ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 234 (2024). С. 99–107
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-234-99-107

УДК 517.18

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ СФЕРИЧЕСКОЙ ТРИГОНОМЕТРИИ

© 2024 г. **Е. П. КРУГОВА**

Аннотация. В статье рассматриваются некоторые приложения аддитивных и мультипликативных диофантовых уравнений для синусов в задачах сферической тригонометрии.

Ключевые слова: сферическая тригонометрия, диофантовы уравнения, золотое сечение.

ON SOME PROBLEMS OF SPHERICAL TRIGONOMETRY

© 2024 **E. P. KRUGOVA**

Abstract. In this paper, we consider some applications of additive and multiplicative diophantine equations for sine functions to problems of spherical trigonometry.

Keywords and phrases: spherical trigonometry, diophantine equations, golden ratio.

AMS Subject Classification: 26A09

1. Формула двойного угла и «двойные радиусы». Первая задача, рассматриваемая в этой статье, формулируется следующим образом: найти радиус окружности на сфере, в которую можно вписать два разных правильных многоугольника с рациональными сторонами, т.е. сторонами, равными $(p/q)\cdot 360^\circ$, $p, q \in \mathbb{N}$. Предполагается, что эти многоугольники могут быть звездчатыми. Как известно,

$$\sin r = \frac{\sin a}{\sin A},$$

где r — радиус окружности, a — половина стороны многоугольника, A — половина угла в центре многоугольника, на который опирается эта сторона. Таким образом, чтобы получить два многоугольника с рациональными сторонами, требуется выполнение соотношения

$$\sin r = \frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B},$$

где все углы a, b, A, B рациональны. Бесконечная серия таких соотношений получается из формулы двойного угла (здесь сильно помогает то обстоятельство, что $\sin 30^\circ = 1/2$):

$$\sin 30^\circ \sin 2\alpha = \sin\alpha \sin(90^\circ - \alpha), \tag{1}$$

и из этого соотношения можно составить две пропорции и получить два «двойных радиуса» для любого рационального угла α (поскольку все остальные углы в этой формуле тоже будут рациональными).

Из двух соотношений двойного угла, если их удачно совместить, можно получить даже «тройной радиус», т.е. радиус круга, в который можно вписать целых три разных правильных многоугольника с рациональными сторонами:

$$\sin 72^\circ = 2\sin 36^\circ \sin 54^\circ, \quad \sin 36^\circ = 2\sin 18^\circ \sin 72^\circ;$$
$$\frac{\sin 36^\circ}{\sin 72^\circ} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 54^\circ} = \frac{\sin 18^\circ}{\sin 30^\circ} = \sin r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}. \tag{2}$$

ISSN 2782–4438

Этот пример замечателен еще тем, что здесь получились не просто рациональные стороны, а стороны, равные целым долям окружности: соответственно, $1/5$, $1/6$ и $1/10$ окружности у пятиконечной звезды, 10-конечной звезды и шестиугольника.

Поэтому возникают следующие вопросы:

(i) есть ли еще «двойные радиусы», не происходящие из формулы двойного угла;

(ii) есть ли другие «тройные радиусы»?

В следующем разделе будут найдены некоторые из них.

2. «Двойные» и «тройные» радиусы и аддитивные уравнения. Чтобы получить другие формулы «двойных» и «тройных» радиусов, можно воспользоваться формулами суммы конечных тригонометрических рядов с небольшим количеством слагаемых и знаменателями 5 и 7 (которые можно «зациклить»). Аддитивные и мультипликативные формулы для синусов легко преобразуются друг в друга, так что можно будет потом получить пропорцию из решения уравнения для суммы синусов. Оказывается, что решений аддитивных уравнений меньше (а пропорций из них получается гораздо больше), так что легче найти их.

Поэтому будем рассматривать уравнения следующего вида:

$$\sin A + \sin B = \sin C; \tag{3}$$

$$\sin A + \sin B + \sin C = \sin D; \tag{4}$$

$$\sin A + \sin B = \sin C + \sin D, \tag{5}$$

где углы $0 < A, B, C, D < 90^\circ$ рациональны. Бесконечную серию решений первого уравнения можно тоже получить из формулы двойного угла (она нам пригодится для задач из следующих разделов этой статьи):

$$\sin 30^\circ \sin 2\alpha = \sin\alpha \sin(90^\circ - \alpha);$$

$$\frac{1}{2}\Big(\cos(2\alpha - 30^\circ) - \cos(2\alpha + 30^\circ)\Big) = \frac{1}{2}\Big(\cos(90^\circ - 2\alpha) - \cos 90^\circ\Big)$$

или

$$\cos(90^\circ - 2\alpha) + \cos(2\alpha + 30^\circ) = \cos(2\alpha - 30^\circ),$$

и превратив косинусы в синусы и заменив 2α на β, получим:

$$\sin\beta + \sin(60^\circ - \beta) = \sin(120^\circ - \beta) = \sin(60^\circ + \beta), \tag{6}$$

где без ограничения общности можем положить $0 < \beta \leqslant 30^\circ$; в частности, для $\beta = 30^\circ$ получим решение $\sin 30^\circ + \sin 30^\circ = \sin 90^\circ$ уравнения (3).

Найдем теперь решения, получающиеся из сумм рядов. Воспользуемся формулами

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\Big(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\Big), \tag{7}$$

$$\sin\alpha\cos(2n+1)\alpha = \frac{1}{2}\Big(\sin(-2n)\alpha + \sin(2n+2)\alpha\Big) = \frac{1}{2}\Big(\sin(2n+2)\alpha - \sin(2n)\alpha\Big), \tag{8}$$

чтобы найти сумму ряда в духе (см. [7]):

$$\sin\alpha(\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha) = \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{2}(\sin 4\alpha - \sin 2\alpha) + \frac{1}{2}(\sin 6\alpha - \sin 4\alpha) = \frac{1}{2}\sin 6\alpha.$$

Если $6\alpha = 360^\circ + \alpha$, т.е. $\alpha = 72^\circ$, то получаем соотношение

$$\begin{gathered}\cos 72^\circ + \cos(3\cdot 72^\circ) + \cos(5\cdot 72^\circ) = \frac{1}{2};\\ \sin 18^\circ - \sin 54^\circ + 1 = \frac{1}{2}.\end{gathered} \tag{9}$$

Отсюда мы получаем два решения рассматриваемых уравнений:

$$\sin 18^\circ + \sin 30^\circ = \sin 54^\circ; \tag{10}$$

$$\sin 18^\circ + \sin 90^\circ = \sin 30^\circ + \sin 54^\circ. \tag{11}$$

Если подставить (10) в (6), то можно получить еще по одному решению уравнений (4) и (5):

$$\sin 6^\circ + \sin 18^\circ + \sin 30^\circ = \sin 66^\circ, \tag{12}$$

$$\sin 30^\circ + \sin 78^\circ = \sin 42^\circ + \sin 54^\circ. \tag{13}$$

Аналогично, рассмотрим сумму

$$\sin\alpha(\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha) = \frac{1}{2}\sin 8\alpha,$$

$8\alpha = 360^\circ + \alpha$, $\alpha = 360^\circ/7$, и если снова преобразовать косинусы в синусы углов, которые меньше 90°, то получим еще одно соотношение:

$$\sin 30^\circ + \sin\frac{270^\circ}{7} = \sin\frac{90^\circ}{7} + \sin\frac{450^\circ}{7}. \tag{14}$$

Из соотношения (14), перенося слагаемые на другую сторону и преобразуя суммы и разности синусов в произведения, можно получить шесть пропорций и, соответственно, шесть «двойных радиусов». Это будут радиусы правильных звездчатых 42-угольников разных конфигураций.

Гораздо больше разнообразных соотношений мы получим для углов со знаменателем 5 из уравнений (10), (11). Первое из них (для двух «двойных радиусов» не из формулы двойного угла) можно получить даже из соотношения (2), если взять те две части пропорции, которые содержат 30°, и воспользоваться формулой двойного угла для самого угла 30°:

$$\sin 18^\circ \sin 54^\circ = \sin^2 30^\circ = \frac{1}{4} = \sin 15^\circ \sin 75^\circ. \tag{15}$$

Из (10) получаем

$$\sin 54^\circ = \sin 18^\circ + \sin 30^\circ = 2\sin\frac{18^\circ + 30^\circ}{2}\cos\frac{30^\circ - 18^\circ}{2} = 2\sin 24^\circ \sin 84^\circ,$$

и снова можем перенести 2 на другую сторону и воспользоваться тем, что $\sin 30^\circ = 1/2$. Аналогичные операции проделаем с соотношением

$$\sin 18^\circ = \sin 54^\circ - \sin 30^\circ = 2\cos\frac{54^\circ + 30^\circ}{2}\sin\frac{54^\circ - 30^\circ}{2}$$

и окончательно получим:

$$\begin{aligned} \sin 18^\circ \sin 30^\circ &= \sin 12^\circ \sin 48^\circ, \\ \sin 54^\circ \sin 30^\circ &= \sin 24^\circ \sin 84^\circ. \end{aligned} \tag{16}$$

Из этих двух соотношений, делая пропорции и добавляя к ним соответствующие формулы двойного угла, можно получить еще четыре «тройных радиуса». Выпишем их все:

$$\begin{aligned} \sin R_1 &= \frac{\sin 12^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\sin 18^\circ}{\sin 48^\circ} = \frac{\sin 24^\circ}{\sin 78^\circ}; \quad \sin R_2 = \frac{\sin 6^\circ}{\sin 12^\circ} = \frac{\sin 24^\circ}{\sin 54^\circ} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 84^\circ}; \\ \sin R_3 &= \frac{\sin 12^\circ}{\sin 18^\circ} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 48^\circ} = \frac{\sin 42^\circ}{\sin 84^\circ}; \quad \sin R_4 = \frac{\sin 24^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\sin 48^\circ}{\sin 66^\circ} = \frac{\sin 54^\circ}{\sin 84^\circ}. \end{aligned} \tag{17}$$

Если в каждом из этих соотношений взять те члены, которые не содержат 30°, и изменить пропорцию, например,

$$\sin r = \frac{\sin 18^\circ}{\sin 24^\circ} = \frac{\sin 48^\circ}{\sin 78^\circ},$$

то можно получить еще четыре «двойных радиуса» не из формулы двойного угла.

Из самих соотношений (16) можно получить еще четыре «двойных радиуса», если приделать формулу двойного угла к ним самим, например:

$$\sin 18^\circ \sin 30^\circ = \sin 12^\circ \sin 48^\circ = \sin 9^\circ \sin 81^\circ,$$

$$\sin r_1 = \frac{\sin 9^\circ}{\sin 12^\circ} = \frac{\sin 48^\circ}{\sin 81^\circ}, \quad \sin r_2 = \frac{\sin 9^\circ}{\sin 48^\circ} = \frac{\sin 12^\circ}{\sin 81^\circ}$$

и для второго соотношения аналогично.

Еще два «двойных радиуса» не из формулы двойного угла можно получить из соотношения (11):

$$1-\sin 54^\circ=\frac{1}{2}-\sin 18^\circ,\quad \frac{1}{2}\Big(1-\cos 36^\circ\Big)=\frac{1}{2}\Big(\cos 60^\circ-\cos 72^\circ\Big),$$
$$\sin^2 18^\circ=\sin 66^\circ\sin 6^\circ,\quad \sin r=\frac{\sin 6^\circ}{\sin 18^\circ}=\frac{\sin 18^\circ}{\sin 66^\circ}$$

и для второго «двойного радиуса»

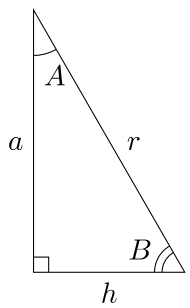
$$1+\sin 18^\circ=\frac{1}{2}+\sin 54^\circ,\quad \frac{1}{2}\Big(1+\cos 72^\circ\Big)=\frac{1}{2}\Big(\cos 60^\circ+\cos 36^\circ\Big),$$
$$\cos^2 36^\circ=\cos\frac{60^\circ+36^\circ}{2}\cos\frac{60^\circ-36^\circ}{2},$$
$$\sin^2 54^\circ=\sin 42^\circ\sin 78^\circ,\quad \sin r=\frac{\sin 42^\circ}{\sin 54^\circ}=\frac{\sin 54^\circ}{\sin 78^\circ}.$$

Таким образом, из соотношений с пятиугольной симметрией получилось 12 «двойных радиусов» не из формулы двойного угла и 5 «тройных радиусов».

Есть еще одно очевидное соотношение, в котором не только «двойной радиус», но и радиус, и сторона многоугольника рациональные: это квадрат со стороной 60° с радиусом описанной окружности 45°. Его с некоторой натяжкой тоже можно получить из аналогичного уравнения:

$$2\sin 30^\circ=\sin 30^\circ+\sin 30^\circ=\sin 90^\circ=2\sin 45^\circ\cos 45^\circ=2\sin^2 45^\circ.$$

3. «Двойственные» звезды. Аддитивные уравнения для синусов позволяют строить звездчатые многоугольники, которые в некотором смысле «двойственны» друг другу (а именно, у каждого из них сумма стороны и угла представляет собой рациональный угол, и сторона одного многоугольника равна углу другого, и наоборот).



r — радиус описанной окружности
a — половина стороны многоугольника
A — половина угла многоугольника
B — половина угла в центре многоугольника
h — «высота»

Сначала выразим сумму половины стороны и половины угла через сумму радиуса и высоты многоугольника, т.е. сумму радиусов вписанной и описанной окружности для этого правильного многоугольника (это выражение удобно тем, что если известно $r+h$, их потом легко «разделить» и найти радиус):

$$\sin(a+A)=\sin a\cos A+\cos a\sin A=$$
$$=(\sin B\sin r)\cdot(\cos h\sin B)+\frac{\cos B}{\sin A}\sin A=\sin^2 B\sin r\cos h+\cos B.$$

Здесь мы воспользовались известными формулами для прямоугольных сферических треугольников (см. [4, с. 192]). Далее,

$$\operatorname{tg} h=\operatorname{tg} r\cos B; \tag{18}$$
$$\sin h\cos r=\cos h\sin r\cos B; \tag{19}$$
$$\sin(h+r)=\sin h\cos r+\cos h\sin r=\cos h\sin r(1+\cos B). \tag{20}$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \sin(a+A) &= (1-\cos B)\sin(r+h)+\cos B, \\ \sin(r+h) &= \frac{1}{1-\cos B}\Big(\sin(a+A)-\cos B\Big). \end{aligned} \tag{21}$$

Используем аддитивное уравнение (3). Для первого многоугольника имеем $\cos B_1 = \cos a \cos A$; если поменяем угол и сторону местами, то для второго многоугольника $\cos B_2 = \cos A \sin a$, и если теперь их сложить, то получим

$$\cos B_1 + \cos B_2 = \cos a \sin A + \cos A \sin a = \sin(A+a),$$

где все углы рациональны, т.е. все такие конструкции можно получить из решений уравнения (3). Самым интересным примером здесь является, конечно, пара многоугольников, полученных из соотношения (10). Это треугольник (у этого треугольника $r+h = \arcsin \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$, первому «тройному радиусу») и пятиконечная звезда, и у них сумма стороны и угла $2a+2A = 108^\circ$ наименьшая среди фигур, которые можно получить из приведенных выше решений уравнения (3), потому что для соотношений из (6)

$$2a + 2A = 120^\circ + 2\beta > 120^\circ.$$

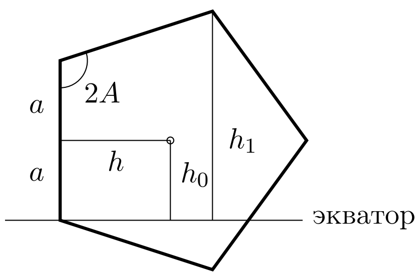
Из этого последнего соотношения можно получить, например, пару фигур, одна из которых — простой пятиугольник. Для него будет $a+A = 66^\circ$, а половина центрального угла второго многоугольника $B_2 = 84^\circ$. Если же одна из фигур — правильный треугольник ($B_1 = 60^\circ$), то и $B_2 = 60^\circ$ и это треугольник со стороной 90°, «двойственный» сам себе.

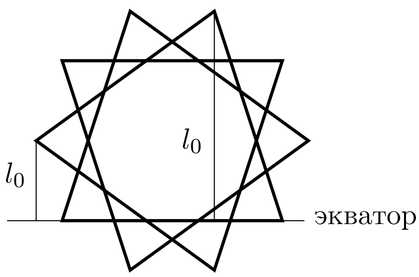
Приведем также формулу, позволяющую «разделить» радиус и высоту, если известна их сумма или разность:

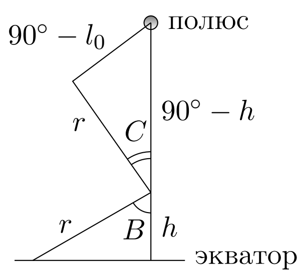
$$\cos B \operatorname{tg}^2 r \pm \left(\frac{1 \pm \cos B}{\operatorname{tg}(r \pm h)}\right) \operatorname{tg} r \mp 1 = 0; \tag{22}$$

она доказывается несложно.

С помощью формул из этого раздела также легко выражать широту центра правильного многоугольника, «поставленного» ребром перпендикулярно на экватор (h_0) и широту всех верхних углов правильного многоугольника, «положенного» одной стороной на экватор (разнообразные l_0):







Формулы для «ближнего верхнего угла» h_1 рассмотрим в п. 5.

Для h_0 из прямоугольного треугольника с углом в полюсе имеем:

$$\sin h_0 = \sin a \cos h = \sin r \sin B \cos h = (\sin r \cos h) \cdot \sin B. \tag{23}$$

Поэтому

$$\frac{\sin h_0}{\sin(r+h)} = \frac{\sin B}{1+\cos B} = \operatorname{tg}\frac{B}{2}. \tag{24}$$

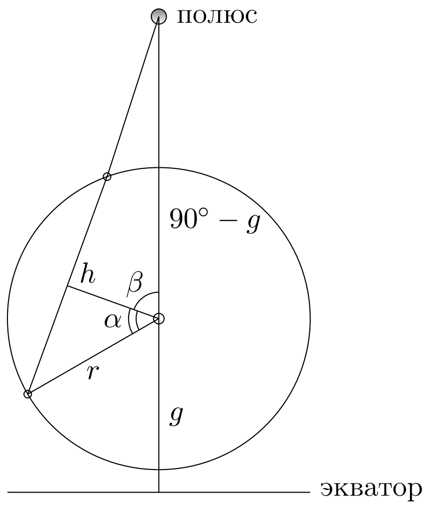
Для верхних углов лежащих многоугольников

$$\cos(90^\circ - l_0) = \sin l_0 = \cos r \cos(90^\circ - h) + \sin r \sin(90^\circ - h)\cos C = (\sin r \cos h)(\cos B + \cos C)$$

(здесь мы воспользовались формулой (19)). Таким образом,

$$\sin l_0 = \left(\frac{\cos B + \cos C}{\sin B}\right)\sin h_0 = \left(\frac{\cos B + \cos C}{1+\cos B}\right)\sin(r+h). \tag{25}$$

4. Многоугольники с диагоналями, идущими вдоль меридиана. Полученные соотношения можно применять для того, чтобы строить правильные многоугольники, несколько диагоналей которых идут вдоль меридианов.



Рассмотрим, что происходит для одной диагонали (см. рис.); здесь g — широта центра окружности, $90^\circ - g$ — расстояние от центра до полюса, r — радиус (описанной) окружности, h — «высота» (радиус вписанной окружности). Для них имеем:

$$\operatorname{tg} h = \operatorname{tg} r \cos\alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - g)\cos\beta;$$
$$\operatorname{tg} r \operatorname{tg} g = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha},$$

и если у нас есть две разные диагонали в одном и том же многоугольнике, идущие вдоль меридиана, то получится соотношение

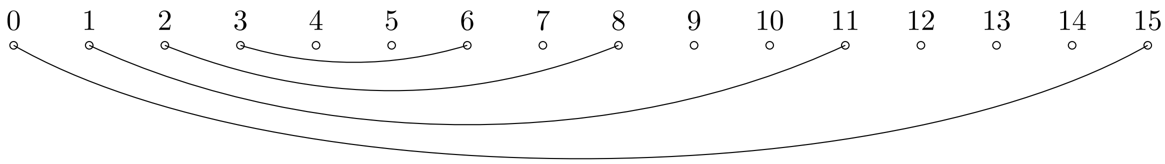
$$\operatorname{tg} r \operatorname{tg} g = \frac{\cos\beta_1}{\cos\alpha_1} = \frac{\cos\beta_2}{\cos\alpha_2},$$

где все α_i, β_i кратны некоторому наименьшему углу. Получилась такая же пропорция, как та, которая нужна для «двойного радиуса», только с косинусами вместо синусов. Очевидно, одно легко преобразуется в другое. В таком же качестве можно использовать и формулы «тройных радиусов». Здесь радиус окружности r и широта центра g оказываются связаны: если задать что-либо одно, то однозначно находится другое, чтобы можно было построить такой многоугольник, у которого эти несколько диагоналей идут вдоль меридианов. В следующих примерах $\alpha_i < \beta_i$, но если сделать наоборот, то полюс будет внутри многоугольника, а диагонали будут по-прежнему идти вдоль меридианов (и пересекаться в полюсе).

Например, соотношения для «первого тройного радиуса» с синусами (2) можно превратить в косинусы и использовать для построения 30-угольника, у которого большая диагональ и еще три других диагонали (с каждой стороны) идут вдоль меридиана:

$$\frac{\cos 54^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{\cos 60^\circ}{\cos 36^\circ} = \frac{\cos 72^\circ}{\cos 60^\circ}.$$

На следующем рисунке изображена схема соединения вершин в 30-угольнике с диагоналями, идущими вдоль меридианов, которая получается из этого соотношения:



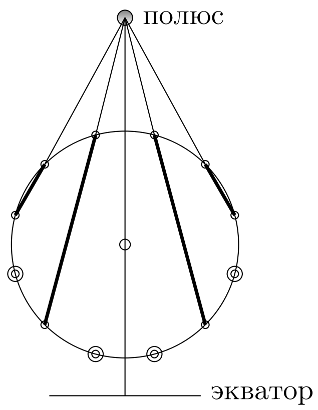
(здесь линия, соединяющая вершины 0 и 15, обозначает диаметр, проходящий по меридиану: «0» — верхняя вершина, «15» — нижняя). Шаг составляет 12°, дуга (т.е. диагональ вдоль меридиана) соединяет вершины под углами к направлению на полюс $\beta_i - \alpha_i$ и $\beta_i + \alpha_i$.

В этой конструкции получилось много вершин, соединенных ребрами, идущими вдоль меридианов. То же самое можно проделать и с четырьмя остальными «тройными радиусами», но там получатся 30-угольники, повернутые на 6°, у которых большая диагональ не проходит вдоль меридиана, или 60-угольники (и, следовательно, меньше вершин будет задействовано).

Если мы хотим построить такой многоугольник, в котором как можно больше вершин было бы задействовано в диагоналях, проходящих вдоль меридианов, можно воспользоваться формулой двойного угла (1) и выбирать угол α так, чтобы у него был большой общий делитель с $30°$. Самый большой общий делитель получится из формулы двойного угла для $30°$:

$$\sin 30° = 2 \sin 15° \sin 75°,$$

$$\frac{\cos 60°}{\cos 15°} = \frac{\cos 75°}{\cos 60°}.$$



Из этого соотношения получится 12-угольник (у которого, правда, большая диагональ не проходит по меридиану).

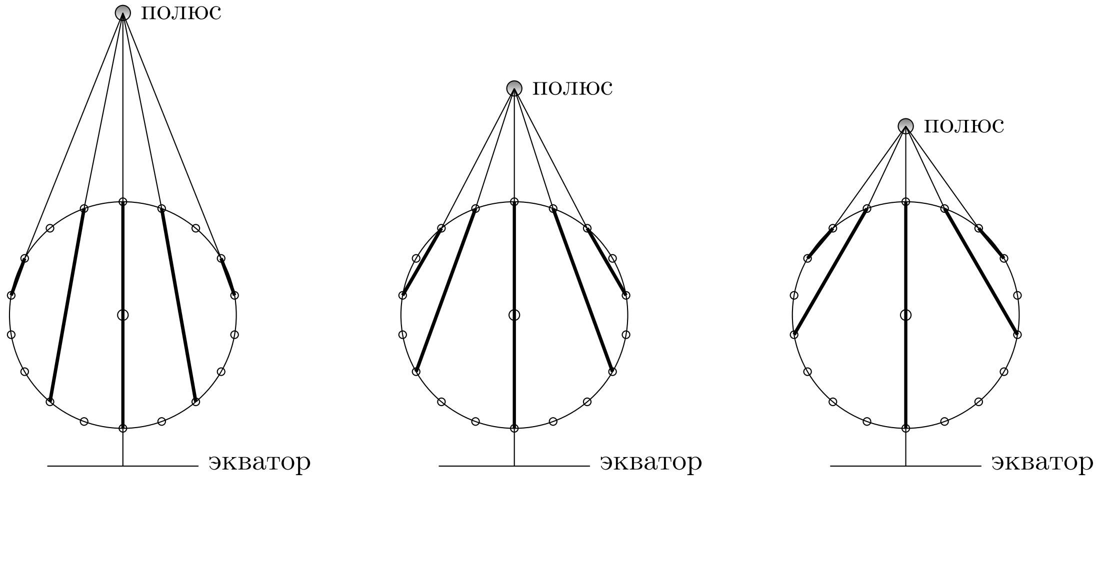
Следующий общий делитель — $10°$. Для него можно получить 18-угольники, тоже из формулы двойного угла:

$$\begin{aligned} \sin 20° &= 2\sin 10° \cos 10° &\quad\to\quad& \cos 60° \cos 70° = \cos 10° \cos 80°, \\ \sin 40° &= 2\sin 20° \cos 20° &\quad\to\quad& \cos 60° \cos 50° = \cos 20° \cos 70°, \\ \sin 80° &= 2\sin 40° \cos 40° &\quad\to\quad& \cos 60° \cos 10° = \cos 40° \cos 00°. \end{aligned}$$

Для $2\alpha = 60°$ формула двойного угла не содержательна: по сути, $\sin 60° = 2 \sin 30° \sin 60°$. Для каждого из этих трех соотношений можно сделать по 2 пропорции, но чтобы было задействовано как можно больше углов, надо выбирать те пропорции, в углах которых с каждой стороны "четность" совпадает, а именно:

$$\frac{\cos 70°}{\cos 10°} = \frac{\cos 80°}{\cos 60°}, \qquad \frac{\cos 60°}{\cos 20°} = \frac{\cos 70°}{\cos 50°}, \qquad \frac{\cos 50°}{\cos 10°} = \frac{\cos 60°}{\cos 40°},$$

иначе 18-угольники снова будут повернуты на $10°$ и большая диагональ не будет проходить по меридиану, или надо брать 36-угольники. Итак, получится три 18-угольника с двумя разными ребрами и диаметром, идущими вдоль меридиана, которые изображены на следующем рисунке:



5. Формула «ближнего верхнего угла». Найдем выражения широты ближнего верхнего угла через сторону многоугольника и наоборот:

$$\sin h_1 = \sin 2a \cos 2a(1-\cos 2A) = 2\sin 2a\cos 2a \sin^2 A = \\ = 2\sin 2a \cos 2a \frac{\cos^2 B}{\cos^a} = 4\cos^2 B \operatorname{tg} a \cos 2a.$$

Возводя это выражение в квадрат, окончательно получаем

$$\sin^2 h_1 = 16\cos^4 B\,\frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}\cos^2 2a. \tag{26}$$

С увеличением стороны $2a$ широта ближнего верхнего угла сначала возрастает, потом достигает максимума и начинает убывать, так что одному значению h_1 (когда h_1 меньше некоторого максимального значения) соответствуют два значения длины стороны. Найдем сторону, которой соответствует этот максимум. Пусть $\cos 2a = x$; тогда нужно максимизировать выражение $(x^2-x^3)/(1+x)$. Приравнивая нулю производную, получим уравнение

$$x^2+x-1=0.$$

Таким образом, максимум h_1 достигается при $\cos 2a = \frac12(\sqrt5-1)$. Интересно, что это происходит для всех правильных многоугольников (у которых $2B > \arccos\frac12(\sqrt5-1)$, т.е., например, простой не звездчатый семиугольник уже не подойдет) независимо от их конфигурации. Сами значения максимального h_1, соответствующих радиусов r и высот h и других параметров для разных многоугольников различны, а длина «экстремальной» стороны одна и та же. Так что золотое сечение и в этих задачах часто обладает некоторыми экстремальными свойствами.

Например, если рассматриваемый правильный многоугольник — это квадрат, то это весьма примечательный квадрат! Его сторона $2a = \arccos\frac12(\sqrt5-1)$, радиус $r = \arcsin\frac12(\sqrt5-1)$, первый «тройной радиус» (2), и, соответственно, $2a + r = 90^\circ$. Если же рассматривается правильный пятиугольник, то оказывается, что у него $2a = h_1 = \arccos\frac12(\sqrt5-1)$:

$$\sin^2 h_1 = 16\cos^2 36^\circ\cdot\frac{1-(\sqrt5-1)/2}{1+(\sqrt5-1)/2}\cdot\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)^2 = \\ = \left(\frac{\sqrt5+1}{2}\right)^4\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)^2\frac{3-\sqrt5}{2}\Big/\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right) = \frac{\sqrt5-1}{2} = \cos h_1.$$

Найдем теперь связь между длинами сторон двух многоугольников одинаковой конфигурации для одного h_1:

$$\frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}\cos^2 2a = \frac{1-\cos 2b}{1+\cos 2b}\cos^2 2b.$$

После преобразований получим соотношение

$$(\cos 2a+\cos 2b)(1-\cos 2a\cos 2b) = \cos^2 2a + \cos^2 2b, \tag{27}$$

разрешая которое относительно $\cos 2b$, находим

$$\cos 2b = \frac12(1-\cos 2a)\left(1+\sqrt{1+\frac{4\cos 2a}{\sin^2 2a}}\right). \tag{28}$$

Из (26) можно получить обратную формулу для нахождения $2a$ по h_1:

$$t^3 - 3\left(1-\frac{3\sin^2 h_1}{16\cos^4 B}\right)t + 2\left(\frac{9\sin^2 h_1}{8\cos^4 B}-1\right) = 0, \quad t = 3\cos 2a - 1.$$

Два положительных корня этого уравнения будут соответствовать двум интересующим нас сторонам. Здесь тоже интересно, что если дана длина стороны многоугольника $2a$, то вторая длина стороны $2b$, соответствующая тому же h_1, не зависит от вида многоугольника.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров А. Д., Нецветаев Н. Ю.* Геометрия. — М.: Наука, 1990.
2. *Алексеевский Д. В., Винберг Э. Б., Солодовников А. С.* Геометрия пространств постоянной кривизны// Итоги науки техн. Совр. пробл. мат. Фундам. напр. — 1988. — *29*. — С. 1–146.
3. *Берже М.* Геометрия. Т. II, ч. V: Внутренняя геометрия сферы, гиперболическая геометрия, пространство сфер. — М.: Мир, 1984.
4. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике. — М.: Наука, 1964.
5. *Волынский Б. А.* Сферическая тригонометрия. — М.: Наука, 1977.
6. *Кранц П.* Сферическая тригонометрия. — М.: ЛКИ, 2019.
7. *Панчишкин А. А., Шавгулидзе Е. Т.* Тригонометрические функции в задачах. — М.: Наука, 1986.
8. *Степанов Н. Н.* Сферическая тригонометрия. — М.-Л.: Гостехиздат, 1948.
9. *Шафаревич И. Р., Ремизов А. О.* Линейная алгебра и геометрия. — М.: Физматлит, 2009.
10. *Янишевский С.* Сферическая тригонометрия: лекции. — Казань: Университетская типография, 1859.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Кругова Елена Павловна (Krugova Elena Pavlovna)
Всероссийский институт научной и технической информации
Российской академии наук, Москва
(Russian Institute for Scientific and Technical Information
of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia)
E-mail: ekrugo@mail.ru