ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 234 (2024). С. 108–117
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-234-108-117

УДК 517.91: 519.6

КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛЯПУНОВУ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ И АДДИТИВНОЙ ФОРМЕ

© 2024 г. **С. Г. БУЛАНОВ**

Аннотация. Представлены разновидности критериев устойчивости по Ляпунову систем обыкновенных дифференциальных уравнений в виде необходимых и достаточных условий. Критерии получены в условиях существования и непрерывности решения на полуоси, непрерывности правой части системы и ее непрерывной дифференцируемости на полуоси. Критерии конструируются на основе рекуррентных преобразований разностных схем численного интегрирования с остаточным членом на каждом шаге. Мультипликативная и аддитивная форма критериев влечет возможность компьютеризировать анализ устойчивости и выполнять его в режиме реального времени.

Ключевые слова: устойчивость по Ляпунову, компьютерный анализ устойчивости, численное моделирование устойчивости.

LYAPUNOV STABILITY CRITERIA FOR SYSTEMS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS IN MULTIPLICATIVE AND ADDITIVE FORMS

© 2024 **S. G. BULANOV**

Abstract. Various Lyapunov stability criteria for systems of ordinary differential equations are presented in the form of necessary and sufficient conditions. The criteria are obtained under the conditions of existence and continuity of the solution on the semi-axis, continuity of the right part of the system and its continuous differentiability on the semi-axis. The criteria are constructed on the basis of recurrent transformations of difference schemes of numerical integration with a residual term at each step. The multiplicative and additive form of the criteria entails the possibility to computerize the stability analysis and perform it in real time.

Keywords and phrases: Lyapunov stability, computer stability analysis, numerical modeling of stability.

AMS Subject Classification: 34D20

1. Введение. Анализ устойчивости по Ляпунову систем дифференциальных уравнений требуется выполнять в многочисленных отраслях современной науки и техники (см. [11, 13]). При этом актуальным направлением исследований остается разработка методов анализа устойчивости систем линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [3]). Традиционно исследование устойчивости выполняется на основе функций Ляпунова (см. [12, 14]). Отсутствие строгого алгоритма построения функций Ляпунова влечет необходимость разрабатывать аналитические методы, требующие преобразования правой части системы (см. [5]). Предлагаются подходы для исследования прикладных аспектов теории устойчивости с применением средств вычислительной техники (см. [7]). Ниже разрабатывается метод анализа устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) на основе рекуррентных преобразований разностных схем численного интегрирования с остаточным членом на каждом шаге. Последнее необходимо для получения достоверных аналитических оценок устойчивости решений систем ОДУ. Результатом преобразований должны стать критерии устойчивости систем ОДУ в виде необходимых и достаточных условий.

Критерии строятся в предположении существования и непрерывности решения на полуоси, непрерывности правой части системы и ее непрерывной дифференцируемости на полуоси. Первоначально критерии строятся в мультипликативной форме. В этом случае для обоснования достоверности критериев дополнительно требуется выполнение аналога условия Липшица и предположение, что значение возмущенного и невозмущенного решения не совпадают ни в одной точке полуоси. Построение критериев в аддитивной форме позволяет снять последние ограничения и расширить класс систем ОДУ для возможного анализа устойчивости на основе разрабатываемых критериев. Для анализа устойчивости систем линейных ОДУ разрабатываются критерии, которые не требуют преобразования правой части системы и нахождения ее приближенного решения. Помимо этого приводятся критерии по характеру поведения правой части линейной системы ОДУ. Предполагается, что математическая форма конструируемых критериев будет допускать программную реализацию, что влечет возможность анализа устойчивости систем ОДУ в режиме реального времени.

2. Анализ устойчивости систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим нелинейную систему ОДУ

$$\frac{dY}{dt} = F(t,Y), Y(t_0) = Y_0. \tag{1}$$

Предполагается, что в области $R = \Big\{t_0 \leqslant t < \infty;\ \tilde{Y}(t), Y(t)\ :\ \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leqslant \delta,\ \delta > 0\Big\}$ для системы (1) выполнены все условия существования и единственности решения и функция $F(t,Y)$ определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема по t.

В рассматриваемых условиях для всех $T = \mathrm{const}$, $T \in [t_0, \infty)$ выполняются неравенства

$$\big|f_k'(t, Y(t))\big| \leqslant c_1, \quad \big|f_k'(t, \tilde{Y}(t))\big| \leqslant c_1,$$

$c_1 = c_1(T)$, $c_1 = \mathrm{const}$ для всех $t \in [t_0, T]$.

Точное решение системы (1) в форме метода Эйлера с остаточным членом на каждом шаге имеет вид:

$$y_{k(i+1)} = y_{ki} + h\, f_k(t_i, Y_i) + q_{ki}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

где q_{ki} — остаточные члены формулы Тейлора для k-й компоненты решения.

Для произвольно выбранной независимой переменной t шаг h предполагается равномерным на отрезке $[t_0, t]$, величины t, i, h связаны соотношениями

$$t = \mathrm{const}, \quad t = t_{i+1}, \quad h = \frac{t_{i+1} - t_0}{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, \quad t_{j+1} = t_j + h, \quad 0 \leqslant j \leqslant i. \tag{3}$$

По аналогии для возмущенного решения:

$$\tilde{y}_{k(i+1)} = \tilde{y}_{ki} + h\, f_k(t_i, \tilde{Y}_i) + \tilde{q}_{ki}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Точное значение величины возмущения определяется из соотношения

$$\tilde{y}_{k(i+1)} - y_{k(i+1)} = \left(1 + h\frac{f_k(t_i, \tilde{Y}_i) - f_k(t_i, Y_i)}{\tilde{y}_{ki} - y_{ki}}\right)(\tilde{y}_{ki} - y_{ki}) + w_{ki}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

где

$$w_{ki} = \tilde{q}_{ki} - q_{ki}, \quad q_{ki} = \frac{1}{2} f_k'\Big(t_i + \xi_{ki} h, Y(t_i + \xi_{ki} h)\Big) h^2, \quad 0 < \xi_{ki} < 1.$$

Рекуррентное преобразования (4) влечет соотношение

$$\tilde{y}_{k(i+1)} - y_{k(i+1)} = \prod_{\ell=0}^{i} \Big(1 + hD^{(k)}_{i-\ell}\Big)\big(\tilde{y}_{k0} - y_{k0}\big) + L^{(k)}_i,$$

где

$$L^{(k)}_i = \sum_{r=1}^{i}\prod_{\ell=0}^{i-r} \Big(1 + hD^{(k)}_{i-\ell}\Big) w_{k(r-1)} + w_{ki}, \quad D^{(k)}_i = \frac{f_k\big(t_i, \tilde{Y}_i\big) - f_k\big(t_i, Y_i\big)}{\tilde{y}_{ki} - y_{ki}}.$$

Далее предполагается, что

$$\tilde{y}_{ki}(t) - y_{ki}(t) \neq 0, \quad i = 0, 1, \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

Для оценки величины $L^{(k)}_i$ дополнительно требуется выполнение неравенства

$$\Big|f_k(t, \tilde{Y}) - f_k(t, Y)\Big| \leqslant L\,|\tilde{y}_k - y_k|\,, \quad L = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, T], \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

При выполнении неравенства (6) с учетом ограничения (5) справедливо соотношение

$$\Big|D^{(k)}_{i-\ell}\Big| \leqslant L, \quad i = 0, 1, \ldots, \quad \forall \ell = 0, 1, \ldots, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

В рассматриваемых условиях

$$\Big\|L^{(k)}_i\Big\| \leqslant \frac{c_1}{L}\big(e^{L(t-t_0)} - 1\big)h \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

(см. [8]). Следовательно,

$$\lim_{i\to\infty} L^{(k)}_i = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{8}$$

Поэтому для всех $t \in [t_0, \infty)$ выполняется соотношение

$$\tilde{y}_k(t) - y_k(t) = \lim_{i\to\infty} \prod_{\ell=0}^{i} \Big(1 + hD^{(k)}_{i-\ell}\Big)\big(\tilde{y}_{k0} - y_{k0}\big), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

В результате критерии устойчивости и асимптотической устойчивости примут следующий вид (см. [8]):

$$\left|\lim_{i\to\infty} \prod_{\ell=0}^{i} \Big(1 + hD^{(k)}_{i-\ell}\Big)\right| \leqslant \tilde{c}_1, \quad \tilde{c}_1 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{10}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left|\lim_{i\to\infty} \prod_{\ell=0}^{i} \Big(1 + hD^{(k)}_{i-\ell}\Big)\right| = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{11}$$

Так как для всех $t \in [t_0, \infty)$ согласно (9) имеем

$$\lim_{i\to\infty} \prod_{\ell=0}^{i} \Big(1 + hD^{(k)}_{i-\ell}B\Big) = \frac{\tilde{y}_k(t) - y_k(t)}{\tilde{y}_{k0} - y_{k0}},$$

то критерии (10), (11) можно представить в эквивалентной форме:

$$\left|\frac{\tilde{y}_k(t) - y_k(t)}{\tilde{y}_{k0} - y_{k0}}\right| \leqslant \tilde{c}_1, \quad \tilde{c}_1 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty)\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{12}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left|\frac{\tilde{y}_k(t) - y_k(t)}{\tilde{y}_{k0} - y_{k0}}\right| = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{13}$$

Компьютерная реализация критериев (10)–(13) влечет возможность анализа устойчивости решения нелинейной системы ОДУ в режиме реального времени по ходу приближенного решения системы. Необходимо отметь, что выполнение условий (5), (6) влечет ограничение класса систем ОДУ для исследования которых можно применять представленные критерии.

С целью снятия этих ограничений выполним следующее преобразование выражения (2) в аддитивной форме:

$$y_{k(i+1)} = y_{k(i-1)} + h\, f_k\big(t_{i-1}, Y_{i-1}\big) + q_{k(i-1)} + h\, f_k(t_i, Y_i) + q_{ki}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

или

$$y_{k(i+1)} = y_{k(i-2)} + hf_k(t_{i-2}, Y_{i-2}) + q_{k(i-2)} + h\, f_k(t_{i-1}, Y_{i-1}) + q_{k(i-1)} + hf_k(t_i, Y_i) + q_{ki}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Рекуррентное преобразование влечет соотношение

$$y_{k(i+1)} = y_{k0} + \sum_{\ell=0}^{i} hf_k(t_{i-\ell}, Y_{i-\ell}) + \sum_{\ell=0}^{i} q_{k(i-\ell)}, \quad y_{k0} = y_k(t_0), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{14}$$

Для возмущенного решения (1) справедливо равенство

$$\tilde{y}_{k(i+1)} = \tilde{y}_{k0} + \sum_{\ell=0}^{i} hf_k(t_{i-\ell}, \tilde{Y}_{i-\ell}) + \sum_{\ell=0}^{i} \tilde{q}_{k(i-\ell)}, \quad \tilde{y}_{k0} = \tilde{y}_k(t_0), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{15}$$

Переходя к пределу при $i \to \infty$ на любом отрезке $[t_0, t]$, получим точное представление решения системы (1):

$$y_k(t) = y_{k0} + \lim_{i\to\infty} \sum_{\ell=0}^{i} h\, f_k(t_{i-\ell}, Y_{i-\ell}) + \lim_{i\to\infty} \sum_{\ell=0}^{i} q_{k(i-\ell)} \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Предел суммы остаточных членов оценивается из соотношений

$$\left| \sum_{\ell=0}^{i} q_{k(i-\ell)} \right| \leqslant \sum_{\ell=0}^{i} \big| q_{k(i-\ell)} \big| \leqslant \frac{1}{2} \sum_{\ell=0}^{i} c_1 h^2 = \frac{1}{2}(i+1) c_1 h^2 = \frac{1}{2}(t - t_0) c_1 h.$$

Поэтому

$$\left| \sum_{\ell=0}^{i} q_{k(i-\ell)} \right| \leqslant \frac{1}{2}(T - t_0) c_1 h \xrightarrow[i\to\infty]{} 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{\ell=0}^{i} q_{k(i-\ell)} = 0 \quad \forall T \in [t_0, \infty), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{\ell=0}^{i} \tilde{q}_{k(i-\ell)} = 0.$$

В результате точное значение величины возмущения на промежутке $[t_0, t]$ определяется из соотношения

$$\tilde{y}_k(t) - y_k(t) = \tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0) + \lim_{i\to\infty} \sum_{\ell=0}^{i} h\Big(f_k\big(t_{i-\ell}, \tilde{Y}_{i-\ell}\big) - f_k\big(t_{i-\ell}, Y_{i-\ell}\big) \Big) \tag{16}$$

для всех $t \in [t_0, \infty)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Для выполнения равенство (16) не требуется выполнения ограничений (5), (6), ранее оговоренных для системы (1).

По аналогии с (9), выделим в (16) возмущение начальных данных в виде множителя:

$$\tilde{y}_k(t) - y_k(t) = \frac{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0) + \lim\limits_{i\to\infty} \sum\limits_{\ell=0}^{i} h\Big(f_k\big(t_{i-\ell}, \tilde{Y}_{i-\ell}\big) - f_k\big(t_{i-\ell}, Y_{i-\ell}\big) \Big)}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} \times (\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)) \tag{17}$$

для всех $t \in [t_0, \infty)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Из (17) следует, что устойчивость решения задачи (1) полностью определяется сомножителем перед начальным возмущением $\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)$. Поскольку (17) эквивалентно (16), то имеет место критерий устойчивости системы (1) не требующий выполнение ограничений (5)–(7).

Лемма 1. *Для устойчивости решения задачи* (1) *необходимо и достаточно существование такого* Δ, $0 < \Delta \leqslant \delta$, *что при всех* $\tilde{Y}(t)$, *для которых* $0 < \left\|\tilde{Y}_0 - Y_0\right\| \leqslant \Delta$, *выполняется соотношение*

$$\left|\frac{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0) + \lim\limits_{i\to\infty}\sum\limits_{\ell=0}^{i} h\Big(f_k\big(t_{i-\ell},\tilde{Y}_{i-\ell}\big) - f_k\big(t_{i-\ell},Y_{i-\ell}\big)\Big)}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)}\right| \leqslant \tilde{c}_1, \tag{18}$$

где $\tilde{c}_1 = \mathrm{const}$, *для всех* $\forall t \in [t_0,\infty)$, *и* $k = 1,2,\ldots,n$.

Для асимптотической устойчивости решения задачи (1) *необходимо и достаточно, чтобы оно было устойчиво и существовало такое* $\Delta_1 \leqslant \Delta$, *что неравенство* $0 < \left\|\tilde{Y}_0 - Y_0\right\| \leqslant \Delta_1$ *влечет выполнение соотношения*

$$\lim_{t\to\infty}\left|\frac{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0) + \lim\limits_{i\to\infty}\sum\limits_{\ell=0}^{i} h\Big(f_k\big(t_{i-\ell},\tilde{Y}_{i-\ell}\big) - f_k\big(t_{i-\ell},Y_{i-\ell}\big)\Big)}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)}\right| = 0, \quad k = 1,2,\ldots,n. \tag{19}$$

Критерии (18), (19) выполняются в условиях существования и единственности решения задачи (1), дифференцируемости правой части (1) на полуоси.

Из (17) следует, что в области R выполняется соотношение

$$\frac{\tilde{y}_k(t) - y_k(t)}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} = \frac{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0) + \lim\limits_{i\to\infty}\sum\limits_{\ell=0}^{i} h\Big(f_k\big(t_{i-\ell},\tilde{Y}_{i-\ell}\big) - f_k\big(t_{i-\ell},Y_{i-\ell}\big)\Big)}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)}$$

для всех $t \in [t_0,\infty)$ и $k = 1,2,\ldots,n$, где рассматриваются только возмущенные решения, для которых $\tilde{y}_k(t_0) \neq y_k(t_0)$.

Таким образом, из леммы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Для устойчивости решения задачи* (1) *необходимо и достаточно существование такого* Δ, $0 < \Delta \leqslant \delta$, *что при всех* $\tilde{Y}(t)$, *для которых* $0 < \left\|\tilde{Y}_0 - Y_0\right\| \leqslant \Delta$, *выполняется соотношение*

$$\left|\frac{\tilde{y}_k(t) - y_k(t)}{\tilde{y}_{k0} - y_{k0}}\right| \leqslant \tilde{c}_1, \quad \tilde{c}_1 = \mathrm{const}, \quad \forall t \in [t_0,\infty), \quad k = 1,2,\ldots,n.$$

Для асимптотической устойчивости решения задачи (1) *необходимо и достаточно, чтобы оно было устойчиво и существовало такое* $\Delta_1 \leqslant \Delta$, *что неравенство* $0 < \left\|\tilde{Y}_0 - Y_0\right\| \leqslant \Delta_1$ *влечет выполнение соотношения*

$$\lim_{t\to\infty}\left|\frac{\tilde{y}_k(t) - y_k(t)}{\tilde{y}_{k0} - y_{k0}}\right| = 0, \quad k = 1,2,\ldots,n.$$

Таким образом, для обоснования критериев теоремы 1 требуется существование и единственность решения, непрерывная дифференцируемость правой части (1) в R. Условия (5), (6) были необходимы для обеспечения (8), (9) и, как следствие для обоснования критериев (10)–(13). Для выполнения (16), и как следствие критериев (18), (19) этого не требуется — достаточно исходных предположений. Критерии теоремы 1 (они же критерии (12), (13)) являются следствием критериев (18), (19). В результате с критериев (12), (13) снимается необходимость выполнения условий (5)–(7).

В числителе выражений (17)–(19) одно из слагаемых есть интеграл, приближенно вычисляемый по формуле прямоугольников. Поэтому критерии (18), (19) можно записать в эквивалентной форме:

$$\left|\frac{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \Big(f_k(t,\tilde{Y}) - f_k(t,Y)\Big)dt}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)}\right| \leqslant \tilde{c}_1, \quad \tilde{c}_1 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\lim_{t\to\infty}\left|\frac{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \Big(f_k(t,\tilde{Y}) - f_k(t,Y)\Big)dt}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)}\right| = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Лемма 2. *Для устойчивости решения задачи* (1) *необходимо и достаточно существование такого* Δ, $0 < \Delta \leqslant \delta$, *что при всех* $\tilde{Y}(t)$, *для которых* $0 < \left\|\tilde{Y}_0 - Y_0\right\| \leqslant \Delta$, *выполняется соотношение*

$$\left|\int\limits_{t_0}^{t} \frac{f_k(t,\tilde{Y}) - f_k(t,Y)}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)}dt\right| \leqslant \tilde{c}_2, \quad www\tilde{c}_2 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Для асимптотической устойчивости решения задачи (1) *необходимо и достаточно, чтобы оно было устойчиво и существовало такое* $\Delta_1 \leqslant \Delta$, *что неравенство* $0 < \left\|\tilde{Y}_0 - Y_0\right\| \leqslant \Delta_1$ *влечет выполнение соотношения*

$$\lim_{t\to\infty}\left|1 + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{f_k(t,\tilde{Y}) - f_k(t,Y)}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)}dt\right| = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

или, эквивалентно,

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} \frac{f_k(t,\tilde{Y}) - f_k(t,Y)}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)}dt = -1, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{20}$$

Получены разновидности критериев устойчивости систем нелинейных ОДУ в виде необходимых и достаточных условий. Форма критериев влечет возможность программной реализации. Далее будут представлены примеры анализа нелинейных систем ОДУ, решение которых принимает различный характер устойчивости.

3. Анализ устойчивости систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассматривается задача Коши для системы линейных ОДУ

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y, \quad Y(t_0) = Y_0. \tag{21}$$

Предполагается, что для (21) выполнены все условия существования и единственности решения в области $R_1 = \Big\{t_0 \leqslant t < \infty;\ \tilde{Y}(t), Y(t) :\ \left\|\tilde{Y}_0 - Y_0\right\| \leqslant \delta_1,\ \delta_1 > 0\Big\}$. Элементы матрицы $A(t)$ определены, непрерывны, непрерывно дифференцируемы в R_1. Ниже используются каноническая норма матрицы и согласованная с ней норма вектора:

$$\|A\| = \max_{1\leqslant k\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{kj}|, \quad \|Y\| = \max_{1\leqslant k\leqslant n}|y_k|.$$

На основе рекуррентных преобразований разностных схем численного интегрирования величина возмущения для $\forall t \in [t_0, \infty)$ определяется из соотношения [9]

$$\tilde{Y}(t) - Y(t) = \lim_{i\to\infty}\prod_{\ell=0}^{i}\big(E + hA(t_{i-\ell})\big)\big(\tilde{Y}_0 - Y_0\big).$$

Отсюда автоматически следуют критерии устойчивости и асимптотической устойчивости систем линейных ОДУ в мультипликативной форме:

$$\left\|\lim_{i\to\infty}\prod_{\ell=0}^{i}\big(E+hA(t_{i-\ell})\big)\right\|\leqslant\tilde c_3,\quad \tilde c_3=\mathrm{const},\quad \forall t\in[t_0,\infty),\tag{22}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left\|\lim_{i\to\infty}\prod_{\ell=0}^{i}\big(E+hA(t_{i-\ell})\big)\right\|=0.\tag{23}$$

После равносильных преобразований критерии (22), (23) приводятся к аддитивной форме (см. [2]):

$$\lim_{i\to\infty}\sum_{\ell=0}^{i}hA(t_{i-\ell})\leqslant\tilde C_1=\mathrm{const}\quad \forall t\in[t_0,\infty),\tag{24}$$

$$\lim_{t\to\infty}\lim_{i\to\infty}\sum_{\ell=0}^{i}hA(t_{i-\ell})=(-\infty)\,,\tag{25}$$

где $\tilde C_1$ — постоянная матрица, под символом $(-\infty)$ понимается предел матрицы, элементы которой стремятся к $-\infty$.

Критерии (22)–(25) ориентированы на программную реализацию и позволяют установить характер устойчивости систем линейных ОДУ в режиме реального времени. При этом в частности не требуется построение функций Ляпунова, информации о характеристических числах и характеристических показателях.

Далее, в рассматриваемых условиях, приводятся критерии устойчивости задачи (21) по характеру поведения правой части системы без дополнительных ограничений. Критерии конструируются по аналогии с ранее представленными условиями устойчивости для анализа нулевого решения нелинейной системы [1].

Теорема 2. *Для устойчивости решения задачи* (21) *необходимо и достаточно, чтобы существовало такое* Δ_2, $0<\Delta_2\leqslant\delta_1$, *что при всех* $\tilde Y(t)$, *для которых* $0<\left\|\tilde Y_0-Y_0\right\|\leqslant\Delta_2$, *выполняется соотношение*

$$\left|\frac{a_{k1}(t)\big(\tilde y_1(t)-y_1(t)\big)+\cdots+a_{kn}(t)\big(\tilde y_n(t)-y_n(t)\big)}{a_{k1}(t)\big(\tilde y_1(t_0)-y_1(t_0)\big)+\cdots+a_{kn}(t)\big(\tilde y_n(t_0)-y_n(t_0)\big)}\right|\leqslant\tilde c_4,$$

где $\tilde c_4=\mathrm{const}$, *для всех* $t\in[t_0,\infty)$ *и* $k=1,2,\ldots,n$.

Для асимптотической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы решение было устойчиво и существовало такое $\Delta_3\leqslant\Delta_2$, *что неравенство* $\left\|\tilde Y_0-Y_0\right\|\leqslant\Delta_3$ *влечет выполнение соотношения*

$$\lim_{t\to\infty}\left|\frac{a_{k1}(t)\big(\tilde y_1(t)-y_1(t)\big)+\cdots+a_{kn}(t)\big(\tilde y_n(t)-y_n(t)\big)}{a_{k1}(t)\big(\tilde y_1(t_0)-y_1(t_0)\big)+\cdots+a_{kn}(t)\big(\tilde y_n(t_0)-y_n(t_0)\big)}\right|=0,\quad k=1,2,\ldots,n.$$

Получена еще одна разновидность критериев устойчивости систем линейных ОДУ, которая не требует преобразования правой части системы и обращения к методам качественной теории.

Предложенный подход допускает конструировать критерии устойчивости для производных правой части системы (21) произвольного порядка $\ell\geqslant2$ без дополнительных ограничений, если эти производные существуют (см. [1]).

4. Программный и численный эксперимент. Программный и численный эксперимент проводился с помощью ПК на базе процессора Intel(R) Core(TM) i5-4460 в среде программирования Delphi. Анализ устойчивости решений систем ОДУ выполняется на основе программы, реализующей конструкцию критериев (10), (12), (18). Для каждого уравнения исследуемой системы

Таблица 1. Результаты анализа устойчивости нулевого решения системы (26)

t	10^3	2×10^3	3×10^3	4×10^3	5×10^3
норма	1,014	1,027	1,041	1,054	1,068
t	6×10^3	7×10^3	8×10^3	9×10^3	10^4
норма	1,081	1,093	1,106	1,118	1,1309

Таблица 2. Результаты анализа устойчивости нулевого решения системы (27)

t	10^3	2×10^3	3×10^3	4×10^3	5×10^3
норма	1001,998	2001,995	3001,990	4001,983	5001,975
t	6×10^3	7×10^3	8×10^3	9×10^3	10^4
норма	6001,964	7001,951	8001,936	9001,919	10001,091

Таблица 3. Результаты анализа устойчивости решения системы (28)

t	10^3	2×10^3	3×10^3	4×10^3	5×10^3
норма	$2{,}337\times10^{-16}$	$2{,}337\times10^{-16}$	$2{,}337\times10^{-16}$	$2{,}337\times10^{-16}$	$2{,}337\times10^{-16}$
t	6×10^3	7×10^3	8×10^3	9×10^3	10^4
норма	$2{,}337\times10^{-16}$	$2{,}337\times10^{-16}$	$2{,}337\times10^{-16}$	$2{,}337\times10^{-16}$	$2{,}337\times10^{-16}$

вычисляется значение выражения из левой части критериев (10), (12), (18) и находится векторная норма. По поведению численных значений нормы делается вывод о характере устойчивости исследуемой системы. Ограниченное изменение соответствует устойчивости, монотонное стремление к нулю характеризует асимптотическую устойчивость, неограниченный рост является признаком неустойчивости. При исследовании на основе аддитивного критерия признаком асимптотической устойчивости является в частности стремление подынтегральной функции к значению -1. Приближенные значения возмущенного и невозмущенного решения, входящие в конструкцию критериев (10), (12), (18), находятся с помощью метода Эйлера.

Пример 1. Исследуется на устойчивость нулевое решение системы

$$y_1' = -y_2\sqrt{y_1^2+y_2^2}, \quad y_2' = y_1\sqrt{y_1^2+y_2^2}. \tag{26}$$

Общее решение системы имеет вид

$$y_1 = c_1\cos(c_1t+c_2), \quad y_2 = c_1\sin(c_1t+c_2).$$

Известно, что нулевое решение системы (26) устойчиво (см. [10]).

Компьютерный анализ устойчивости выполняется на основе критерия (10) на промежутке $[0, 10^4]$ при значении шага разностной схемы 10^{-4}. Начальные значения компонент возмущенного решения $\tilde{y}_{10} = 10^{-5}$, $\tilde{y}_{20} = 10^{-5}$. Результаты анализа устойчивости представлены в табл. 1. Значения нормы ограничены константой, что в соответствии с критерием (10) свидетельствует об устойчивости решения системы. Время работы программы ≈ 18 с.

Пример 2. Исследуется на устойчивость нулевое решение системы

$$y_1' = \frac{y_1}{t} - t^2y_1y_2^2, \quad y_2' = -\frac{y_2}{t}, \quad t \geqslant 1. \tag{27}$$

Общее решение системы (27) имеет вид

$$y_1 = c_1 t e^{-c_2^2 t}, \quad y_2 = \frac{c_2}{t}.$$

Нулевое решение системы (27) неустойчиво (см. [4]). Компьютерный анализ устойчивости выполняется на основе критерия (12) при значениях длины промежутка, шага численного интегрирования и возмущениях начальных данных из примера 1. Результаты анализа устойчивости представлены в табл. 2. Монотонный рост значений нормы свидетельствует о неустойчивости.

Пример 3. Исследуется на устойчивость решение линейной системы

$$y_1' = -y_1 + \frac{y_2}{t^2+1}, \quad y_2' = -\frac{y_1}{t^2+1} - y_2. \tag{28}$$

Общее решение системы имеет вид

$$y_1 = (c_1 \cos(\operatorname{arctg} t) + c_2 \sin(\operatorname{arctg} t))e^{-t}, \quad y_2 = (-c_1 \sin(\operatorname{arctg} t) + c_2 \cos(\operatorname{arctg} t))e^{-t}$$

(см. [6]). Решение системы (28) асимптотически устойчиво на полуоси $[0, \infty)$. Компьютерный анализ устойчивости выполняется на основе критерия (18) при неизменных значениях длины промежутка, шага численного интегрирования и возмущениях начальных данных из предыдущих примеров. Результаты анализа устойчивости представлены в табл. 3. Значения нормы стремятся к нулю, что свидетельствует об асимптотической устойчивости решения системы (28).

5. Заключение. Получены критерии устойчивости по Ляпунову систем ОДУ в форме необходимых и достаточных условий. Критерии отличаются от известных построением на основе рекуррентных преобразования разностных схем численного интегрирования в мультипликативной и аддитивной форме. Аддитивная форма критериев позволила снять ряд ограничений накладываемых ранее на правую часть системы ОДУ. Критерии инвариантны относительно правой части системы, разностных схем приближенного решения системы, длины промежутка и шага решения. Для систем линейных ОДУ представлены критерии устойчивости, не требующие преобразования правой части системы и нахождения ее приближенного решения. Выполнена программная реализация критериев. Результаты численного эксперимента подтверждают достоверность анализа устойчивости по предложенным критериям и свидетельствуют о целесообразности их практического применения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Буланов С. Г.* Необходимые и достаточные критерии устойчивости по Ляпунову систем обыкновенных дифференциальных уравнений// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2023. — *224.* — С. 10–18.
2. *Буланов С. Г.* Критерии устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2023. — *225.* — С. 28–37.
3. *Григорян Г. А.* Критерий устойчивости систем двух линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка// Мат. заметки. — 2022. — *103*, № 6. — С. 831–840.
4. *Демидович Д. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
5. *Дружинина О. В., Седова Н. О.* Анализ устойчивости и стабилизации нелинейных каскадных систем с запаздыванием в терминах линейных матричных неравенств// Изв. РАН. Теор. сист. управл. — 2017. — *1.* — С. 21–35.
6. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1971.
7. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Математическая теория автоматического управления. — М.: ЛЕНАНД, 2019.
8. *Ромм Я. Е.* Об условиях устойчивости с обратной пропорцией начальным значениям решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений// Совр. наукоемкие технол. — 2023. — *9.* — С. 31–60.
9. *Ромм Я. Е., Буланов С. Г.* Численное моделирование устойчивости по Ляпунову// Совр. наукоемкие технол. — 2021. — *7.* — С. 42-–60.
10. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1964.

11. *Elaiw A. M., Shflot A. S., Hobiny A. D.* Stability analysis of SARS-CoV-2/HTLV-I coinfection dynamics model// AIMS Math. — 2022. — *8*, № 3. — P. 6136—6166.
12. *Xiao-Lin L., Yao-Lin J.* Numerical algorithm for constructing Lyapunov functions of polynomial differential systems// Appl. Math. Comput. — 2009. — *29*, № 1. — C. 247—262.
13. *Xinna M., Hongwei F., Maryam A., Hassan S.* Dynamical analysis and boundedness for a generalized chaotic Lorenz model// AIMS Math. — 2023. — *8*, № 8. — P. 19719-–19742.
14. *Zhaolu T., Chuanqing G.* A numerical algorithm for Lyapunov equations// Appl. Math. Comput. — 2008. — *202*, № 1. — P. 44-–53.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Буланов Сергей Георгиевич (Bulanov Sergey Georgievich)
Таганрогский институт имени А. П. Чехова (филиал)
Ростовского государственного экономического университета
(Anton Chekhov Taganrog State Institute (branch)
of the Rostov State University of Economics, Rostov-on-Don, Russia)
E-mail: bulanovtgpi@mail.ru