ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 234 (2024). С. 133–142
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-234-133-142

УДК 517.929

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ С ЛИНЕЙНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© 2024 г. **Б. Г. ГРЕБЕНЩИКОВ, С. А. ЗАГРЕБИНА**

Аннотация. Обсуждаются методы получения достаточных условий для систем линейных дифференциальных уравнений с линейным запаздыванием нейтрального типа и методы анализа асимптотических свойств некоторых классов систем нейтрального типа.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение, устойчивость, функционалы Ляпунова—Красовского, неустойчивость, разностные системы.

METHODS OF RESEARCH OF SOME SYSTEMS WITH LINEAR DELAY

© 2024 **B. G. GREBENSHCHIKOV, S. A. ZAGREBINA**

Abstract. In this paper, we discuss methods for obtaining sufficient conditions for systems of linear differential equations with linear delay of neutral type and methods for analyzing asymptotic properties of certain classes of systems of neutral type.

Keywords and phrases: functional differential equation, stability, Lyapunov–Krasovsky functionals, unstability, difference systems.

AMS Subject Classification: 34K06, 34K10, 34K13

1. Введение. Системы с линейным запаздыванием встречаются в задачах механики, физики, биологии и обмене информации (см. [12]). В частности, при исследовании процесса вертикальных колебаний токоприемника движущегося локомотива при взаимодействии с контактным проводом (при учете воздействия эластичной опоры) в работе задача сводится к исследованию поведения решения однородной системы четвертого порядка. Если же исследовать колебания токоприемника при удалении локомотива от опоры, то возникает, в свою очередь, система нейтрального типа с линейным запаздыванием. Поскольку при некоторых скоростях движения локомотива (при взаимодействии полоза токоприемника с так называемой «легкой» подвеской) колебания токоприемника приобретают большой размах (а иногда, вдобавок, при очень низкой температуре окружающей среды) возможен и обрыв контактного провода, исследование асимптотических свойств соответствующих систем с линейным запаздыванием представляет и практический интерес.

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений с линейным запаздыванием нейтрального типа m-го порядка

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bx(\mu t) + R(t)\frac{dx(\mu t)}{dt}, \quad t \geqslant t_0 > 0,$$
$$\|R(t)\| < \hat{R}, \quad \hat{R} = \text{const}, \quad \hat{R} > 0, \quad \mu = \text{const}, \quad 0 < \mu < 1, \quad x(\eta) = \phi(\eta) : \quad \eta \in [\mu t_0, t_0]. \tag{1}$$

где A, B — постоянные матрицы, размерности $[m \times m]$; переменная непрерывно дифференцируемая матрица $R(t)$ имеет также размерность $[m \times m]$. Решение $x(t)$ системы (1) определено начальной вектор-функцией $\phi(\eta)$: $\eta \in [\mu t_0, t_0]$; вектор-функция $\phi(\eta)$ имеет непрерывную производную. Данная система имеет линейное запаздывание: $\gamma(t) = (1-\mu)t$, $\lim\limits_{t\to\infty} \gamma(t) = \infty$. Норму вектора x определим равенством

$$\|x(t)\| = \sum_{j=1}^{m} |x_j(t)|,$$

где $x_j(t)$ — компоненты вектора $\|x(t)\|$. В соответствии с нормой вектора определим норму матрицы $\|R(t)\|$ (см. [9]).

При некоторых значениях параметра μ будем изучать методы получения достаточных условий устойчивости полагая, что решение системы без нейтральных членов

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + By(\mu t) \quad t \geqslant t_0 > 0, \tag{2}$$

асимптотически устойчиво, при этом собственные значения λ матрицы A имеют отрицательную вещественную часть и для решения системы без нейтральных членов $y(t)$ справедлива оценка

$$\|y(t)\| \leqslant \hat{C}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\hat{\delta}} \sup_{\eta} \|y(\eta)\|, \quad \hat{C} = \text{const}, \quad \hat{C} > 1, \quad \hat{\delta} = \text{const}, \quad \hat{\delta} > 0. \quad t \geqslant t_0 > 0. \tag{3}$$

2. Исследование линейных систем с линейным запаздыванием при μ, близком к единице. Академик Н. Н. Красовский (см. [8]) перенес на уравнения с запаздывающим аргументом идею использования квадратичных форм Ляпунова, производные от которых по времени в силу уравнений рассматриваемой системы представляют собой подынтегральную функцию некоторого критерия, описывающего качество переходного процесса; рассматривая решения систем с запаздыванием в функциональном фазовом пространстве, ввел соответствующее обобщение функций Ляпунова — функционалы Ляпунова. Такой функциональный подход лежит в основе современной качественной теории функционально-дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = a\bar{y}(t) + b\bar{y}(\mu t) + r(t)d\bar{y}(\mu t)/dt, \quad \mu = 1-\varepsilon, \quad t \geqslant t_0 > 0. \tag{4}$$

Здесь a и b — скалярные постоянные, $r(t)$ — скалярная функция времени t, ε — малая положительная постоянная.

Для получения достаточных условий асимптотической устойчивости уравнения без нейтральных членов

$$\frac{d\bar{y}^0(t)}{dt} = a\bar{y}^0(t) + b\bar{y}^0(\mu t), \quad \mu = 1-\varepsilon, \quad t \geqslant t_0 > 0, \tag{5}$$

рассмотрим функционал

$$V(t, \bar{y}^0(t), \bar{y}^0(\mu t)) = (\bar{y}^0(t))^2 + 2\alpha \int_{\mu t}^{t} (\bar{y}^0(s))^2 ds. \tag{6}$$

Вычислив его производную в силу системы без нейтральных членов и потребовав отрицательной определенности получившейся квадратичной формы переменных $x(t)$, $x(\mu t)$ (см. подробности в [8, 11]), получаем совокупность условий

$$\alpha = -\frac{a}{2}, \quad a < 0, \quad |b| < \sqrt{\mu}|a|. \tag{7}$$

Отметим, что в [1,5] с помощью преобразования Лапласа получена более широкая область асимптотической устойчивости:

$$a < 0, \quad |b| < |a|.$$

Очевидно, что при $\varepsilon \to 0$ получаем достаточно схожие условия асимптотической устойчивости. К достоинствам этого метода можно отнести тот факт, что подобным методом можно исследовать асимптотическую устойчивость и при переменной величине $b(t)$.

Рассмотрим теперь исходное уравнение нейтрального типа, используя для получения достаточных условий его асимптотической устойчивости методику, предложенную в [7]. При этом для дальнейшего исследования асимптотических свойств систем нейтрального типа

$$\frac{d}{d\tau}\big[x(\tau) - G(\tau, x(\tau-\sigma))\big] = F\big(\tau, x(\tau), x(\tau-\sigma)\big), \quad F(\tau,0,0)=0, \quad G(\tau,0)=0, \quad x(\eta)=\phi(\eta), \tag{8}$$

нам понадобятся дополнительные определения. Рассмотрим наряду с системой (8) разностное неравенство

$$\big|\bar{Z}(\tau, y(\tau), y(\tau-\sigma))\big| = \big|y(\tau) - G(\tau, y(\tau-\sigma))\big| \leqslant f(\tau), \quad G(\tau,0)=0, \quad y(\eta)=\phi(\eta). \tag{9}$$

Здесь $f(\tau)$ — неотрицательная непрерывная скалярная функция. Обозначим через $y(\tau,\phi)$ решение разностного неравенства (9).

Определение 1. Тривиальное решение неравенства (8) назовем f-устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon)$, что при всех начальных условиях и удовлетворяющих условиям

$$\|\phi(\tau_0)\| \leqslant \delta(\varepsilon), \quad \sup_{\tau>\tau_0} f(\tau) \leqslant \delta(\varepsilon)$$

правых частях имеем $|y(\tau,\phi)| \leqslant \varepsilon$.

Определение 2. Если наряду с этим

$$\lim_{t\to\infty} y(t,\phi) = 0$$

при любой начальной функции $\phi(\eta)$ (вектор-функции ограниченной вариации) и всякой правой части $f(\tau)$, удовлетворяющей условию $f(\tau) \xrightarrow[\tau\to\infty]{} to0$, то тривиальное решение называется f-асимптотически устойчивым.

Определение 3. Тривиальное решение неравенства (8) называется f-ограниченным, если каждой ограниченной функции $f(\eta)$ отвечает ограниченное решение $y(\tau,\phi)$.

Очевидно, для линейных систем всякое f-ограниченное решение f-устойчиво.

В целях дальнейшего исследования асимптотических свойств уравнения (4) положим

$$\bar{Z}(t, y_t) = y(t) - r(t)y(\mu t).$$

Рассмотрим функционал

$$V^0\big(t, y_t, \bar{Z}(t, y_t)\big) = \bar{Z}(t, y_t) = y(t) - r(t)y(\mu t).$$

Полагаем, что справедливо неравенство

$$|r(t)y(\mu t)| < \bar{\gamma}|y(\tau-\sigma)|, \quad \tau = \ln(t), \quad \sigma = -\ln(\mu), \quad \bar{\gamma} = \mathrm{const}, \quad 0 < \bar{\gamma} < 1. \tag{10}$$

Известно (см. [7]), что ввиду этого тривиальное решение неравенства

$$\big|y(\tau) - r(\tau)y(\tau-\sigma)\big| \leqslant f(\tau) \tag{11}$$

асимптотически f-устойчиво (более подробное обоснование будет представлено ниже).

Очевидно, что функционал $\bar{Z}(t, y_t)$ является определенно положительным, его производная будет определенно отрицательной. Но тогда в силу последнего соотношения получаем, что тривиальное решение уравнения нейтрального типа первого порядка асимптотически устойчиво.

3. Исследование линейных систем с линейным запаздыванием при малом μ. Рассмотрим исходную систему при достаточно малом $\mu > 0$. Произведем замену переменной $\tau = \ln(t)$. Получаем систему с постоянным запаздыванием

$$\frac{dz(\tau)}{d\tau} = e^{\tau}\big(Az(\tau) + Bz(\tau-\sigma)\big) + \mu\hat{R}(\tau)\frac{dz(\tau-\sigma)}{d\tau}, \quad \sigma = -\ln(\mu). \tag{12}$$

Одновременно рассматриваем систему без нейтральных членов, асимптотические свойства которой были исследованы ранее (см. [1, 5]):

$$\frac{dz^0(\tau)}{d\tau} = e^{\tau}\big(Az^0(\tau) + Bz^0(\tau-\sigma)\big). \tag{13}$$

Именно, при выполнении совокупности неравенств

$$\mathrm{Re}(\lambda) < -\beta_1, \quad |\rho| < q, \quad \beta_1 = \mathrm{const}, \quad \beta_1 > 0, \quad q = \mathrm{const}, \quad 0 < q < 1, \tag{14}$$

где λ — собственные значения матрицы A, ρ — собственные значения матрицы $A^{-1}B$, система без нейтральных членов экспоненциально устойчива, и для ее решения справедлива оценка, схожая с (3):

$$\|z^0(\tau)\| \leqslant \bar{C}e^{-\beta_2(\tau-\tau_0)} \sup_{\eta} \|\phi(\eta)\|, \quad \tau > \tau_0, \quad \beta_2 = \mathrm{const}, \quad \beta_2 > 0, \quad \bar{C} = \mathrm{const}, \quad \bar{C} > 1. \tag{15}$$

Отметим, что при этом константы $\bar{C}$ и β_2 одни и те же при любых $\tau_0 \geqslant \tau_0^*$, τ_0^* фиксировано. Кроме того, матрица $\exp\{A(t-s)\}$ допускает оценку

$$\|\exp\{A(t-s)\}\| \leqslant \hat{C}e^{-\hat{\beta}_1(t-s)}, \quad 0 < s < t, \quad \hat{C} = \mathrm{const}, \quad \hat{C} > 1. \tag{16}$$

Для дальнейших исследований, полагая $z(\tau_0 + n\sigma) = z_{n+1}(\tau)$, $\tau_0 < \tau \leqslant \tau_0 + \sigma$, перейдем к счетной системе дифференциально-разностных уравнений на конечном промежутке времени $[\tau_0, \tau_0 + \sigma]$

$$\mu^n \frac{dz_{n+1}(\tau)}{d\tau} = e^{\tau}\big(Az_{n+1}(\tau) + Bz_n(\tau)\big) + \mu\hat{R}_{n+1}(\tau)\frac{dz_n(\tau)}{d\tau}. \tag{17}$$

Здесь $R_{n+1}(\tau) = R(\tau_0 + n\sigma)$, $z_{n+1}(\tau_0) = z_n(\tau_0 + \sigma)$.

Соответствующая счетная система дифференциально-разностных уравнений без нейтральных членов будет иметь вид

$$\mu^n \frac{dz^0_{n+1}(\tau)}{d\tau} = e^{\tau}\big(Az^0_{n+1}(\tau) + Bz^0_n(\tau)\big), \quad z^0_{n+1}(\tau_0) = z^0_n(\tau_0 + \sigma), \quad \tau \in [\tau_0, \tau_0 + \sigma]. \tag{18}$$

Представим вектор-функцию $z_{n+1}(\tau)$ в интегральной форме (форме Коши; см. [11]):

$$z_{n+1}(\tau) = \exp\Big\{\mu^{-n}A\big(e^{\tau} - e^{\tau_0}\big)\Big\}z_n(\tau_0 + \sigma) + \\ + \int\limits_{\tau_0}^{\tau} \exp\Big\{\mu^{-n}A\big(e^{\tau} - e^{s}\big)\Big\}\left(\frac{e^s}{\mu^n}Bz_n(s) + \mu R_{n+1}(s)\frac{dz_n(s)}{ds}\right)ds. \tag{19}$$

Рассмотрим в последнем равенстве выражение

$$\mu\int\limits_{\tau_0}^{\tau} \exp\Big\{\mu^{-n}A\big(e^{\tau} - e^{s}\big)\Big\}R_{n+1}(s)z'_n(s)ds. \tag{20}$$

Считаем его «возмущением» для системы без нейтральных членов, имеющей вид

$$z^0_{n+1}(\tau) = \exp\Big\{\mu^{-n}A\big(e^{\tau} - e^{\tau_0}\big)\Big\}z^0_n(\tau_0 + \sigma) + \int\limits_{\tau_0}^{\tau} \exp\Big\{\mu^{-n}A\big(e^{\tau} - e^{s}\big)\Big\}\frac{e^s}{\mu^n}Bz^0_n(s)ds. \tag{21}$$

Рассмотрим оценки «возмущающих» членов. Для интеграла, содержащего $z'_0(s)$, имеем оценку

$$\mu\left\|\int\limits_{\tau_0}^{\tau} \exp\Big\{\mu^{-n}A\big(e^{\tau} - e^{s}\big)\Big\}R_{n+1}(s)z'_0(s)ds\right\| \leqslant \mu\frac{\hat{C}\hat{R}}{\hat{\beta}_1}\sup_{\eta}\|z'_0(\eta)\|. \tag{22}$$

Для интегралов, содержащих величины $z'_n(s)$, $n = 1, 2, \ldots$, производя интегрирование по частям, имеем соотношения

$$\int\limits_{\tau_0}^{\tau} \exp\Big\{\mu^{-n}A\big(e^{\tau} - e^{s}\big)\Big\}R_{n+1}(s)z'_n(s)ds = \\ = R_{n+1}(\tau)z_n(\tau) - \exp\Big\{\mu^{-n}A\big(e^{\tau} - e^{\tau_0}\big)\Big\}R_{n+1}(\tau_0)z_n(\tau_0) - \mathrm{I}_n, \tag{23}$$

где

$$\mathrm{I}_n = \int\limits_{\tau_0}^{\tau} \exp\Big\{\mu^{-n} A\big(e^{\tau} - e^{s}\big)\Big\} e^{-s} \left[\frac{dR_{n+1}(s)}{ds} - AR_{n+1}(s)\right] z_n(s) ds. \tag{24}$$

Очевидно, $\|\mathrm{I}_n\| = O(\mu^n)\| \max_\tau \|z_n(\tau_0)\|$. Следовательно, при малом $\mu > 0$ эти «возмущения» также малы. Тогда при ограниченности величин $\sup_\eta \|z_0(\eta)\|$, $\sup_\eta \|z_0'(\eta)\|$ ввиду оценок (14) из результатов [3] следует, что и решение «возмущенной» системы экспоненциально устойчиво при достаточно малом $\mu > 0$.

4. Следствие. При исследовании систем с постоянными матрицами A, B и R для асимптотической устойчивости исследуемой системы нейтрального типа при любом $0 < \mu < 1$ при выполнения оценок (14) достаточно, чтобы матрица R имела собственные значения ρ_R, по модулю меньшие единицы (см. [5]). В связи с этим рассмотрим несколько иную систему при $R(\tau + \sigma) = R(\tau)$:

$$\frac{d}{/d\tau}\big[z(\tau) - \mu R(\tau) z(\tau)\big] = e^{\tau}\big[Az(\tau) + Bz(\tau - \sigma)\big]. \tag{25}$$

Любую периодическую вектор-функцию можно представить в виде абсолютно сходящегося ряда Фурье (см. [6]). Тогда имеем соотношение

$$R(\tau) = \frac{\bar{\alpha}_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}\left(\bar{\alpha}_j \cos\left(\frac{2\pi j(\tau - \tau_0)}{\sigma}\right) + \bar{\beta}_j \sin\left(\frac{2\pi j(\tau - \tau_0)}{\sigma}\right)\right). \tag{26}$$

Коэффициенты данного ряда вычисляются следующим образом (см. [6]):

$$\bar{\alpha}_0 = \frac{2}{\sigma}\int\limits_{\tau_0}^{\tau_0+\sigma} R(s) ds, \quad \bar{\alpha}_j = \int\limits_{\tau_0}^{\tau_0+\sigma} R(s)\cos\left(\frac{2\pi sj}{\sigma})\right) ds, \quad \bar{\beta}_j = \int\limits_{\tau_0}^{\tau_0+\sigma} R(s)\sin\left(\frac{2\pi sj}{\sigma}\right) ds. \tag{27}$$

Ввиду абсолютной сходимости ряда Фурье для системы первого приближения достаточно взять вместо матрицы $R(\tau)$ тригонометрический полином k-го порядка $Q_k(\tau)$, удовлетворяющий условию $\|R(\tau) - Q_k(\tau)\| < \varepsilon$, где ε — достаточно малое положительное число. Имеем систему первого приближения

$$\frac{d}{d\tau}\big(y^0(\tau) + \mu Q_k(\tau) y^0(\tau - \sigma)\big) = e^{\tau}\big(Ay^0(\tau) + By^0(\tau - \sigma)\big). \tag{28}$$

Если сделать замену переменной $\vartheta = \mu\tau$, получаем систему

$$\left(y^0(\vartheta) + \mu Q_k(\vartheta) y^0\left(\vartheta - \frac{\sigma}{\mu}\right)\right)' = \mu^{-1} e^{\mu^{-1}\vartheta}\left(Ay^0(\vartheta) + By^0\left(\vartheta - \frac{\sigma}{\mu}\right)\right). \tag{29}$$

Получили, что правая часть системы (27) по прежнему не является ограниченной (ее структура не изменилась), а нестационарные члены в левой части последнего соотношении (вследствие малости параметра μ) являются достаточно быстро осциллирующими (см. [3]); следовательно, при асимптотической устойчивости решения более простой системы (системы первого приближения)

$$\left(y^0(\vartheta) + \frac{\mu}{2}\bar{\alpha}_0 y^0\left(\vartheta - \frac{\sigma}{\mu}\right)\right)' = \mu^{-1} e^{\mu^{-1}\vartheta}\left(Ay^0(\vartheta) + By^0\left(\vartheta - \frac{\sigma}{\mu}\right)\right) \tag{30}$$

является асимптотически устойчивой и система (23) (см. [3]). Но тогда асимптотически устойчива также исходная система (10) поскольку производная $dR(\tau)/d\tau$ ограничена. Отметим, что асимптотическая устойчивость систем с постоянными матрицами A, B, R предполагает, что собственные значения матрицы R меньше единицы по модулю (см. [5]).

Замечание 1. Наличие экспоненты в правой части систем вида (10) позволяет исследовать системы более общего вида, в частности, с периодическими (периода σ) матрицами $A(\tau)$, $B(\tau)$, $R(\tau)$. При этом при наличии экспоненциальной устойчивости системы без нейтральных членов требование для собственных значений матрицы $\mu R(\tau)$ быть меньше единицы по модулю не является достаточным для экспоненциальной устойчивости всей исследуемой системы.

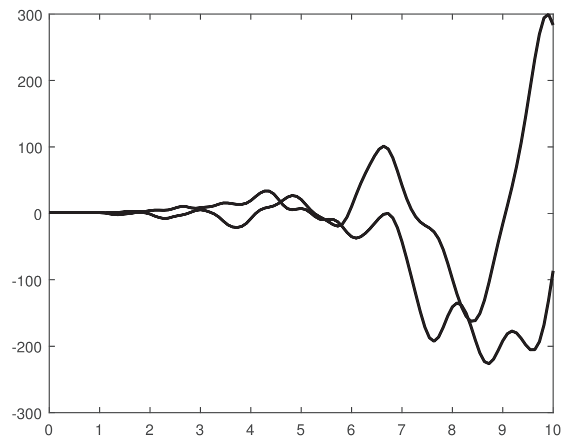

Рис. 1

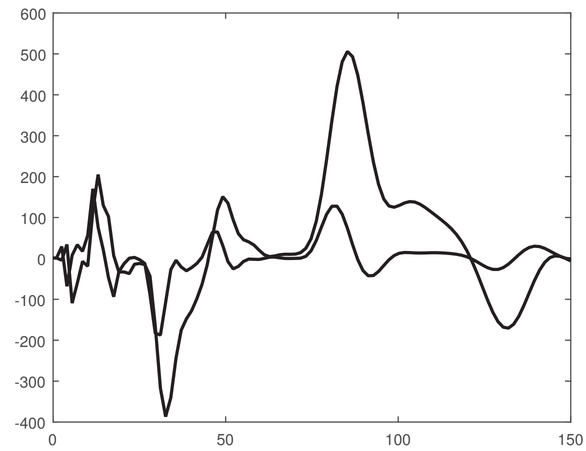

Рис. 2

Приведем пример. Рассмотрим поведение системы второго порядка с матрицами $A(\tau)$, $B(\tau)$, $R(\tau)$, имеющими вид

$$A(\tau) = \begin{pmatrix} -1 - 9\cos^2(6\tau) + 6\sin(12\tau) & \cos^2(6\tau) + 4{,}5\sin(12\tau) \\ -12\sin^2(6\tau)] + 4{,}5\sin(12\tau) & -1 - 9\sin^2(6\tau) - 6\sin(12\tau) \end{pmatrix}, \tag{31}$$

$$B(\tau) = \begin{pmatrix} -4{,}5\cos^2(6\tau) + 3\sin(12\tau) & -14{,}4\cos^2(6\tau) + 13{,}35\sin(12\tau) - 2 \\ -6\sin^2(6\tau) + 2{,}25\sin(12\tau) & -0{,}3 - 2{,}67\sin^2(6\tau)6 + 7{,}2\sin(12\tau) \end{pmatrix}, \tag{32}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 1 & 0{,}6 \end{pmatrix}.$$

Ввиду того, что в правой части системы имеется экспоненциальный множитель, для экспоненциальной устойчивости системы без запаздывания достаточно, чтобы собственные числа λ матрицы (29) имели отрицательную вещественную часть (см. [2]). Условие выполнено: $\lambda_1(A) = -1$, $\lambda_1(A) = -10$. Теперь же в случае экспоненциальной устойчивости вырожденной системы (т.е. системы вида (19)) при $\mu = 0$ экспоненциально устойчива и система без нейтральных членов. В нашем случае для соответствующей матрицы вырожденной системы

$$-A^{-1}B = \begin{pmatrix} -0{,}5 & -2 \\ 0 & -0{,}3 \end{pmatrix}; \tag{33}$$

собственные значения этой матрицы равны $-0{,}5$ и $-0{,}3$, т.е. вырожденная система экспоненциально устойчива.

Система с нейтральными членами в правой части неустойчива даже при некоторых $\mu_0 \leqslant \mu < 1$, например, при $\mu = 0{,}8825$, несмотря на то, что модули собственных значений постоянной матрицы R меньше единицы. Но при малых μ, в частности, при $\mu = 0{,}3679$, решение рассматриваемой системы асимптотически устойчиво. В [4] обоснована достаточная точность применения некоторых численных методов для исследования асимптотических свойств систем с запаздыванием. Графики систем без нейтральных членов, исходной системы при $\mu = 0{,}8825$ и при $\mu = 0{,}3679$ приведены на рис. 2 и **??** соответственно. Начальный момент $\tau_0 = 1$, начальная вектор-функция имеет компоненты $(1;1)^T$.

Рассмотрим асимптотическое поведение решения некоторых более сложных систем. Пусть по-прежнему матрицы A и B постоянны и их собственные значения удовлетворяют неравенству (14), матрица $R(\tau)$ имеет вид $R(\tau) = R_0 + \alpha(\tau)$, где R_0 — постоянная матрица размерности $m \times m$, собственные значения ν которой меньше единицы по модулю, матрица $\alpha(\tau)$ размерности $m \times m$ периодична с периодом σ, имеет ограниченную производную и удовлетворяет неравенству

$\|\alpha(\tau)\| < \delta$, где δ — достаточно малое положительное число. Тогда система (17) будет иметь вид

$$\mu^n \frac{dz_{n+1}(\tau)}{d\tau} = e^{\tau}\big(Az_{n+1}(\tau) + Bz_n(\tau)\big) + \mu\big(R_0 + \alpha(\tau)\big)\frac{dz_n(\tau)}{d\tau}. \tag{34}$$

Запишем решение этой системы в интегральной форме, считая неоднородностями члены с запаздыванием:

$$z_{n+1}(\tau) = \exp\big\{\mu^{-n}A\big(e^{\tau} - e^{\tau_0}\big)\big\}z_n(\tau_0+\sigma) + \int\limits_{\tau_0}^{\tau}\exp\big\{\mu^{-n}A\big(e^{\tau} - e^{s}\big)\big\}e^{s}Bz_n(s)ds +$$
$$+\,\mu\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\exp\big\{\mu^{-n}A\big(e^{\tau} - e^{s}\big)\big\}\big(R_0 + \alpha(s)\big)\big(z_n(s)\big)'ds.$$

Здесь $\big(z_n(s)\big)'$ — производная от вектор-функции $z_n(\tau)$. Рассмотрим в последнем равенстве интеграл, содержащий матрицу $\alpha(s)$; проинтегрировав по частям, получаем соотношение

$$\mathbb{S}_n = \int\limits_{\tau_0}^{\tau}\exp\big\{\mu^{-n}Ae^{s}\big\}\alpha(s)\big(z_n(s)\big)'ds = \exp\big\{\mu^{-n}Ae^{s}\big\}\delta(s)z_n(s)\Big|_{\tau_0}^{\tau} +$$
$$+\int\limits_{\tau_0}^{\tau}A\exp\big\{\mu^{-n}Ae^{s}\big\}\mu^{-n}e^{s}\delta(s)z_n(s) - \int\limits_{\tau_0}^{\tau}\exp\big\{\mu^{-n}Ae^{s}\big\}\delta'(s)z_n(s)ds.$$

Очевидно, для величины $\exp\big\{\mu^{-n}Ae^{\tau}\big\}\mathbb{S}_n$, $\tau \in [\tau_0, \tau_0+\sigma]$, справедлива оценка

$$\Big\|\exp\big\{\mu^{-n}A\tau\big\}\mathbb{S}_n\Big\| \leqslant 2\delta + \frac{\hat{C}}{\hat{\beta}_1}\left[\|A\|\delta + \mu^n\sup_t\|\delta'(\tau)\|\right]\|z_n(\tau)\|_1 = \delta_n\|z_n(\tau)\|_1. \tag{35}$$

Здесь и далее $\|z_n(\tau)\|_1 = \max\limits_{\tau\in[\tau_0,\tau_0+\sigma]}\|z_n(\tau)\|$. Считая возмущениями члены, содержащие матрицу $\alpha(\tau)$, и учитывая их малость, вводя оператор сдвига (см. [10])

$$\mathbb{T}_{n,\mu} = \exp\Big\{\mu^{-n}A\big(e^{\tau} - e^{\tau_0}\big)\Big\}w(\tau_0+\sigma) + \int\limits_{\tau_0}^{\tau}\exp\Big\{\mu^{-n}A\big(e^{\tau} - e^{s}\big)\Big\}\left[e^{s}Bw(s) + \mu R(s)w'(s)\right]ds, \tag{36}$$

получаем «возмущенное» неоднородное разностное уравнение

$$z_{n+1(\tau)} = \mathbb{T}_{n,\mu}\, z_n(s) + \bar{f}_n(z_n(s)). \tag{37}$$

Здесь вектор-функция $\bar{f}_n(z_n(s))$ удовлетворяет оценке малости (35). Запишем решение этого «возмущенного» уравнения с помощью формулы вариации постоянных (см. [10]). Имеем

$$\left\|\prod_{j=0}^{n}\mathbb{T}_{j,\mu}(w(\eta), w'(\eta))\right\| \leqslant \bar{C}(\bar{q}_\mu)^n\left(\sup_\eta\|w(\eta)\| + \sup_\eta\|w'(\eta)\|\right), \tag{38}$$

где $\bar{C} = \mathrm{const}$, $\bar{C} > 1$, $q_\mu = \mathrm{const}$, $0 < q_\mu < \bar{q} < 1$; эта оценка следует из результатов [5]. Кроме того, учитывая, что $\delta_{j+1} < \delta_j$ по крайней мере для $j > N$, где натуральное число N достаточно велико, получим следующую оценку для $\|z_{n+1}(\tau)\|_1$ при $n > N$:

$$\|z_{n+1}(\tau)\|_1 < \bar{C}(\bar{q}_\mu)^{n-N}\|z_N(\tau)\|_1 + \bar{C}\sum_{j=1}^{n-N-1}\big(\bar{q}_\mu\big)^j\delta_j\|z_j(\tau)\|_1 + \delta_n\|z_n(\tau)\|_1. \tag{39}$$

Разделим обе части этого неравенства на величину $(\bar{q}_\mu)^{n-N}$, введем обозначение $u_j = \|z_N(\tau)\|_1/(\bar{q}_\mu)^{n-j}$ и положим величину $z_N\tau)$ равной начальной вектор-функции (см. [10]); тогда получаем очередное неравенство

$$u_{n+1} < \sup_{k\geqslant N} \delta_k \frac{\bar{C}}{\bar{q}_\mu} \sum_{j=N+1}^{n} u_j. \tag{40}$$

Отсюда, возвращаясь к переменным $\|z_j(\tau)\|_1$, окончательно получаем, что для решения «возмущенного» уравнения, имеющего начальной вектор-функцией величину $z_N(\tau)$ при $q_\mu+\sup\limits_{k\geqslant N}\delta_k\bar{C} < 1$, справедлива оценка

$$\|z_{n+1}(\tau)\|_1 < \bar{C}\left(1+\frac{\delta_0}{q_\mu}\right)\left(1+\frac{\bar{C}\delta_0}{q_\mu}\right)^{-1}\bigl[q_\mu+\bar{C}\delta_0\bigr]^{n-N}\|z_N(\tau)\|_1, \quad \delta_0=\sup_{k\geqslant N}\delta_k. \tag{41}$$

Аналогично, ввиду сходимости ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\mu^j$ с учетом неравенства, подобного (40), можно доказать ограниченность величин $\|z_1(\tau)\|_1$, $\|z_2(\tau)\|_1$, $\|z_N(\tau)\|_1$. Следовательно, «возмущенная» система асимптотически устойчива.

Вновь рассматривая нестационарную систему m-го порядка, аналогичную (25), применим для исследования ее асимптотических свойств аппарат, разработанный в [7]. Преобразуем ее аналогично соотношениям (9), (10). Имеем

$$\begin{gathered}\bigl[z(\tau)-\mu R(\tau)z(\tau-\sigma)\bigr]' = e^{\tau}\Bigl\{A(\tau)z(\tau)+\bigl[B(\tau)+e^{-\tau}R'(\tau)\bigr]z(\tau-\sigma)\Bigr\},\\ A(\tau+\sigma)=A(\tau), \quad B(\tau+\sigma)=B(\tau).\end{gathered} \tag{42}$$

Полагаем, что собственные значения $\lambda(\tau)$ матрицы $A(\tau)$ удовлетворяют неравенству

$$\mathrm{Re}(\lambda(\tau)) < -2d, \quad d=\mathrm{const}>0,$$

и, наряду с этим, собственные значения $\rho(\tau)$ матрицы $-A^{-1}(\tau)B(\tau)$ удовлетворяют неравенству $|\rho(\tau)|<1-2\varepsilon$. Отметим, что в этом случае фундаментальная матрица решений $U_n(\tau,s)$ соответствующей системы без запаздывающих членов

$$\mu^n\frac{d\bar{y}(\tau)}{d\tau} = e^{\tau}\bigl(A(\tau)\bar{y}(\tau)+B(\tau)\bar{y}(\tau-\sigma)\bigr), \quad \tau_0\leqslant\tau\leqslant\tau_0+\sigma, \tag{43}$$

при достаточно большом n допускает оценку

$$\|U_n(\tau,s)\|\leqslant M\exp\left\{-\frac{d}{\mu^n}(e^{\tau}-e^{s})\right\}, \quad M=\mathrm{const}, \quad M>1, \quad \tau_0\leqslant s\leqslant\tau\leqslant\tau_0+\sigma. \tag{44}$$

Следовательно, система без нейтральных членов экспоненциально устойчива. Наряду с этими условиями полагаем, что $R(\tau+\sigma)=R(\tau)$, при этом величина μ настолько мала, что тривиальное решение разностного неравенства

$$\bigl\|z(\tau)-\mu R(\tau)z(\tau-\sigma)\bigr\|\leqslant f(\tau), \tag{45}$$

где $f(\tau)$ — положительная непрерывная скалярная функция и $\lim\limits_{\tau\to\infty}f(\tau)=0$), асимптотически f-устойчиво. Покажем, что и решение системы (42) асимптотически устойчиво. Достаточные условия асимптотической f-устойчивости неравенства (45) приведены в [7]. Умножив обе части системы (42) на $e^{-\tau}$ ввиду того, что производная системы без нейтральных членов также асимптотически устойчива (см. [2]). Учитывая асимптотическую f-устойчивость разностной системы (45), получаем при $\tau\to\infty$ асимптотическое равенство

$$A(\tau)z(\tau)+\bigl[B(\tau)+e^{-\tau}R'(\tau)\bigr]z(\tau-\sigma)-\bar{F}(\tau)\bigl[\|z(\eta)\|+\|z'(\eta)\|\bigr]=0, \tag{46}$$

где $\bar{F}(\tau)$ — исчезающая вектор-функция.

Рассмотрим вначале асимптотическое поведение вырожденной системы первого приближения

$$\bar{y}(\tau)=-\bar{A}^{-1}(\tau)\bar{B}(\tau)\bar{(}\tau-\sigma). \tag{47}$$

Покажем, что существуют такие постоянные $\bar{L}_0 > 1$ и $\bar{q} \in (0, 1-\varepsilon)$, что для решения этой разностной системы при $\tau \in [\tau_0 + n(n-1)\sigma, \tau_0 + n\sigma]$ справедлива оценка (см. [10])

$$\sup_{\tau} \|\bar{y}(\tau)\| \leqslant \bar{L}_0(\bar{q})^n \sup_{\tau} \|y_0(\tau)\|, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{48}$$

Ввиду равномерной непрерывности (по τ) матриц $A^{-1}(\tau)B(\tau)$ мы можем разбить интервал $[0, \sigma]$ на конечное число l таких равных промежутков длиной $< \hat{\delta}_1$, что справедливо неравенство

$$\left\| A^{-1}(\tau)B(\tau) - A^{-1}(\tau_j)B(\tau_j) \right\| < \bar{\varepsilon} :$$
$$|\tau - \tau_j| < \delta_1, \quad j = 1, 2, \dots, l, \quad 0 < \tau_1 < \dots < \tau_l = \sigma.$$

Но тогда при достаточно малом $\bar{\varepsilon}$ для каждого промежутка $[\tau_j, \tau_{j+1}]$ найдутся такие постоянные $\bar{L}_j > 1$, что справедлива оценка

$$\left\| \prod_{i=1}^{n} A^{-1}(\tau + j\sigma)B(\tau + j\sigma) \right\| < L_j \bar{\gamma}^n, \quad \bar{\gamma} = \text{const}, \quad 0 < \gamma < \bar{\gamma} < 1, \quad j = 1, 2, \dots, l.$$

Отсюда следует, что для любых $\tau \in [0, \sigma]$ подобное неравенство справедливо при константах $\bar{L}_0 = \max_j L_j$ и $\bar{q} = \bar{\gamma}$. Следовательно, вырожденная система (47) экспоненциально устойчива. Тогда для неоднородной системы первого приближения, используя формулу вариации постоянных, получаем последовательно на интервалах $\tau \in [\tau_0 + n(n-1)\sigma, \tau_0 + n\sigma]$, $n = 1, 2, \dots$, следующую оценку:

$$\sup_{\tau} \|\bar{y}(\tau)\| \leqslant \bar{L}_0(\bar{q})^n \sup_{\tau} \|y_0(\tau)\| + \bar{L}_0(\bar{q})^{n-1} F_1 + \bar{L}_0(\bar{q})^{n-1} F_2 + \dots + F_n. \tag{49}$$

Здесь

$$F_j = \sup_{\tau \in [\tau_0 + \sigma(j-1), \tau_0 + \sigma j]} \|F(\tau)\|.$$

Рассмотрим это неравенство, представив правую часть следующим образом:

$$\sup_{\tau} \|\bar{y}(\tau)\| \leqslant \Big\{ \bar{L}_0(\bar{q})^n \sup_{\tau} \|y_0(\tau)\| + \bar{L}_0(\bar{q})^{n-1} F_1 + \bar{L}_0(\bar{q})^{n-1} F_2 + \dots + \bar{L}_0(\bar{q})^{n-k} F_k \Big\} + \\ + \bar{L}_0(\bar{q})^{n-k-1} F_{k+1} + \dots + F_n. \tag{50}$$

Сумма в фигурных скобках в правой части не превосходит величины

$$\bar{L}_0 \frac{\bar{q}^{n-k}}{1-\bar{q}} \sup_{\tau} \|F(\tau)\|$$

и, следовательно, стремится к нулю при $n \to \infty$. Сумма же оставшихся членов $\bar{S}_k$ в правой части соотношения (50) не превосходит величины

$$\frac{\sup\limits_{j \geqslant n-k} \|F_j(\tau)\|}{1-\bar{q}}.$$

Поскольку $F(\tau)$ — исчезающая функция, имеем $\lim\limits_{n-k \to \infty} \sup \bar{S}_k = 0$. Следовательно, и для вектор-функции $z(\tau)$ имеем предельное равенство

$$\lim_{\tau \to \infty} \|z(\tau)\| = 0, \tag{51}$$

т.е. из асимптотической устойчивости системы первого приближения с учетом равенства (46) следует и асимптотическая устойчивость системы (42).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гребенщиков Б Г.* Асимптотическое поведение решения одной системы функционально-разностных уравнений// в кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными (*Матвеев Н. М.*, ред.). — Л., 1989. — С. 24–31.
2. *Гребенщиков Б. Г.* Об устойчивости систем с постоянным запаздыванием и с экспоненциальными коэффициентами// в кн.: Математический анализ. Вопросы теории, истории и методики преподавания (*Матвеев Н. М.*, ред.). — Л., 1990. — С. 138–148.
3. *Гребенщиков Б. Г.* Об устойчивости по первому приближению одной нестационарной системы с запаздыванием// Изв. вузов. Мат. — 2012. — № 2. — С. 34–42.
4. *Гребенщиков Б. Г., Загребина С. А., Ложников А. Б.* Применение некоторых численных методов для решения систем с линейным запаздыванием// Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. Мех. Физ. — 2023. — *15*, № 1. — С. 5–12.
5. *Гребенщиков Б. Г., Рожков В. И.* Устойчивость стационарных систем нейтрального типа с линейными запаздываниями// в кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными (*Матвеев Н. М.*, ред.). — СПб., 1992. — С. 50–56.
6. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
7. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. — М.: Наука, 1981.
8. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. — М.: Физматгиз, 1959.
9. *Ланкастер П.* Теория матриц. — М.: Наука, 1978.
10. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. — М.: Мир, 1971.
11. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С .Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняюзимся аргументом. — М.: Наука, 1971.
12. *Polyanin A. D., Sorokin V. G., Zhurov A. I.* Delay Ordinary and Partial Differential Equations. — New York: : CRC Press, 2024.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Гребенщиков Борис Георгиевич (Grebenshchikov Boris Georgievich)
Южно-Уральский государственный университет, Челябинск
(South Ural State University, Chelyabinsk, Russia)
E-mail: grebenshchikovbg@susu.ru

Загребина Софья Александровна (Zagrebina Sofia Aleksandrovna)
Южно-Уральский государственный университет, Челябинск
(South Ural State University, Chelyabinsk, Russia)
E-mail: zagrebinasa@susu.ru