



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 234 (2024). С. 143–158
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-234-143-158

УДК 517.9, 51.72

ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ ДЛЯ ЖЕСТКИХ И МЯГКИХ ВОЗБУЖДЕНИЙ В ПЛАЗМЕ С НЕАБЕЛЕВЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

© 2024 г. Ю. А. МАРКОВ, М. А. МАРКОВА, Н. Ю. МАРКОВ

Аннотация. Разработана гамильтонова теория для коллективных продольно поляризованных глюонных возбуждений (плазмонов), взаимодействующих с классической высокоэнергетической цветозаряженной пробной частицей, распространяющейся через высокотемпературную глюонную плазму. Проведено обобщение скобки Ли–Пуассона на случай сплошной среды, включающей бозонную нормальную переменную поля a_k^a и неабелев цветной заряд Q^a , и представлены соответствующие уравнения Гамильтона. Выписаны канонические преобразования, включающие одновременно как бозонные степени свободы мягких коллективных возбуждений в горячей глюонной плазме, так и степень свободы жесткой пробной частицы, связанной с ее цветным зарядом. Получена полная система условий каноничности для этих преобразований. Найден явный вид эффективного гамильтониана четвертого порядка, описывающего упругое рассеяние плазмона на жесткой цветной частице, и получена самосогласованная система кинетических уравнений Больцмановского типа, учитывающая эволюцию по времени среднего значения цветного заряда данной частицы.

Ключевые слова: гамильтонов формализм, скобка Ли–Пуассона, каноническое преобразование, специальная унитарная группа, плазмон, кинетическое уравнение, глюонная плазма.

HAMILTONIAN FORMALISM FOR HARD AND SOFT EXCITATIONS IN A PLASMA WITH A NON-ABELIAN INTERACTION

© 2024 Yu. A. MARKOV, M. A. MARKOVA, N. Yu. MARKOV

ABSTRACT. Hamiltonian theory for collective longitudinally polarized gluon excitations (plasmons) interacting with classical high-energy color-charged test particle propagating through a high-temperature gluon plasma is developed. A generalization of the Lie–Poisson bracket to the case of a continuous medium involving bosonic normal field variable a_k^a and a non-Abelian color charge Q^a is performed and the corresponding Hamilton equations are derived. The canonical transformations including simultaneously both bosonic degrees of freedom of the soft collective excitations in the hot gluon plasma and the degree of freedom of a hard test particle associated with its color charge are presented. A complete system of the canonicity conditions for these transformations is obtained. An explicit form of the effective fourth-order Hamiltonian describing the elastic scattering of a plasmon off a hard color particle is found and the self-consistent system of Boltzmann-type kinetic equations taking into account the time evolution of the mean value of the color charge of this particle is obtained.

Keywords and phrases: Hamiltonian formalism, Lie–Poisson bracket, canonical transformation, special unitary group, plasmon, kinetic equation, gluon plasma.

AMS Subject Classification: 34C14, 82D99

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России по проекту «Аналитические и численные методы математической физики в задачах томографии, квантовой теории поля и механики жидкости и газа» (№ гос. регистрации 12104130005-1).

1. Введение. В наших предыдущих работах [4, 10] было достигнуто определенное продвижение в построении (псевдо)классического гамильтонова формализма для описания нелинейных процессов взаимодействия мягких коллективных возбуждений бозе- и ферми-типов в горячей слабовзаимодействующей кварк-глюонной плазме (КГП). В этих работах были рассмотрены простейшие случаи взаимодействий, а именно, взаимодействие коллективных продольно поляризованных бесцветных глюонных возбуждений (плазмонов) и коллективных кварк-антикварковых возбуждений (плазминов) с абнормальным соотношением между киральностью и спиральностью в КГП. В рамках общего гамильтонова подхода к выводу волновой теории в нелинейных средах с дисперсией (см. [1, 2, 13, 14]) мы определили в явном виде специальные канонические преобразования вплоть до членов третьего порядка по фермионным (b_q^i, b_q^{*i}) и бозонным (a_k^a, a_k^{*a}) нормальным переменным. Для сохранения правильной статистики мягких коллективных возбуждений в рамках классического описания мы полагали, что фермионные переменные принимают значения в алгебре Грассмана, т.е. являются антикоммутирующими. Далее нами были получены условия каноничности, связывающие между собой высшие и низшие коэффициентные функции в подынтегральных выражениях членов разложения канонических преобразований. В силу трехволновой нераспадной природы дисперсионных соотношений для бесцветных плазминов и плазмонов, канонические преобразования позволили исключить гамильтонианы третьего порядка H_3 по степеням нормальных переменных (b_q^i, b_q^{*i}) и (a_k^a, a_k^{*a}) . Исключение «несущественных» (по терминологии В. Е. Захарова [1]) гамильтонианов взаимодействия H_3 дало возможность получить новые эффективные гамильтонианы четвертого порядка $\tilde{H}_4$, подынтегральные выражения которых содержат калибровочно инвариантные амплитуды рассеяния, определяющие на древесном уровне простейшие амплитуды упругого рассеяния двух плазмонов друг на друге, плазмина на плазмоне и плазмина на плазмине.

В настоящей работе, являющейся первой статьей из двух статей цикла, мы распространяем гамильтонов анализ динамики фермионных и бозонных возбуждений в горячей КХД-среде на мягкой импульсной шкале, выполненный в [4, 10], на жесткий сектор возбуждений КГП-плазмы. Здесь мы сосредотачиваем свое внимание на исследовании процессов рассеяния мягких плазменных волн на жестких частицах в рамках формализма реального времени, основанного на кинетических уравнениях для мягких мод. При достаточно высоком уровне энергии мягких плазменных возбуждений процессы рассеяния плазмина и плазмона на жесткой частице будут давать вклады того же порядка в правую часть соответствующих уравнений Больцмана, что и вклады от процессов плазмон-плазмонного, плазмин-плазмонного и плазмин-плазминного рассеяний. Во второй статье будет проведен анализ полученной в данной работе системы кинетических уравнений и построено ее точное решение.

2. Гамильтониан взаимодействия плазмонов и жестких частиц. Как известно (см. [3]), в равновесной горячей чисто глюонной плазме существуют два типа физических мягких бозонных полей: поперечное и продольно поляризованное. Рассмотрим потенциал калибровочного поля $A_\mu^a(x)$ в виде разложения по плоским волнам (см. [6, 8]):

$$A_\mu^a(x) = \int d\mathbf{k} \left(\frac{Z_l(\mathbf{k})}{2\omega_k^l} \right)^{1/2} \left\{ \epsilon_\mu^l(\mathbf{k}) a_k^a e^{-i\omega_k^l(t-t_0)+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \epsilon_\mu^{*l}(\mathbf{k}) a_k^{*a} e^{i\omega_k^l(t-t_0)-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right\} + \\ + \sum_{\zeta=1,2} \int d\mathbf{k} \left(\frac{Z_t(\mathbf{k})}{2\omega_k^t} \right)^{1/2} \left\{ \epsilon_\mu^t(\mathbf{k}, \zeta) a_k^a(\zeta) e^{-i\omega_k^t(t-t_0)+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \epsilon_\mu^{*t}(\mathbf{k}, \zeta) a_k^{*a}(\zeta) e^{i\omega_k^t(t-t_0)-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right\}, \quad (2.1)$$

где $\epsilon_\mu^l(\mathbf{k})$ — вектор поляризации продольной моды ($\mathbf{k}$ — волновой вектор), а $\epsilon_\mu^t(\mathbf{k}, \zeta)$ — вектор поляризации поперечной моды. Дискретная переменная $\zeta = 1, 2$ обозначает два возможных состояния поперечной поляризации, а звездочка $*$ — комплексное сопряжение. Цветовые индексы $a, b, c, \dots$ пробегает значения $1, 2, \dots, N_c^2 - 1$ для цветовой группы $SU(N_c)$, в то время как векторные индексы $\mu, \nu, \lambda, \dots$ принимают значения $0, 1, 2, 3$. В данной статье мы подразумеваем суммирование по повторяющимся индексам и используем систему единиц, в которой $\hbar = c = 1$. Коэффициенты $Z_l(\mathbf{k})$ и $Z_t(\mathbf{k})$ — вычеты эффективного пропагатора глюона в полюсах продольной и поперечной

мод, соответственно. Наконец, $\omega_{\mathbf{k}}^l$ и $\omega_{\mathbf{k}}^t$ — дисперсионные соотношения соответствующих мод как функции волнового вектора $\mathbf{k}$. Амплитуды продольного $a_{\mathbf{k}}^a$ и поперечного $a_{\mathbf{k}}^a(\zeta)$ возбуждений считаем обычными (комплексными) случайными функциями, а величины математических ожиданий произведений двух бозонных амплитуд представим в виде

$$\langle a_{\mathbf{k}}^{*a} a_{\mathbf{k}'}^b \rangle = \delta^{ab} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \mathcal{N}_{\mathbf{k}}^l, \quad \langle a_{\mathbf{k}}^{*a}(\zeta) a_{\mathbf{k}'}^b(\zeta') \rangle = \delta^{ab} \delta_{\zeta\zeta'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \mathcal{N}_{\mathbf{k}}^t,$$

где $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^l$ и $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^t$ — плотности числа продольных и поперечных плазменных волн. Отметим, что эти корреляционные функции выписаны для горячей глюонной плазмы без внешних цветных полей или высокоэнергетических цветозаряженных частиц, проникающих в плазму извне.

Для простоты ограничимся анализом только процессов с продольно поляризованными плазменными возбуждениями, которые называются *плазмонами*. Дисперсионное соотношение $\omega_{\mathbf{k}}^l$ для плазмонов удовлетворяет следующему дисперсионному уравнению (см. [3]):

$$\text{Re } \varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) = 0, \quad (2.2)$$

где

$$\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \frac{3\omega_{pl}^2}{k^2} \left[1 - F\left(\frac{\omega}{|\mathbf{k}|^2}\right) \right], \quad F(x) = \frac{x}{2} \left[\ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - i\pi\theta(1-|x|) \right]$$

— продольная проницаемость, $\omega_{pl}^2 = g^2 N_c T^2 / 9$ — квадрат плазменной частоты глюонных плазменных возбуждений, T — температура системы, g — константа сильного взаимодействия.

Амплитуды $a_{\mathbf{k}}^a$ и $a_{\mathbf{k}}^{*a}$ в разложении для продольной части потенциала калибровочного поля (2.1) удовлетворяют соотношениям скобки Ли—Пуассона (LPB):

$$\{a_{\mathbf{k}}^a, a_{\mathbf{k}'}^b\}_{\text{LPB}} = 0, \quad \{a_{\mathbf{k}}^{*a}, a_{\mathbf{k}'}^{*b}\}_{\text{LPB}} = 0, \quad \{a_{\mathbf{k}}^a, a_{\mathbf{k}'}^{*b}\}_{\text{LPB}} = \delta^{ab} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (2.3)$$

С другой стороны, если рассматривать цветной заряд Q^a жесткой пробной частицы в качестве дополнительной независимой переменной для исследуемой физической системы, то аналогичная скобка Ли—Пуассона должна иметь следующий вид (см. [5, 9]):

$$\{Q^a, Q^b\}_{\text{LPB}} = f^{abc} Q^c. \quad (2.4)$$

Для случая непрерывных сред в качестве определения скобки Ли—Пуассона возьмем выражение

$$\{F, G\}_{\text{LPB}} = \int d\mathbf{k}' \left\{ \frac{\delta F}{\delta a_{\mathbf{k}'}^c} \frac{\delta G}{\delta a_{\mathbf{k}'}^{*c}} - \frac{\delta F}{\delta a_{\mathbf{k}'}^{*c}} \frac{\delta G}{\delta a_{\mathbf{k}'}^c} \right\} + \frac{\partial F}{\partial Q^a} \frac{\partial G}{\partial Q^b} f^{abc} Q^c. \quad (2.5)$$

Первый член в правой части — это стандартная каноническая скобка. Далее для простоты обозначений аббревиатуру LPB будем опускать; тем самым скобки $\{\cdot, \cdot\}$ всегда обозначают скобку Ли—Пуассона (2.5).

Запишем уравнения Гамильтона для функций $a_{\mathbf{k}}^a$, $a_{\mathbf{k}}^{*a}$ и Q^a :

$$\frac{\partial a_{\mathbf{k}}^a}{\partial t} = -i \{a_{\mathbf{k}}^a, H\} \equiv -i \frac{\delta H}{\delta a_{\mathbf{k}}^{*a}}, \quad \frac{\partial a_{\mathbf{k}}^{*a}}{\partial t} = -i \{a_{\mathbf{k}}^{*a}, H\} \equiv i \frac{\delta H}{\delta a_{\mathbf{k}}^a}, \quad (2.6)$$

$$\frac{dQ^a}{dt} = \{Q^a, H\} = \frac{\partial H}{\partial Q^b} f^{abc} Q^c, \quad Q^a|_{t=t_0} = Q_0^a. \quad (2.7)$$

Здесь функция H представляет собой гамильтониан для системы плазмонов и жесткой тестовой частицы, который равен сумме $H = H^{(0)} + H_{\text{Int}}$, где

$$H^{(0)} = \int d\mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}}^l a_{\mathbf{k}}^{*a} a_{\mathbf{k}}^a \quad (2.8)$$

— гамильтониан невзаимодействующих плазмонов, а H_{Int} — гамильтониан взаимодействия плазмонов и жесткой цветозаряженной частицы. Мы предполагаем, что данная (тестовая) частица движется в глюонной плазме с постоянной скоростью $\mathbf{v}$. Простейшим способом учета наличия движущейся частицы в этой среде является переход в систему отсчета, в которой эта частица

находится в состоянии покоя. Для этой цели достаточно заменить $a_{\mathbf{k}}^a$ на $a_{\mathbf{k}}^a \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}(t - t_0))$ в потенциале калибровочного поля (2.1). В этом случае вместо гамильтониана (2.8) будем иметь

$$H^{(0)} = \int d\mathbf{k} (\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) a_{\mathbf{k}}^{*a} a_{\mathbf{k}}^a. \quad (2.9)$$

Таким образом, $\tilde{\omega}_{\mathbf{k}}^l \equiv \omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}$ представляет собой частоту мягкого глюонного поля A_{μ}^a в системе координат, где заряд находится в состоянии покоя, т.е. частоту, воспринимаемую движущимся зарядом (за счет эффекта Доплера). Следует особо отметить одно важное для дальнейшего рассмотрения обстоятельство. В силу специфического характера дисперсионного уравнения для мягких (продольных) бозонных возбуждений (2.2) в горячей глюонной плазме коэффициент $(\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k})$ в интеграле (2.9) никогда не обращается в ноль, т.е.

$$\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} \neq 0 \quad (2.10)$$

для произвольных значений волнового вектора $\mathbf{k}$. Другими словами, линейное затухание Ландау (черенковское излучение) кинематически запрещено в горячей глюонной плазме.

В приближении малых амплитуд гамильтониан взаимодействия может быть представлен в виде формального интегро-степенного ряда по бозонным функциям $a_{\mathbf{k}}^a$ и $a_{\mathbf{k}}^{*a}$ и цветному заряду Q^a :

$$H_{\text{Int}} = H^{(3)} + H^{(4)} + \dots,$$

где гамильтониан взаимодействия третьего порядка имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} H^{(3)} = & \int d\mathbf{k} \left[\phi_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^a Q^a + \phi_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}}^{*a} Q^a \right] \\ & + \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \left\{ \mathcal{V}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a a_1 a_2} a_{\mathbf{k}}^{*a} a_{\mathbf{k}_1}^{a_1} a_{\mathbf{k}_2}^{a_2} + \mathcal{V}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{*a a_1 a_2} a_{\mathbf{k}}^a a_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} a_{\mathbf{k}_2}^{*a_2} \right\} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) + \\ & + \frac{1}{3} \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \left\{ \mathcal{U}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a a_1 a_2} a_{\mathbf{k}}^a a_{\mathbf{k}_1}^{a_1} a_{\mathbf{k}_2}^{a_2} + \mathcal{U}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{*a a_1 a_2} a_{\mathbf{k}}^{*a} a_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} a_{\mathbf{k}_2}^{*a_2} \right\} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Соответственно, гамильтониан взаимодействия четвертого порядка имеет вид

$$\begin{aligned} H^{(4)} = & \frac{1}{2} \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 \left\{ T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{*(1) a a_1 a_2} a_{\mathbf{k}}^a a_{\mathbf{k}_1}^{a_1} Q^{a_2} + T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(1) a a_1 a_2} a_{\mathbf{k}}^{*a} a_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} Q^{a_2} \right\} \\ & + i \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2) a a_1 a_2} a_{\mathbf{k}}^{*a} a_{\mathbf{k}_1}^{a_1} Q^{a_2} + \Xi Q^a Q^a. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Следует особо пояснить следующее обстоятельство. Несмотря на то, что, например, гамильтониан $H^{(3)}$ содержит смешанные вклады, формально квадратичные по переменным $a_{\mathbf{k}}^a$ и Q^a , и вклады, кубичные по $a_{\mathbf{k}}^a$, тем не менее, все выражение (2.11) представляет собой гамильтониан взаимодействия третьего порядка. Таким образом, мы присваиваем степень нелинейности 2 цветному заряду Q^a . Члены в квадратных скобках в первой строке в (2.11) соответствуют элементарным вершинам взаимодействия мягких глюонных возбуждений с жесткой цветозаряженной частицей, как показано на рис. 1. Вершинные функции $\mathcal{V}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a a_1 a_2}$ и $\mathcal{U}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a a_1 a_2}$ в оставшихся вкладах в (2.11) определяют процессы трехплазмонного взаимодействия (см. [4]). То же самое относится и к гамильтониану $H^{(4)}$, который содержит квадратичные вклады по переменной Q^a и кубичные смешанные вклады по переменным $a_{\mathbf{k}}^a$ и Q^a , однако все эти вклады образуют в точности гамильтониан взаимодействия четвертого порядка, если предположить, что степень нелинейности цветового заряда равна двум.

Вершинные функции $\mathcal{V}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a a_1 a_2}$, $\mathcal{U}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a a_1 a_2}$ и $T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(1) a a_1 a_2}$ удовлетворяют «условиям естественной симметрии», которые означают, что интегралы в уравнениях (2.11) и (2.12) не зависят от перестановки немых цветовых индексов и переменных интегрирования. Эти условия имеют следующий вид:

$$\mathcal{V}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a a_1 a_2} = \mathcal{V}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1}^{a a_2 a_1}, \quad \mathcal{U}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a a_1 a_2} = \mathcal{U}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1}^{a a_2 a_1} = \mathcal{U}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}, \mathbf{k}_2}^{a a_1 a_2}, \quad T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(1) a a_1 a_2} = T_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}}^{(1) a_1 a a_2}. \quad (2.13)$$

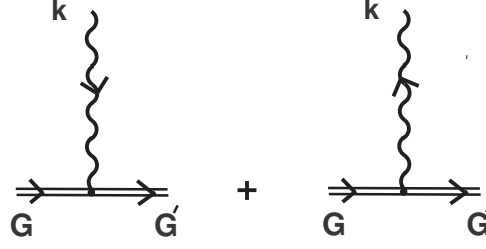


Рис. 1. Вершины элементарного взаимодействия мягких бозонных возбуждений с жесткой тестовой цветозаряженной частицей G . Двойная линия обозначает жесткую частицу с цветным зарядом Q^a . Вершины взаимодействия для входящих и выходящих волновых линий (плазмонов) определяются функциями $\phi_{\mathbf{k}}$ и $\phi_{\mathbf{k}}^*$ в гамильтониане $H^{(3)}$.

Вещественность гамильтониана (2.11) очевидна. Вещественность гамильтониана (2.12) влечет за собой справедливость дополнительного соотношения для вершинной функции $T_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}^{(2)aa_1a_2}$:

$$T_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}^{(2)aa_1a_2} = -T_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}}^{*(2)a_1aa_2}.$$

Вершинные функции в гамильтонианах $H^{(3)}$ и $H^{(4)}$ определяются специфическими свойствами исследуемой системы, в нашем случае - высокотемпературной глюонной плазмы. Явная форма трехточечных амплитуд $\mathcal{V}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}^{aa_1a_2}$ и $\mathcal{U}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}^{aa_1a_2}$ в приближении жестких температурных петель была получена в [4]:

$$\mathcal{V}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}^{aa_1a_2} = f^{aa_1a_2} \mathcal{V}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}, \quad \mathcal{U}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}^{aa_1a_2} = f^{aa_1a_2} \mathcal{U}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}, \quad (2.14)$$

$$\mathcal{V}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} = \frac{1}{2^{3/4}} g \left(\frac{\epsilon_{\mu}^l(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}^l}} \right) \left(\frac{\epsilon_{\mu_1}^l(\mathbf{k}_1)}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_1}^l}} \right) \left(\frac{\epsilon_{\mu_2}^l(\mathbf{k}_2)}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_2}^l}} \right)^* \Gamma^{\mu\mu_1\mu_2}(k, -k_1, -k_2) \Big|_{\text{on-shell}}, \quad (2.15)$$

$$\mathcal{U}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} = \frac{1}{2^{3/4}} g \left(\frac{\epsilon_{\mu}^l(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}^l}} \right) \left(\frac{\epsilon_{\mu_1}^l(\mathbf{k}_1)}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_1}^l}} \right) \left(\frac{\epsilon_{\mu_2}^l(\mathbf{k}_2)}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_2}^l}} \right)^* \Gamma^{\mu\mu_1\mu_2}(-k, -k_1, -k_2) \Big|_{\text{on-shell}}. \quad (2.16)$$

Вид эффективной трехглюонной вершины ${}^*\Gamma^{\mu\mu_1\mu_2}(k, k_1, k_2)$ в правой части этих выражений определяется формулами (A.1)–(A.3) в Приложении работы [4]. В силу цветового разложения (2.14) и свойств симметрии (2.13) для эффективных вершин (2.15) и (2.16) выполняются следующие перестановочные соотношения:

$$\mathcal{V}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} = -\mathcal{V}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_1}, \quad \mathcal{U}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} = -\mathcal{U}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_1} = -\mathcal{U}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k},\mathbf{k}_2}.$$

3. Канонические преобразования. Рассмотрим преобразование от нормальной бозонной переменной $a_{\mathbf{k}}^a$ и классического цветного заряда Q^a к новой полевой переменной $c_{\mathbf{k}}^a$ и цветному заряду $\mathcal{Q}^a$:

$$a_{\mathbf{k}}^a = a_{\mathbf{k}}^a(c_{\mathbf{k}}^a, c_{\mathbf{k}}^{*a}, \mathcal{Q}^a), \quad (3.1)$$

$$Q^a = \mathcal{Q}^a(c_{\mathbf{k}}^a, c_{\mathbf{k}}^{*a}, \mathcal{Q}^a). \quad (3.2)$$

Потребуем, чтобы уравнения Гамильтона в терминах новых переменных имели вид (2.6) и (2.7) с одним и тем же гамильтонианом H . Поскольку мы рассматриваем преобразования, не зависящие явно от времени, то старый и новый гамильтонианы численно равны, но в общем случае отличаются по функциональному виду, поскольку записаны в разных переменных. Несложные, но

достаточно громоздкие вычисления приводят к двум системам интегральных соотношений, гарантирующих каноничность преобразований (3.1) и (3.2). Первая из них имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{k}' \left\{ \frac{\delta a_{\mathbf{k}}^a}{\delta c_{\mathbf{k}'}^c} \frac{\delta a_{\mathbf{k}'}^{*b}}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{*c}} - \frac{\delta a_{\mathbf{k}}^a}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{*c}} \frac{\delta a_{\mathbf{k}'}^{*b}}{\delta c_{\mathbf{k}'}^c} \right\} + i \frac{\partial a_{\mathbf{k}}^a}{\partial \mathcal{Q}^c} \frac{\partial a_{\mathbf{k}'}^{*b}}{\partial \mathcal{Q}^{c'}} f^{cc'd} \mathcal{Q}^d &= \delta^{ab} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \\ \int d\mathbf{k}' \left\{ \frac{\delta a_{\mathbf{k}}^a}{\delta c_{\mathbf{k}'}^c} \frac{\delta a_{\mathbf{k}'}^b}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{*c}} - \frac{\delta a_{\mathbf{k}}^a}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{*c}} \frac{\delta a_{\mathbf{k}'}^b}{\delta c_{\mathbf{k}'}^c} \right\} + i \frac{\partial a_{\mathbf{k}}^a}{\partial \mathcal{Q}^c} \frac{\partial a_{\mathbf{k}'}^b}{\partial \mathcal{Q}^{c'}} f^{cc'd} \mathcal{Q}^d &= 0, \\ \int d\mathbf{k}' \left\{ \frac{\delta a_{\mathbf{k}}^a}{\delta c_{\mathbf{k}'}^c} \frac{\delta Q^b}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{*c}} - \frac{\delta a_{\mathbf{k}}^a}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{*c}} \frac{\delta Q^b}{\delta c_{\mathbf{k}'}^c} \right\} + i \frac{\partial a_{\mathbf{k}}^a}{\partial \mathcal{Q}^c} \frac{\partial Q^b}{\partial \mathcal{Q}^{c'}} f^{cc'd} \mathcal{Q}^d &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Соответственно, вторая система имеет вид

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{k}' \left\{ \frac{\delta Q^a}{\delta c_{\mathbf{k}'}^c} \frac{\delta a_{\mathbf{k}'}^{*b}}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{*c}} - \frac{\delta Q^a}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{*c}} \frac{\delta a_{\mathbf{k}'}^{*b}}{\delta c_{\mathbf{k}'}^c} \right\} + i \frac{\partial Q^a}{\partial \mathcal{Q}^c} \frac{\partial a_{\mathbf{k}'}^{*b}}{\partial \mathcal{Q}^{c'}} f^{cc'd} \mathcal{Q}^d &= 0, \\ \int d\mathbf{k}' \left\{ \frac{\delta Q^a}{\delta c_{\mathbf{k}'}^c} \frac{\delta a_{\mathbf{k}'}^b}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{*c}} - \frac{\delta Q^a}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{*c}} \frac{\delta a_{\mathbf{k}'}^b}{\delta c_{\mathbf{k}'}^c} \right\} + i \frac{\partial Q^a}{\partial \mathcal{Q}^c} \frac{\partial a_{\mathbf{k}'}^b}{\partial \mathcal{Q}^{c'}} f^{cc'd} \mathcal{Q}^d &= 0, \\ \int d\mathbf{k}' \left\{ \frac{\delta Q^a}{\delta c_{\mathbf{k}'}^c} \frac{\delta Q^b}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{*c}} - \frac{\delta Q^a}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{*c}} \frac{\delta Q^b}{\delta c_{\mathbf{k}'}^c} \right\} + i \frac{\partial Q^a}{\partial \mathcal{Q}^c} \frac{\partial Q^b}{\partial \mathcal{Q}^{c'}} f^{cc'd} \mathcal{Q}^d &= i f^{abd} \mathcal{Q}^d. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Эти условия каноничности можно записать в очень компактной форме, если воспользоваться определением скобки Ли—Пуассона (2.5) и заменить вариационные переменные на новые: $a_{\mathbf{k}}^a \rightarrow c_{\mathbf{k}}^a$ и $Q^b \rightarrow \mathcal{Q}^b$. В этом случае скобка Ли—Пуассона для исходных переменных $a_{\mathbf{k}}^a$ и Q^b , уравнения (2.3) и (2.4), переходит в условия каноничности (3.3) и (3.4), которые накладывают определенные ограничения на функциональные зависимости (3.1) и (3.2). Представим канонические преобразования (3.1) и (3.2) в виде интегро-степенных рядов по нормальной переменной $c_{\mathbf{k}}^a$ и цветному заряду $\mathcal{Q}^a$. В этом случае преобразование (3.1) с точностью до членов шестого порядка по $c_{\mathbf{k}}^a$ и $\mathcal{Q}^a$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k}}^a &= c_{\mathbf{k}}^a + F_{\mathbf{k}} \mathcal{Q}^a + \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \left[V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(1)aa_1a_2} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{a_2} + V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)aa_1a_2} c_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{a_2} + V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(3)aa_1a_2} c_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{*a_2} \right] + \\ &+ \int d\mathbf{k}_1 \left[\tilde{V}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(1)aa_1a_2} c_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} \mathcal{Q}^{a_2} + \tilde{V}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2)aa_1a_2} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \mathcal{Q}^{a_2} \right] + \\ &+ \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \left[W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(1)aa_1a_2a_3} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{a_2} \mathcal{Q}^{a_3} + W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)aa_1a_2a_3} c_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{a_2} \mathcal{Q}^{a_3} + W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(3)aa_1a_2a_3} c_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{*a_2} \mathcal{Q}^{a_3} \right] + \\ &+ \int d\mathbf{k}_1 \left[\tilde{W}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(1)aa_1a_2a_3} c_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} \mathcal{Q}^{a_2} \mathcal{Q}^{a_3} + \tilde{W}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2)aa_1a_2a_3} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \mathcal{Q}^{a_2} \mathcal{Q}^{a_3} \right] + \dots + \\ &+ \left(G_{\mathbf{k}}^{aa_1a_2} \mathcal{Q}^{a_1} \mathcal{Q}^{a_2} + G_{\mathbf{k}}^{aa_1a_2a_3} \mathcal{Q}^{a_1} \mathcal{Q}^{a_2} \mathcal{Q}^{a_3} + \dots \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Аналогично, наиболее общее разложение в ряд для преобразования (3.2) с точностью до членов шестого порядка записывается как

$$\begin{aligned} Q^a &= \mathcal{Q}^a + \int d\mathbf{k}_1 \left[M_{\mathbf{k}_1}^{aa_1a_2} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \mathcal{Q}^{a_2} + M_{\mathbf{k}_1}^{*aa_1a_2} c_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} \mathcal{Q}^{a_2} \right] + \\ &+ \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \left[M_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(1)aa_1a_2a_3} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{a_2} \mathcal{Q}^{a_3} + M_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)aa_1a_2a_3} c_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{a_2} \mathcal{Q}^{a_3} + M_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{*(1)aa_1a_2a_3} c_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{*a_2} \mathcal{Q}^{a_3} \right] + \\ &+ \int d\mathbf{k}_1 \left[\tilde{M}_{\mathbf{k}_1}^{aa_1a_2a_3} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \mathcal{Q}^{a_2} \mathcal{Q}^{a_3} + \tilde{M}_{\mathbf{k}_1}^{*aa_1a_2a_3} c_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} \mathcal{Q}^{a_2} \mathcal{Q}^{a_3} \right] + \dots + \\ &+ F^{aa_1a_2} \mathcal{Q}^{a_1} \mathcal{Q}^{a_2} + F^{aa_1a_2a_3} \mathcal{Q}^{a_1} \mathcal{Q}^{a_2} \mathcal{Q}^{a_3} + \dots \end{aligned} \quad (3.6)$$

В преобразовании (3.5) мы не выписали кубичные члены, такие как $c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{a_2} c_{\mathbf{k}_3}^{a_3}$, поскольку в рассматриваемом нами приближении они не дают никакого вклада. В преобразовании (3.6) опущены

вклады, содержащие только нормальные переменные $c_{\mathbf{k}}^a$ и $c_{\mathbf{k}}^{*a}$ (т.е. без цветных зарядов Q^a). Это можно интерпретировать так, что цветные заряды являются заданными физическими объектами, которые не могут быть наведены мягким калибровочным полем рассматриваемой системы. Впрочем, то, что эти вклады в любом случае обращаются в ноль, можно проверить прямым вычислением. Кроме того, в преобразовании (3.6) было учтено требование вещественности цветного заряда, в частности, оно также приводит к условиям

$$M_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{*(2)aa_1a_2a_3} = M_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1}^{(2)aa_2a_1a_3}, \quad F^{*aa_1a_2} = F^{aa_1a_2}, \quad F^{*aa_1a_2a_3} = F^{aa_1a_2a_3}.$$

Далее, подставляя разложения (3.5) и (3.6) в систему условий каноничности (3.3) и (3.4), получаем весьма нетривиальные интегральные соотношения, связывающие между собой высшие и низшие коэффициентные функции, которые мы здесь не выписываем ввиду их громоздкости. Мы приведем лишь простые алгебраические соотношения для низших коэффициентных функций второго порядка:

$$V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)aa_1a_2} = -2V_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}}^{*(1)a_2a_1a}, \quad V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(3)aa_1a_2} = V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}, \mathbf{k}_2}^{(3)a_1aa_2}, \quad (3.7)$$

$$M_{\mathbf{k}}^{aa_1a_2} + iF_{\mathbf{k}}^* f^{aa_1a_2} = 0, \quad (3.8)$$

$$\tilde{V}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(1)aa_1a_2} - \tilde{V}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}}^{(1)a_1aa_2} - iF_{\mathbf{k}} F_{\mathbf{k}_1} f^{aa_1a_2} = 0, \quad (3.9)$$

$$\tilde{V}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2)aa_1a_2} + \tilde{V}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}}^{*(2)a_1aa_2} + iF_{\mathbf{k}} F_{\mathbf{k}_1}^* f^{aa_1a_2} = 0. \quad (3.10)$$

4. Исключение «несущественного» гамильтониана $H^{(3)}$. Эффективный гамильтониан четвертого порядка. Следующим шагом в построении эффективной теории является процедура исключения гамильтониана взаимодействия третьего порядка $H^{(3)}$, уравнение (2.11), при переходе от исходной бозонной функции $a_{\mathbf{k}}^a$ и цветного заряда Q^a к новой функции $c_{\mathbf{k}}^a$ и цветному заряду Q^a в результате канонических преобразований (3.5) и (3.6). Подобного рода исключение мы уже проводили в [4], рассматривая взаимодействие мягких бозонных возбуждений между собой. В данной работе новым элементом является учет взаимодействия мягких бозонных возбуждений с жесткой тестовой частицей. Поэтому здесь мы более подробно остановимся на этом новом аспекте.

Для исключения гамильтониана взаимодействия третьего порядка $H^{(3)}$ подставим разложения (3.5) и (3.6) в гамильтониан свободного поля $H^{(0)}$, заданный выражением (2.9), и оставим только члены, имеющие степень нелинейности два или три по новым переменным $c_{\mathbf{k}}^a$ и Q^a . Затем в гамильтониане третьего порядка $H^{(3)}$, уравнение (2.11), произведем просто замену переменных: $a_{\mathbf{k}}^a \rightarrow c_{\mathbf{k}}^a$ и $Q^a \rightarrow Q^a$. Добавив полученное таким образом выражение к выражению, которое следует из гамильтониана свободного поля $H^{(0)}$, и собирая подобные члены, получим

$$H^{(0)} + H^{(3)} = \int d\mathbf{k} (\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) c_{\mathbf{k}}^{*a} c_{\mathbf{k}}^a + \int \frac{d\mathbf{x}_0}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \left\{ [(\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) F_{\mathbf{k}}^* + \phi_{\mathbf{k}}] c_{\mathbf{k}}^a Q^a + [(\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) F_{\mathbf{k}} + \phi_{\mathbf{k}}^*] c_{\mathbf{k}}^{*a} Q^a \right\}. \quad (4.1)$$

Требование обращения в ноль выражения в фигурных скобках в правой части (4.1) приводит к определению коэффициентной функции $F_{\mathbf{k}}$ в каноническом преобразовании (3.5) в терминах вершинной функции $\phi_{\mathbf{k}}$:

$$F_{\mathbf{k}} = -\frac{\phi_{\mathbf{k}}^*}{\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}}. \quad (4.2)$$

Соотношение (4.2) имеет смысл в силу условия (2.10). Используя (4.2), из соотношения (3.8) находим явный вид другой коэффициентной функции $M_{\mathbf{k}}^{aa_1a_2}$, входящей в каноническое преобразование цветного заряда Q^a , уравнение (3.6):

$$M_{\mathbf{k}}^{aa_1a_2} = i f^{aa_1a_2} \frac{\phi_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}}. \quad (4.3)$$

Таким образом, вместо суммы исходных гамильтонианов $H^{(0)} + H^{(3)}$ (уравнение (4.1)) получаем теперь новый гамильтониан свободного поля $\mathcal{H}^{(0)}$ для невзаимодействующих плазмонов в терминах новых нормальных переменных $c_{\mathbf{k}}^{*a}$ и $c_{\mathbf{k}}^a$:

$$\mathcal{H}^{(0)} = \int d\mathbf{k} (\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) c_{\mathbf{k}}^{*a} c_{\mathbf{k}}^a. \quad (4.4)$$

Здесь и далее гамильтонианы в новых переменных будут обозначаться буквой каллиграфического шрифта $\mathcal{H}$.

После исключения гамильтониана третьего порядка в новых переменных можем перейти к построению явного вида эффективного гамильтониана четвертого порядка $\mathcal{H}^{(4)}$, который описывает упругое рассеяние плазмона на жесткой частице. Для этого необходимо собрать все вклады, пропорциональные произведению $c_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{a_2} \mathcal{Q}^a$, из гамильтониана свободного поля $H^{(0)}$ (уравнение (2.9)) и из гамильтонианов взаимодействия $H^{(3)}$ и $H^{(4)}$ (уравнения (2.11) и (2.12)), которые порождаются каноническими преобразованиями (3.5) и (3.6). Таким образом, опуская детали вычислений, получаем эффективный гамильтониан четвертого порядка, описывающий процесс упругого рассеяния плазмона на жесткой цветозаряженной частице:

$$\mathcal{H}_{gG \rightarrow gG}^{(4)} = i \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)aa_1a_2} c_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{a_2} \mathcal{Q}^a, \quad (4.5)$$

где *полная эффективная амплитуда* $\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)aa_1a_2}$ имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} i\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)aa_1a_2} = & iT_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)aa_1a_2} + \left[(\omega_{\mathbf{k}_2}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_2) \tilde{V}_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1}^{*(2)a_2a_1a} + (\omega_{\mathbf{k}_1}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_1) \tilde{V}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)a_1a_2a} \right] + \\ & + \int d\mathbf{k} (\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) \left\{ F_{\mathbf{k}}^* e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0} V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)aa_1a_2} + F_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0} V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1}^{*(2)aa_2a_1} \right\} + \\ & + \int d\mathbf{k} \left\{ \phi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0} V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)aa_1a_2} + \phi_{\mathbf{k}}^* e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0} V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1}^{*(2)aa_2a_1} \right\} + \left[\phi_{\mathbf{k}_2} M_{\mathbf{k}_1}^{*a_2a_1a} + \phi_{\mathbf{k}_1}^* M_{\mathbf{k}_2}^{a_1a_2a} \right] + \\ & + 2 \int d\mathbf{k} \left\{ \mathcal{V}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}}^{a_1a_2a} F_{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) + \mathcal{V}_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}}^{*a_2a_1a} F_{\mathbf{k}}^* \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}) \right\}. \quad (4.6) \end{aligned}$$

Отметим, что амплитуда $\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)aa_1a_2}$ должна удовлетворять условию симметрии:

$$\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)aa_1a_2} = -\mathcal{T}_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1}^{*(2)aa_2a_1}. \quad (4.7)$$

Это соотношение является следствием требования вещественности эффективного гамильтониана (4.5). Мы уже сталкивались с этим условием для вершинной функции $T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2)aa_1a_2}$ в разделе 2.

Проанализируем структуру $\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)aa_1a_2}$ более подробно. Первым шагом, с помощью соотношения (3.10), избавимся от коэффициентной функции $\tilde{V}_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1}^{*(2)a_2a_1a}$ в первой строке (4.6). Далее заметим, что выражения во второй и третьей строках взаимно сокращаются при использовании (4.2). Для коэффициентной функции $M_{\mathbf{k}_1}^{a_1a_2a}$ в следующей четвертой строке используем ее связь с вершинной функцией $\phi_{\mathbf{k}}$, уравнение (4.3). Наконец, в последнем вкладе в (4.6), с вершинной функцией $\mathcal{V}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}}^{a_1a_2a}$, выполняем интегрирование по $\mathbf{k}$, учитываем цветовую декомпозицию (2.14) и переходим от коэффициентной функции $F_{\mathbf{k}}$ к «физической» вершинной функции $\phi_{\mathbf{k}}$ по правилу (4.2). В результате вместо (4.6) получаем

$$\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)aa_1a_2} = -i [\omega_{\mathbf{k}_1}^l - \omega_{\mathbf{k}_2}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)] \tilde{V}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)a_1a_2a} + \tilde{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)aa_1a_2}, \quad (4.8)$$

где в правой части эффективная амплитуда $\tilde{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)aa_1a_2}$ имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)aa_1a_2} = & T_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)aa_1a_2} + \\ & + f^{a_1a_2a} \left\{ \frac{\phi_{\mathbf{k}_1}^* \phi_{\mathbf{k}_2}}{\omega_{\mathbf{k}_2}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_2} + 2i \left(\frac{\mathcal{V}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2} \phi_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}^*}{\omega_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)} - \frac{\mathcal{V}_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1}^* \phi_{\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1}}{\omega_{\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)} \right) \right\}. \quad (4.9) \end{aligned}$$

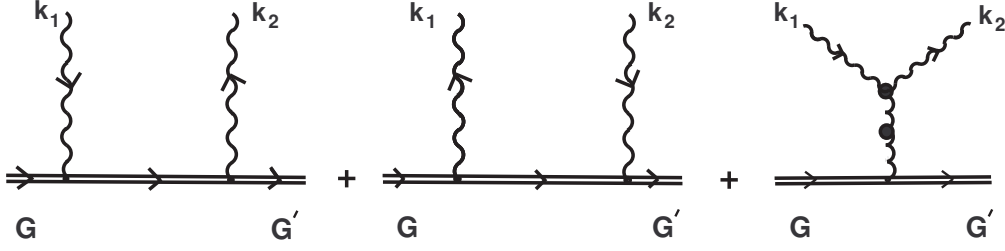


Рис. 2. Эффективная амплитуда $\tilde{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)a_1 a_2 a}$ для процесса упругого рассеяния плазмона на жесткой цветной частице. Черный кружок обозначает HTL-ресуммирование, а двойная линия — жесткую частицу

Первый член в правой части (4.8) имеет резонансный фактор

$$\Delta\omega_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \equiv \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \omega_{\mathbf{k}_2}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2), \quad (4.10)$$

который фактически является следствием законов сохранения импульса и энергии в исследуемом процессе рассеяния. Если это условие резонанса выполняется точно, то вкладом этого члена в эффективный гамильтониан можно полностью пренебречь. На рис. 2 дана диаграммная интерпретация различных членов в фигурных скобках в эффективной амплитуде (4.9).

Первые два графика представляют комптоновское рассеяние мягких бозонных возбуждений на жесткой тестовой частице, индуцированное первым членом в фигурных скобках выражения (4.9).

В эффективной амплитуде (4.9) вершинная функция $\phi_{\mathbf{k}}$, входящая в исходный гамильтониан взаимодействия (2.11), нам неизвестна. Наиболее просто можно определить эту функцию на основе гамильтониана взаимодействия классической цветозаряженной частицы с внешним калибровочным полем $A_\mu^a(x)$:

$$H_{\text{Int}} = \int \frac{d\mathbf{x}}{(2\pi)^3} j_Q^{a\mu}(x) A_\mu^a(x),$$

где цветной ток жесткой частицы $j_Q^{a\mu}(x)$ определяется выражением (см. [12])

$$j_Q^{a\mu} = g v^\mu Q^a(t) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 - \mathbf{v}(t - t_0)), \quad v^\mu = (1, \mathbf{v}).$$

Подставим этот ток в H_{Int} и проинтегрируем по $\mathbf{x}$. В качестве калибровочного потенциала $A_\mu^a(x)$ используем первый продольно поляризованный вклад в правой части разложения (2.1). В результате получаем

$$\begin{aligned} H_{\text{Int}} &= g v^\mu Q^a(t) A_\mu^a(t - t_0, \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}(t - t_0)) = \\ &= \int d\mathbf{k} \left[g \left(\frac{Z_l(\mathbf{k})}{2\omega_{\mathbf{k}}^l} \right)^{1/2} (v \cdot \epsilon^l(\mathbf{k})) a_{\mathbf{k}}^a Q^a e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})(t - t_0)} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0} + \right. \\ &\quad \left. + g \left(\frac{Z_l(\mathbf{k})}{2\omega_{\mathbf{k}}^l} \right)^{1/2} (v \cdot \epsilon^{*l}(\mathbf{k})) a_{\mathbf{k}}^{*a} Q^a e^{i(\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})(t - t_0)} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0} \right]. \end{aligned}$$

Сравнивая это выражение с соответствующими членами в гамильтониане $H^{(3)}$, уравнение (2.11), находим следующее отождествление для функции $\phi_{\mathbf{k}}$:

$$\phi_{\mathbf{k}} = g \left(\frac{Z_l(\mathbf{k})}{2\omega_{\mathbf{k}}^l} \right)^{1/2} (v \cdot \epsilon^l(\mathbf{k})). \quad (4.11)$$

Подставляя (4.11) в (4.9) и полагая $T_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)aa_1 a_2} = 0$, получим окончательный вид эффективной амплитуды $\tilde{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)aa_1 a_2}$. Найденное таким образом выражение совпадает с эффективной амплитудой, полученной в рамках высокотемпературной хромодинамики в [11].

5. Корреляционная функция четвертого порядка. Перейдем к построению кинетического уравнения, описывающего процесс упругого рассеяния плазмона на жесткой цветной частице. В качестве гамильтониана свободного движения здесь возьмем новый гамильтониан $\mathcal{H}^{(0)}$, уравнение (4.4), а в качестве гамильтониана взаимодействия рассмотрим эффективный гамильтониан $\mathcal{H}_{gG \rightarrow gG}^{(4)}$ (уравнение (4.5)). Уравнения движения для бозонных нормальных переменных $c_{\mathbf{k}}^a$ и $c_{\mathbf{k}'}^{*a'}$ и цветного заряда $\mathcal{Q}^a$ определяются соответствующими уравнениями Гамильтона. Для мягких бозе-возбуждений находим

$$\frac{\partial c_{\mathbf{k}'}^{a'}}{\partial t} = -i \left\{ c_{\mathbf{k}'}^{a'}, \mathcal{H}^{(0)} + \mathcal{H}_{gG \rightarrow gG}^{(4)} \right\} = -i(\omega_{\mathbf{k}'}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}') c_{\mathbf{k}'}^{a'} + \int d\mathbf{k}_1 \mathcal{T}_{\mathbf{k}', \mathbf{k}_1}^{a' a_1 d} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \mathcal{Q}^d, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial c_{\mathbf{k}}^{*a}}{\partial t} = -i \left\{ c_{\mathbf{k}}^{*a}, \mathcal{H}^{(0)} + \mathcal{H}_{gG \rightarrow gG}^{(4)} \right\} = i(\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) c_{\mathbf{k}}^{*a} - \int d\mathbf{k}_1 \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{*a a_1 d} c_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} \mathcal{Q}^d, \quad (5.2)$$

и, соответственно, для классического цветного заряда получим

$$\frac{d\mathcal{Q}^d}{dt} = \left\{ \mathcal{Q}^d, \mathcal{H}^{(0)} + \mathcal{H}_{gG \rightarrow gG}^{(4)} \right\} = \frac{\partial(\mathcal{H}^{(0)} + \mathcal{H}_{gG \rightarrow gG}^{(4)})}{\partial \mathcal{Q}^d} f^{dd'e} \mathcal{Q}^e = i f^{dd'e} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a_1 a_2 d'} c_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{a_2} \mathcal{Q}^e.$$

Здесь и далее для простоты опускаем метку «(2)» в обозначении полной эффективной амплитуды $\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)a_1 a_2}$. Если ансамбль взаимодействующих бозе-возбуждений при низком уровне нелинейности имеет случайные фазы, то его можно описать статистически, введя бозонную корреляционную функцию:

$$\langle c_{\mathbf{k}}^{*a} c_{\mathbf{k}'}^{a'} \rangle = \mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (5.3)$$

где $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa'}$ — плотность числа плазмонов, которая является нетривиальной матрицей в некотором эффективном цветовом пространстве.

Определим кинетическое уравнение для плотности числа плазмонов с помощью уравнений Гамильтона (5.1), (5.2) и определения (5.3). Используя рассуждения, аналогичные приведенным в [4, 10], находим исходное для анализа выражение

$$\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \frac{\partial \mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa'}}{\partial t} = \int d\mathbf{k}_1 \left\{ \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{*a a_1 d} \langle c_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} c_{\mathbf{k}'}^{a'} \mathcal{Q}^d \rangle + \mathcal{T}_{\mathbf{k}', \mathbf{k}_1}^{a' a_1 d} \langle c_{\mathbf{k}}^{*a} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \mathcal{Q}^d \rangle \right\}. \quad (5.4)$$

Далее, продифференцировав корреляционную функцию четвертого порядка $\langle c_{\mathbf{k}}^{*a} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \mathcal{Q}^d \rangle$ по t с учетом (5.1)–(5.3), получаем уравнение, правая часть которого будет содержать корреляционные функции четвертого и шестого порядка по переменным $c_{\mathbf{k}}^{*a}$, $c_{\mathbf{k}}^a$ и $\mathcal{Q}^d$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle c_{\mathbf{k}}^{*a} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \mathcal{Q}^d \rangle}{\partial t} = & i[\omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)] \langle c_{\mathbf{k}}^{*a} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \mathcal{Q}^d \rangle + \\ & + \int d\mathbf{k}_1' \left\{ \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1'}^{*a a_1' e} \langle c_{\mathbf{k}_1'}^{*a_1'} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \mathcal{Q}^d \mathcal{Q}^e \rangle + \mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1'}^{a_1' a_1' e} \langle c_{\mathbf{k}}^{*a} c_{\mathbf{k}_1'}^{a_1'} \mathcal{Q}^d \mathcal{Q}^e \rangle \right\} + \\ & + i f^{dd'e} \int d\mathbf{k}_1' d\mathbf{k}_2' \mathcal{T}_{\mathbf{k}_1', \mathbf{k}_2'}^{a_1' a_2' d'} \langle c_{\mathbf{k}}^{*a} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \mathcal{Q}^e \rangle. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Замкнем цепочку уравнений, выразив корреляционные функции шестого порядка в терминах парных корреляционных функций для нормальных переменных $c_{\mathbf{k}}^{*a}$, $c_{\mathbf{k}}^a$ и среднего цветного заряда $\mathcal{Q}^d$. Оставляем только те члены, которые дают соответствующие вклады в искомое кинетическое уравнение:

$$\begin{aligned} \langle c_{\mathbf{k}_1'}^{*a_1'} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \mathcal{Q}^d \mathcal{Q}^e \rangle & \simeq \delta(\mathbf{k}_1' - \mathbf{k}_1) \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}^{a_1' a_1} \langle \mathcal{Q}^d \rangle \langle \mathcal{Q}^e \rangle, \\ \langle c_{\mathbf{k}}^{*a} c_{\mathbf{k}_1'}^{a_1'} \mathcal{Q}^d \mathcal{Q}^e \rangle & \simeq \delta(\mathbf{k}_1' - \mathbf{k}) \mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{a a_1'} \langle \mathcal{Q}^d \rangle \langle \mathcal{Q}^e \rangle, \\ \langle c_{\mathbf{k}}^{*a} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} c_{\mathbf{k}_1'}^{*a_1'} c_{\mathbf{k}_2}^{a_2'} \mathcal{Q}^e \rangle & \simeq \delta(\mathbf{k}_2' - \mathbf{k}) \delta(\mathbf{k}_1' - \mathbf{k}_1) \mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{a a_2'} \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}^{a_1' a_1} \langle \mathcal{Q}^e \rangle. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Полагаем для полной эффективной амплитуды $\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a a_1 a_2}$ следующую декомпозицию относительно цвета и волнового вектора:

$$\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a a_1 a_2} = f^{a a_1 a_2} \mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}. \quad (5.7)$$

Следует отметить, что функция $\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}$, в силу требования (4.7), должна удовлетворять условию

$$\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} = \mathcal{T}_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1}^*. \quad (5.8)$$

Подставляя выражения (5.6) и (5.7) в правую часть (5.5) и учитывая условие симметрии (5.8) для амплитуды рассеяния, вместо (5.5) получаем уравнение для корреляционной функции четвертого порядка

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle c_{\mathbf{k}}^{*a} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \mathcal{Q}^d \rangle}{\partial t} = & i [\omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)] \langle c_{\mathbf{k}}^{*a} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \mathcal{Q}^d \rangle + \\ & + i \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1} \left[(T^e \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1})^{aa_1} - (\mathcal{N}_{\mathbf{k}} T^e)^{aa_1} \right] \langle \mathcal{Q}^d \rangle \langle \mathcal{Q}^e \rangle + \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^* (\mathcal{N}_{\mathbf{k}} T^{d'} \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1})^{aa_1} \langle \mathcal{Q}^e \rangle f^{dd'e}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Здесь $(T^a)^{bc} \equiv -if^{abc}$ — генераторы в присоединенном представлении алгебры Ли $\mathfrak{su}(N_c)$ и введена матричная формулировка для плотности числа плазмонов $\mathcal{N}_{\mathbf{k}} = (\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa_1})$.

6. Матричное кинетическое уравнение для мягких глюонных возбуждений. Самосогласованная система уравнений (5.4) и (5.9), дополненная уравнением для усредненного цветного заряда, определяет временную эволюцию плотности числа плазмонов $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa'}$. Введем еще одно упрощение: в уравнении (5.9) отбросим член с производной по времени в сравнении с членом, содержащим резонансный фактор $\Delta\omega_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}$, уравнение (4.10). Вместо уравнения (5.9) имеем

$$\begin{aligned} \langle c_{\mathbf{k}}^{*a} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \mathcal{Q}^d \rangle \simeq & \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa_1} \langle \mathcal{Q}^d \rangle - \\ & - \frac{1}{\Delta\omega_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1} + i0} \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1} \left\{ [(T^e \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1})^{aa_1} - (\mathcal{N}_{\mathbf{k}} T^e)^{aa_1}] \langle \mathcal{Q}^d \rangle \langle \mathcal{Q}^e \rangle - i (\mathcal{N}_{\mathbf{k}} T^{d'} \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1})^{aa_1} \langle \mathcal{Q}^e \rangle f^{dd'e} \right\}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Здесь первый член в правой части, соответствующий отсутствию взаимодействия между мягкими глюонными возбуждениями и жесткой цветной частицей, является решением однородного уравнения для корреляционной функции четвертого порядка $\langle c_{\mathbf{k}}^{*a} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \mathcal{Q}^d \rangle$. Остальные члены определяют отклонение трехточечного коррелятора в случае отсутствия взаимодействия.

Подставим первый член из (6.1) в правую часть (5.4) для $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa'}$. В результате получим

$$-i \left\{ \mathcal{T}_{\mathbf{k}', \mathbf{k}} (\mathcal{N}_{\mathbf{k}} T^d)^{aa'} - \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^* (T^d \mathcal{N}_{\mathbf{k}'})^{aa'} \right\} \langle \mathcal{Q}^d \rangle. \quad (6.2)$$

Далее подставим второй член из (6.1) в правую часть уравнения (5.4). Простые алгебраические преобразования с учетом условия симметрии (5.8) приводят к следующему выражению:

$$\begin{aligned} & - \int d\mathbf{k}_1 \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^* \mathcal{T}_{\mathbf{k}', \mathbf{k}_1} \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{\Delta\omega_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1} + i0} \left((\mathcal{N}_{\mathbf{k}} T^{d'} \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1} T^d)^{aa'} f^{dd'e} \langle \mathcal{Q}^e \rangle + i \left[(\mathcal{N}_{\mathbf{k}} T^e T^d)^{aa'} - (T^e \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1} T^d)^{aa'} \right] \langle \mathcal{Q}^d \rangle \langle \mathcal{Q}^e \rangle \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\Delta\omega_{\mathbf{k}', \mathbf{k}_1} - i0} \left((T^{d'} \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1} T^d \mathcal{N}_{\mathbf{k}'})^{aa'} f^{dd'e} \langle \mathcal{Q}^e \rangle + i \left[(T^d T^e \mathcal{N}_{\mathbf{k}'})^{aa'} - (T^d \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1} T^e)^{aa'} \right] \langle \mathcal{Q}^d \rangle \langle \mathcal{Q}^e \rangle \right) \right\}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Используя полученные выражения (6.2), (6.3) и полагая $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$, вместо (5.4) находим следующее кинетическое уравнение для плотности числа плазмонов $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa'}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa'}}{\partial t} = & -i \left\{ \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}} (\mathcal{N}_{\mathbf{k}} T^e)^{aa'} - \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}}^* (T^e \mathcal{N}_{\mathbf{k}})^{aa'} \right\} \langle \mathcal{Q}^e \rangle - \int d\mathbf{k}_1 |\mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}|^2 \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{\Delta\omega_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1} + i0} \left((\mathcal{N}_{\mathbf{k}} T^{d'} \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1} T^d)^{aa'} f^{dd'e} \langle \mathcal{Q}^e \rangle + i \left[(\mathcal{N}_{\mathbf{k}} T^e T^d)^{aa'} - (T^e \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1} T^d)^{aa'} \right] \langle \mathcal{Q}^d \rangle \langle \mathcal{Q}^e \rangle \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\Delta\omega_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1} - i0} \left((T^{d'} \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1} T^d \mathcal{N}_{\mathbf{k}})^{aa'} f^{dd'e} \langle \mathcal{Q}^e \rangle + i \left[(T^e T^d \mathcal{N}_{\mathbf{k}})^{aa'} - (T^e \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1} T^d)^{aa'} \right] \langle \mathcal{Q}^d \rangle \langle \mathcal{Q}^e \rangle \right) \right\}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

В отличие от наших предыдущих работ [4, 10], здесь не собирается буквально нужная разность

$$\frac{1}{\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1} + i0} - \frac{1}{\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1} - i0} (\equiv -2i\pi\delta(\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1})), \quad (6.5)$$

поскольку здесь мы имеем различное расположение матриц плотности $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}$ и $\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}$ с различными волновыми векторами, которые не коммутируют с цветовыми матрицами T^d и друг с другом.

7. Первый момент по цвету кинетического уравнения (6.4). Рассмотрим следующую цветовую декомпозицию матричной функции $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa'}$:

$$\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa'} = \delta^{aa'} N_{\mathbf{k}}^l + (T^c)^{aa'} \langle \mathcal{Q}^c \rangle W_{\mathbf{k}}^l. \quad (7.1)$$

В этом разделе определим уравнение для бесцветной части плотности числа плазмонов, т.е. для скалярной функции $N_{\mathbf{k}}^l$. С этой целью возьмем след левой и правой частей уравнения (6.4) относительно цветных индексов, т.е. полагаем $a = a'$ и проводим суммирование по a . Используя цветовое разложение (7.1) и формулы для следов произведения двух- и трех цветовых матриц (генераторов) в присоединенном представлении (см. [7])

$$\text{tr}(T^a T^b) = N_c \delta^{ab}, \quad \text{tr}(T^a T^b T^c) = \frac{i}{2} N_c f^{abc}, \quad (7.2)$$

легко находим следы для членов, линейных по $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}$ и $\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}$ в правой части (6.4):

$$\begin{aligned} \text{tr} \mathcal{N}_{\mathbf{k}} &= (N_c^2 - 1) N_{\mathbf{k}}^l, \quad \text{tr}(T^e \mathcal{N}_{\mathbf{k}}) = N_c \langle \mathcal{Q}^e \rangle W_{\mathbf{k}}^l, \\ \text{tr}[(\mathcal{N}_{\mathbf{k}} T^e T^d) - (T^e \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1} T^d)] &= \delta^{ed} N_c (N_{\mathbf{k}}^l - N_{\mathbf{k}_1}^l) - \frac{1}{2} N_c (T^c)^{ed} (W_{\mathbf{k}}^l + W_{\mathbf{k}_1}^l) \langle \mathcal{Q}^c \rangle. \end{aligned} \quad (7.3)$$

При свертывании последнего выражения с $\langle \mathcal{Q}^d \rangle \langle \mathcal{Q}^e \rangle$ член с суммой $W_{\mathbf{k}}^l + W_{\mathbf{k}_1}^l$ в правой части обращается в ноль.

Следы членов, квадратичных по $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}$ и $\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}$, в (6.4) имеют несколько более сложную структуру. Так, например,

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathcal{N}_{\mathbf{k}} T^{d'} \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1} T^d) &= N_c \delta^{d'd} N_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}_1} + \\ &+ \frac{i}{2} N_c f^{d'dc} \langle \mathcal{Q}^c \rangle W_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}_1} - \frac{i}{2} N_c f^{d'dc} \langle \mathcal{Q}^c \rangle W_{\mathbf{k}_1} N_{\mathbf{k}} + \text{tr}(T^c T^{d'} T^f T^d) \langle \mathcal{Q}^c \rangle \langle \mathcal{Q}^f \rangle W_{\mathbf{k}} W_{\mathbf{k}_1}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Если далее свернуть это выражение с антисимметричной структурной константой $f^{dd'e}$, как это имеет место в исходном уравнении (6.4), то первый член в правой части (7.4) обращается в ноль. Последний член также равен нулю в силу свойства симметрии для следа произведения четырех генераторов по отношению к перестановке индексов a и c (и, соответственно, b и d), т.е.

$$\text{tr}(T^a T^b T^c T^d) = \text{tr}(T^c T^b T^a T^d) = \text{tr}(T^a T^d T^c T^b). \quad (7.5)$$

В результате имеем

$$f^{dd'e} \text{tr}(\mathcal{N}_{\mathbf{k}} T^{d'} \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1} T^d) = -\frac{i}{2} N_c^2 \langle \mathcal{Q}^e \rangle (W_{\mathbf{k}}^l N_{\mathbf{k}_1}^l - N_{\mathbf{k}}^l W_{\mathbf{k}_1}^l).$$

Используя полученные выражения для цветных следов, можно выписать первый момент по цвету для уравнения (6.4) на бесцветную часть плотности числа плазмонов $N_{\mathbf{k}}^l$:

$$\begin{aligned} d_A \frac{\partial N_{\mathbf{k}}^l}{\partial t} &= 2N_c \mathfrak{q}_2(t) (\text{Im } \mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}}) W_{\mathbf{k}}^l - N_c \mathfrak{q}_2(t) \int d\mathbf{k}_1 |\mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}|^2 \times \\ &\times \left\{ (N_{\mathbf{k}}^l - N_{\mathbf{k}_1}^l) - \frac{1}{2} N_c (W_{\mathbf{k}}^l N_{\mathbf{k}_1}^l - N_{\mathbf{k}}^l W_{\mathbf{k}_1}^l) \right\} (2\pi) \delta(\omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)). \end{aligned} \quad (7.6)$$

При выводе этого выражения мы учли формулу Сохоцкого (6.5) и ввели обозначение для бесцветной квадратичной комбинации усредненного цветного заряда

$$\mathfrak{q}_2(t) \equiv \langle \mathcal{Q}^e \rangle \langle \mathcal{Q}^e \rangle. \quad (7.7)$$

Коэффициент $d_A \equiv N_c^2 - 1$ в левой части (7.6) является инвариантом для группы $SU(N_c)$.

8. Второй момент по цвету кинетического уравнения (6.4). Вернемся к матричному кинетическому уравнению (6.4). Свернем теперь левую и правую части этого уравнения с цветной матрицей $(T^s)^{a'a}$. В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{tr}(T^s \mathcal{N}_k)}{\partial t} = & -i \left\{ \text{tr}(T^e T^s \mathcal{N}_k) \mathcal{T}_{k,k} - \text{tr}(T^s T^e \mathcal{N}_k) \mathcal{T}_{k,k}^* \right\} \langle \mathcal{Q}^e \rangle - \int d\mathbf{k}_1 |\mathcal{T}_{k,k_1}|^2 \langle \mathcal{Q}^e \rangle \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{\Delta\omega_{k,k_1} + i0} \left(\text{tr}(\mathcal{N}_k T^{d'} \mathcal{N}_{k_1} T^d T^s) f^{dd'e} + i \left[\text{tr}(T^s \mathcal{N}_k T^e T^d) - \text{tr}(T^s T^e \mathcal{N}_{k_1} T^d) \right] \langle \mathcal{Q}^d \rangle \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\Delta\omega_{k,k_1} - i0} \left(\text{tr}(\mathcal{N}_{k_1} T^d \mathcal{N}_k T^s T^{d'}) f^{dd'e} + i \left[\text{tr}(T^s T^e T^d \mathcal{N}_k) - \text{tr}(T^s T^e \mathcal{N}_{k_1} T^d) \right] \langle \mathcal{Q}^d \rangle \right) \right\}. \quad (8.1) \end{aligned}$$

Здесь для следа в левой части в силу разложения (7.1) мы используем вторую формулу из (7.3). Рассмотрим следы в первом члене правой части (8.1). С учетом представления (7.1) простые вычисления приводят данные следы к виду

$$\text{tr}(T^e T^s \mathcal{N}_k) = \delta^{es} N_c N_k^l + \frac{i}{2} N_c f^{esc} \langle \mathcal{Q}^c \rangle W_k^l, \quad \text{tr}(T^s T^e \mathcal{N}_k) = \delta^{es} N_c N_k^l - \frac{i}{2} N_c f^{esc} \langle \mathcal{Q}^c \rangle W_k^l.$$

Мнимая часть в этих двух выражениях обращается в ноль в результате свертки с цветным зарядом $\langle \mathcal{Q}^e \rangle$. Таким образом, первый член в правой части (8.1) принимает следующий вид:

$$-i \left\{ \text{tr}(T^e T^s \mathcal{N}_k) \mathcal{T}_{k,k} - \text{tr}(T^s T^e \mathcal{N}_k) \mathcal{T}_{k,k}^* \right\} \langle \mathcal{Q}^e \rangle = 2N_c (\text{Im } \mathcal{T}_{k,k}) N_k^l \langle \mathcal{Q}^s \rangle. \quad (8.2)$$

Далее проанализируем следы членов, квадратичных по $\mathcal{N}_k$ и $\mathcal{N}_{k_1}$ в (8.1). С учетом разложения (7.1) мы легко находим для первого следа исходное представление

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathcal{N}_k T^{d'} \mathcal{N}_{k_1} T^d T^s) = & \text{tr}(T^{d'} T^d T^s) N_k N_{k_1} + \text{tr}(T^c T^{d'} T^d T^s) \langle \mathcal{Q}^c \rangle W_k N_{k_1} + \\ & + \text{tr}(T^{d'} T^c T^d T^s) \langle \mathcal{Q}^c \rangle N_k W_{k_1} + \text{tr}(T^d T^s T^c T^{d'} T^f) \langle \mathcal{Q}^c \rangle \langle \mathcal{Q}^f \rangle W_k W_{k_1}. \quad (8.3) \end{aligned}$$

Свернем это выражение с $f^{dd'e} \langle \mathcal{Q}^e \rangle$, как и в (8.1). Для первого члена в правой части (8.3), в силу второй формулы в (7.2), имеем

$$\text{tr}(T^{d'} T^d T^s) N_k N_{k_1} f^{dd'e} \langle \mathcal{Q}^e \rangle = -\frac{i}{2} N_c^2 \langle \mathcal{Q}^s \rangle N_k N_{k_1}.$$

Третий член в (8.3), содержащий след произведения четырех генераторов, обращается в ноль в силу свойства симметрии (7.5). След во втором члене в (8.3) легко вычисляется с использованием правила коммутации: $[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$ и второй формулы в (7.2). В итоге получим

$$\text{tr}(T^c T^{d'} T^d T^s) f^{dd'e} \equiv \frac{1}{2} \text{tr}(T^c [T^{d'}, T^d] T^s) f^{dd'e} = \frac{i}{2} \text{tr}(T^c T^\lambda T^s) f^{d'\lambda} f^{dd'e} = -\left(\frac{i}{2}\right)^2 N_c f^{ces}.$$

При свертке этого выражения с $\langle \mathcal{Q}^e \rangle \langle \mathcal{Q}^c \rangle$ оно обращается в ноль. Так, вместо (8.3) сейчас имеем

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathcal{N}_k T^{d'} \mathcal{N}_{k_1} T^d T^s) f^{dd'e} \langle \mathcal{Q}^e \rangle = \\ = -\frac{i}{2} N_c^2 \langle \mathcal{Q}^s \rangle N_k N_{k_1} + \text{tr}(T^d T^s T^c T^{d'} T^f) f^{dd'e} \langle \mathcal{Q}^e \rangle \langle \mathcal{Q}^c \rangle \langle \mathcal{Q}^f \rangle W_k W_{k_1}. \quad (8.4) \end{aligned}$$

Осталось рассмотреть след пятого порядка. В связи с наличием множителя $\langle \mathcal{Q}^c \rangle \langle \mathcal{Q}^f \rangle$, симметричного по индексам c и f , вместо прямого вычисления данного следа здесь проще использовать соотношение

$$\text{tr}(T^{a_1} T^{a_2} T^{a_3} T^{a_4} T^{a_5}) + \text{tr}(T^{a_1} T^{a_2} T^{a_5} T^{a_4} T^{a_3}) = -i f^{a_2 a_1 b} \text{tr}(T^b T^{a_5} T^{a_4} T^{a_3}),$$

откуда сразу получаем

$$\text{tr}(T^d T^s T^c T^{d'} T^f) f^{dd'e} \langle \mathcal{Q}^e \rangle \langle \mathcal{Q}^c \rangle \langle \mathcal{Q}^f \rangle = -\frac{i}{2} f^{sdb} \text{tr}(T^b T^f T^{d'} T^c) f^{dd'e} \langle \mathcal{Q}^e \rangle \langle \mathcal{Q}^c \rangle \langle \mathcal{Q}^f \rangle.$$

Для следа четвертого порядка в правой части применим формулу (см. [7])

$$\text{tr}(T^a T^b T^c T^d) = \delta^{ad} \delta^{bc} + \frac{1}{2}(\delta^{ab} \delta^{cd} + \delta^{ac} \delta^{bd}) + \frac{1}{4} N_c (f^{ade} f^{bce} + d^{ade} d^{bce}), \quad (8.5)$$

где d^{abc} — полностью симметричные структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{su}(N_c)$. После несложных алгебраических преобразований правая часть предыдущего выражения может быть приведена к следующему виду:

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2} f^{sdb} \text{tr}(T^b T^f T^{d'} T^c) f^{dd'e} \langle \mathcal{Q}^e \rangle \langle \mathcal{Q}^c \rangle \langle \mathcal{Q}^f \rangle = \\ = -\frac{i}{2} \left\{ \frac{1}{2} N_c \delta^{fc} \delta^{se} - \frac{1}{4} N_c [\text{tr}(T^e T^s T^c T^f) - \text{tr}(T^e T^s D^c D^f)] \right\} \langle \mathcal{Q}^e \rangle \langle \mathcal{Q}^c \rangle \langle \mathcal{Q}^f \rangle - \\ - \frac{i}{4} N_c \left\{ \delta^{fc} \delta^{se} - \frac{1}{2} (\delta^{ef} \delta^{sc} + \delta^{ec} \delta^{fs}) \right\} \langle \mathcal{Q}^e \rangle \langle \mathcal{Q}^c \rangle \langle \mathcal{Q}^f \rangle. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Здесь $(D^a)^{bc} \equiv d^{abc}$. Далее, используя формулу для следа четвертого порядка (8.5) и также еще одну формулу подобного рода (см. [7])

$$\text{tr}(T^a T^b D^c D^d) = \frac{1}{2} (\delta^{ab} \delta^{cd} - \delta^{ac} \delta^{bd}) + \left(\frac{N_c^2 - 8}{4N_c} \right) f^{ade} f^{bce} + \frac{1}{4} N_c d^{ade} d^{bce},$$

убеждаемся, что (8.6) в точности обращается в ноль. Таким образом, коэффициент перед произведением $W_{\mathbf{k}} W_{\mathbf{k}_1}$ в правой части (8.4) равен нулю, и этот вклад можно исключить из рассмотрения.

Для следа $\text{tr}(\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1} T^d \mathcal{N}_{\mathbf{k}} T^s T^{d'})$ в (8.1) мы получаем аналогичный результат. В итоге для квадратичных по $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}$ и $\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}$ членов в (8.1), используя формулу Сохоцкого (6.5), получим

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\text{tr}(\mathcal{N}_{\mathbf{k}} T^{d'} \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1} T^d T^s)}{\Delta \omega_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1} + i0} - \frac{\text{tr}(\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1} T^d \mathcal{N}_{\mathbf{k}} T^s T^{d'})}{\Delta \omega_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1} - i0} \right\} f^{dd'e} \langle \mathcal{Q}^e \rangle = \\ = \frac{1}{2} i N_c^2 N_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}_1} \langle \mathcal{Q}^s \rangle (2\pi) \delta(\omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)). \end{aligned} \quad (8.7)$$

Рассмотрим оставшиеся следы или, точнее, разности следов, линейные по $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}$ и $\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}$, в квадратных скобках в (8.1). Учитывая декомпозицию (7.1), для первой разности следов находим

$$\begin{aligned} \left[\text{tr}(T^s \mathcal{N}_{\mathbf{k}} T^e T^d) - \text{tr}(T^s T^e \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1} T^d) \right] \langle \mathcal{Q}^d \rangle \langle \mathcal{Q}^e \rangle = \\ = \text{tr}(T^s T^e T^d) (N_{\mathbf{k}}^l - N_{\mathbf{k}_1}^l) \langle \mathcal{Q}^d \rangle \langle \mathcal{Q}^e \rangle + \text{tr}(T^e T^s T^c T^f) (W_{\mathbf{k}}^l - W_{\mathbf{k}_1}^l) \langle \mathcal{Q}^c \rangle \langle \mathcal{Q}^d \rangle \langle \mathcal{Q}^e \rangle = \\ = \left\{ 2\delta^{sd} \delta^{ce} + \frac{1}{4} N_c d^{sd\lambda} d^{ce\lambda} \right\} (W_{\mathbf{k}}^l - W_{\mathbf{k}_1}^l) \langle \mathcal{Q}^c \rangle \langle \mathcal{Q}^d \rangle \langle \mathcal{Q}^e \rangle. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали формулы для следов (7.2) и (8.5). Член с разностью $N_{\mathbf{k}}^l - N_{\mathbf{k}_1}^l$ обратился в нуль. Коэффициент оставшегося члена с разностью $W_{\mathbf{k}}^l - W_{\mathbf{k}_1}^l$ содержит свертку двух симметричных структурных констант, которая в общем случае произвольного N_c не может быть сведена к разложению по произведению дельта-символов Кронекера типа $\delta^{sd} \delta^{ce} + \dots$ (см. ниже). В частности, это не позволяет свести в конечном счете зависимость кинетического уравнения для $W_{\mathbf{k}}^l$ от среднего значения цветных зарядов к зависимости лишь от их бесцветной комбинации (7.7). Данное обстоятельство существенно усложняет динамику рассматриваемого процесса рассеяния.

Учитывая вышеполученное выражение и (7.3), (8.2), (8.7), вместо (8.1) находим искомое кинетическое уравнение для второй «цветной» части плотности числа плазмонов мягких глюонных

плазменных возбуждений $W_{\mathbf{k}}^l$:

$$N_c \frac{\partial(\langle \mathcal{Q}^s \rangle W_{\mathbf{k}}^l)}{\partial t} = 2N_c (\text{Im } \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}}) N_{\mathbf{k}}^l \langle \mathcal{Q}^s \rangle - \int d\mathbf{k}_1 |\mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}|^2 \times \\ \times \left\{ 2\delta^{sd}\delta^{ce} + \frac{1}{4}N_c d^{sd\lambda} d^{ce\lambda} \right\} (W_{\mathbf{k}}^l - W_{\mathbf{k}_1}^l) \langle \mathcal{Q}^c \rangle \langle \mathcal{Q}^d \rangle \langle \mathcal{Q}^e \rangle (2\pi) \delta(\omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)) + \\ + \frac{1}{2}N_c^2 \int d\mathbf{k}_1 |\mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}|^2 N_{\mathbf{k}}^l N_{\mathbf{k}_1}^l \langle \mathcal{Q}^s \rangle (2\pi) \delta(\omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)). \quad (8.8)$$

Мы можем упростить свертку двух симметричных структурных констант в (8.8) в двух случаях. Первый «тривиальный» случай относится к $N_c = 2$, когда $d^{abc} \equiv 0$. Второй случай соответствует значению $N_c = 3$ и связан с наличием хорошо известного тождества (см. [7])

$$d^{abe} d^{cde} + d^{ace} d^{bde} + d^{ade} d^{bce} = \frac{1}{3} (\delta^{ab} \delta^{cd} + \delta^{ac} \delta^{bd} + \delta^{ad} \delta^{bc}).$$

9. Заключение. В данной работе мы построили классический гамильтонов формализм для описания процесса нелинейного взаимодействия мягких и жестких мод возбуждений в высокотемпературной глюонной плазме. В явном виде выписали канонические преобразования для бозонной нормальной переменной $a_{\mathbf{k}}^a$ и классического цветного заряда Q^a жесткой тестовой частицы, уравнения (3.5) и (3.6), которые были представлены в виде интегро-степенного ряда по новой нормальной переменной $c_{\mathbf{k}}^a$ и новому цветному заряду $\mathcal{Q}^a$. Канонические преобразования позволили исключить гамильтониан взаимодействия третьего порядка $H^{(3)}$ (уравнение (2.11)). Это, в свою очередь, позволило определить новый эффективный гамильтониан взаимодействия $\mathcal{H}_{gG \rightarrow gG}^{(4)}$ (уравнение (4.5)) с калибровочно ковариантной амплитудой рассеяния $\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)aa_1a_2}$. Эта амплитуда описывает упругое рассеяние плазмона на жесткой цветной заряженной частице в древесном приближении. На основе условий каноничности (3.3) и (3.4) мы определили полную систему независимых соотношений алгебраического и интегрального типов, связывающих низшие и высшие коэффициенты функции в подынтегральных выражениях различных членов в канонических преобразованиях (3.5) и (3.6). Мы также ввели понятие плотности числа плазмонов $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa'}$, которая является нетривиальной матрицей в цветовом пространстве и получили самосогласованную систему кинетических уравнений типа Больцмана для бесцветной $N_{\mathbf{k}}^l$ и цветовой $W_{\mathbf{k}}^l$ частей плотности числа плазмонов, учитывающую временную эволюцию среднего значения цветного заряда жесткой тестовой частицы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Захаров В. Е. Гамильтонов формализм для волн в нелинейных средах с дисперсией// Изв. вузов. Радиофизика. — 1974. — 17. — С. 431–453.
2. Захаров В. Е., Кузнецов Е. А. Гамильтонов формализм для нелинейных волн// Усп. физ. наук. — 1997. — 167. — С. 1137–1167.
3. Калашиников О. К., Климов В. В. Поляризационный оператор в КХД при конечных температурах и плотностях// Яд. физ. — 1980. — 31. — С. 1357–1371.
4. Марков Ю. А., Маркова М. А., Марков Н. Ю., Гитман Д. М. Гамильтонов формализм для Бозе-возбуждений в плазме с неабелевым типом взаимодействием// ЖЭТФ. — 2020. — 157. — С. 327–341.
5. Balachandran A. P., Salomonson P., Skagerstam B. and Winnberg J. Classical description of a particle interacting with a non-Abelian gauge field// Phys. Rev. D. — 1977. — 15. — P. 2308–2317.
6. Blaizot J.-P., Iancu E. Energy-momentum tensors for the quark-gluon plasma// Nucl. Phys. B. — 1994. — 421. — P. 565–592.
7. Haber H. E. Useful relations among the generators in the defining and adjoint representations of $SU(N)$ // SciPost. Phys. Lect. Notes. — 2021. — 21. — P. 1–11.
8. Hakim R. Introduction to relativistic statistical mechanics: classical and quantum. — World Scientific, 2011.
9. Linden N., Macfarlane A. J., Van Holten J. W. Particle motion in a Yang–Mills field: Wong’s equations and spin- $\frac{1}{2}$ analogues// Czech. J. Phys. — 1995. — 45. — P. 209–215.
10. Markov Yu. A., Markova M. A., Markov N. Yu. Hamiltonian formalism for Fermi excitations in a plasma with a non-Abelian interaction// Int. J. Mod. Phys. A. — 2023. — 38. — P. 2350015(77).

11. *Markov Yu. A., Markova M. A., Vall A.N.* Nonlinear dynamics of soft boson collective excitations in hot QCD plasma II: plasmon–hard-particle scattering and energy losses// *Ann. Phys.* — 2004. — 309. — P. 93–150.
12. *Wong S. K.* Field and particle equations for the classical Yang–Mills field and particles with isotopic spin// *Nuovo Cim. A.* — 1970. — 65. — P. 689–694.
13. *Zakharov V. E., Musher S. L., Rubenchik A. M.* Hamiltonian approach to the description of nonlinear plasma phenomena// *Phys. Rep.* — 1985. — 129. — P. 285–366.
14. *Zakharov V. E., L'vov V. S., Falkovich G.* Kolmogorov Spectra of Turbulence I. Wave Turbulence. — Springer-Verlag, 1992.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России по проекту «Аналитические и численные методы математической физики в задачах томографии, квантовой теории поля и механики жидкости и газа» (№ гос. регистрации 12104130005-1).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Марков Юрий Адольфович (Markov Yurii Adolfovich)

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск
(V. M. Matrosov Institute of System Dynamics and Control Theory
of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia)
E-mail: markov@icc.ru

Маркова Маргарита Анатольевна (Markova Margarita Anatol'evna)

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск
(V. M. Matrosov Institute of System Dynamics and Control Theory
of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia)
E-mail: markova@icc.ru

Марков Никита Юрьевич (Markov Nikita Yurievich)

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск
(V. M. Matrosov Institute of System Dynamics and Control Theory
of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia)
E-mail: NYumarkov@gmail.com