных условий) на многомерные системы интегральных уравнений, а также на системы со слабой особенностью

$$\int_0^t \int_0^x (t-\tau)^{-\alpha}(x-s)^{-\beta} K(t,x,\tau,s)u(\tau,s)ds d\tau = \varphi(t,x), \quad 0 \leqslant \alpha < 1, \quad 0 \leqslant \beta < 1.$$

Также планируется разработка и обоснование численных методов решения задачи (1), основанных на кубатурных формулах средних прямоугольников.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ботороева М. Н.* Моделирование развивающихся систем на основе интегральных уравнений Вольтерра/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Бурят. гос. ун-т, 2019.
2. *Бояринцев Ю. Е.* Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — Новосибирск: Наука, 1980.
3. *Будникова О. С.* Численное решение интегро-алгебраических уравнений многошаговыми методами/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — МГУ, 2015.
4. *Булатов М. В.* Численное решение систем интегральных уравнений Вольтерра первого рода I рода// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1998. — *38*, № 4. — С. 607–611.
5. *Булатов М. В.* Применение матричных полиномов к исследованию линейных дифференциально-алгебраических уравнений высокого порядка// Диффер. уравн. — 2008. — *44*, № 10. — С. 1299–1306.
6. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1966.
7. *Колмогоров А. Н.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Физматлит, 2004.
8. *Краснов М. Л.* Интегральные уравнения. Введение в теорию. — М.: Наука, 1975.
9. *Чистяков В. Ф.* Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. — Новосибирск: Наука, 1996.
10. *Balakumar V.* Numerical solution of Volterra integral-algebraic equations using block pulse functions// Appl. Math. Comp. — 2015. — *263*. — P. 165–170.
11. *Brunner H.* Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functioal Equations. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004.
12. *Brunner H.* Volterra Integral Equations: An Introduction to Theory and Applications. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017.
13. *Bulatov M. V.* Two-dimensional integral-algebraic systems: Analysis and computational methods// J. Comput. Appl. Math. — 2011. — *236*, № 2. — P. 132–140.
14. *Bulatov M. V.* Existence and uniqueness of solutions to weakly singular integral, algebraic and integro-differential equations// Centr. Eur. J. Math. — 2014. — *12*, № 2. — P. 308–321.
15. *Bulatov M. V.* Construction of implicit multistep methods for solving integral algebraic equations// Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. мат. Информ. Процессы управл. — 2019. — *1*, № 3. — С. 310–322.
16. *Hadizadeh M.* Jacobi spectral solution for integral-algebraic equations of index 2// Appl. Numer. Math. — 2011. — *61*. — P. 131–148.
17. *Lamour R., März R., Tischendorf C.* Differential-Algebraic Equations: A Projector- Based Analysis. — Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2013.
18. *Pishbin S.* The semi-explicit Volterra integral algebraic equations with weakly singular kernels: the numerical treatments// J. Comput. Appl. Math. — 2013. — *245*. — P. 121–132.
19. *Pishbin S.* Optimal convergence results of piecewise polynomial collocation solutions for integral-algebraic equations of index 3// J. Comput. Appl. Math. — 2015. — *279*. — P. 209–224.
20. *Pishbin S.* Numerical solution and structural analysis of two-dimensional integral-algebraic equations// Numer. Algorithms. — 2016. — *73*, № 2. — P. 305–322.

Булатов Михаил Валерьянович

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск
E-mail: `mvbul@icc.ru`

Соловарова Любовь Степановна

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск
E-mail: `soleilu@mail.ru`