ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 234 (2024). С. 159–169
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-234-159-169

УДК 517.923

О ТОЧНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ЭВОЛЮЦИИ ДЛЯ ДВУХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ УЗКИХ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В НЕАБЕЛЕВОЙ ПЛАЗМЕ

© 2024 г. **Ю. А. МАРКОВ, М. А. МАРКОВА, Н. Ю. МАРКОВ**

Аннотация. Выписана самосогласованная система кинетических уравнений больцмановского типа, учитывающая эволюцию по времени t мягких возбуждений неабелевой плазмы и среднего значения цветного заряда при взаимодействии высокоэнергичной цветозаряженной частицы с плазмой. На основе этих уравнений рассмотрена модельная задача взаимодействия двух бесконечно узких волновых пакетов. Получена система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, определяющая динамику взаимодействия бесцветной $N^l_{\boldsymbol{k}}$ и цветовой $W^l_{\boldsymbol{k}}$ компонент плотности числа коллективных бозонных возбуждений. В силу автономности правых частей данная система сведена к одному нелинейному дифференциальному уравнению типа Абеля второго рода. Показано, что при определенном соотношении между постоянными, входящими в данное нелинейное уравнение, можно получить точное решение в параметрическом виде.

Ключевые слова: кинетическое уравнение, неабелева плазма, волновой пакет, уравнение Абеля второго рода, функция Ламберта.

ON THE EXACT SOLUTION OF THE EVOLUTION EQUATIONS FOR TWO INTERACTING NARROW WAVE PACKETS PROPAGATING IN A NON-ABELIAN PLASMA

© 2024 **Yu. A. MARKOV, M. A. MARKOVA, N. Yu. MARKOV**

Abstract. In this paper, we present and discuss a self-consistent system of kinetic equations of the Boltzmann type, which takes into account the time evolution of soft non-Abelian plasma excitations and the mean value of the color charge in the interaction of a high-energy color-charged particle with a plasma. Based on these equations, we examine a model problem of interaction of two infinitely narrow wave packets and obtain a system of first-order nonlinear ordinary differential equations, which governs the dynamics of interacting the colorless $N^l_{\boldsymbol{k}}$ and color $W^l_{\boldsymbol{k}}$ components of the density of the number collective bosonic excitations. Due to the autonomy of the right-hand sides, we reduce this system to a single nonlinear Abel differential equation of the second kind. Finally, we show that at a certain ratio between the constants involved in this nonlinear equation, one can obtain an exact solution in the parametric form.

Keywords and phrases: kinetic equation, non-Abelian plasma, wave packet, Abel equation of the second kind, Lambert function.

AMS Subject Classification: 34C14

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России по проекту «Аналитические и численные методы математической физики в задачах томографии, квантовой теории поля и механики жидкости и газа» (№ гос. регистрации 12104130005-1).

1. Введение. В первой работе цикла [3], была развита гамильтонова теория для коллективных продольно поляризованных бозе-возбуждений (плазмонов), взаимодействующих с классической высокоэнергетической цветозаряженной пробной частицей, распространяющейся через высокотемпературную чисто глюонную плазму. Было проведено обобщение скобки Ли—Пуассона на случай составной системы: сплошной среды, описываемой бозонной нормальной переменной поля $a^a_{\boldsymbol{k}}$, и жесткой тестовой частицы с неабелевым цветовым зарядом Q^a, и представлены соответствующие уравнения Гамильтона. Были выписаны канонические преобразования, включающие одновременно как бозонную степень свободы мягких коллективных возбуждений, так и степень свободы жесткой пробной частицы, связанной с ее цветовым зарядом, в горячей глюонной плазме. Нами была получена полная система условий каноничности для этих преобразований и введено в рассмотрение важное понятие плотности числа плазмонов $\mathcal{N}^{aa'}_{\boldsymbol{k}}$, которая является нетривиальной матрицей в эффективном цветовом пространстве. Найден явный вид эффективного гамильтониана четвертого порядка, описывающего упругое рассеяние плазмона на жесткой цветной частице. Для функции $\mathcal{N}^{aa'}_{\boldsymbol{k}}$ было определено матричное кинетическое уравнение. На основе цветовой декомпозиции данной матричной функции вида

$$\mathcal{N}^{aa'}_{\boldsymbol{k}} = \delta^{aa'} N^l_{\boldsymbol{k}} + \bigl(T^{\,c}\bigr)^{aa'} \bigl\langle \mathcal{Q}^c \bigr\rangle W^l_{\boldsymbol{k}}$$

были вычислены первый и второй моменты матричного кинетического уравнения относительно цвета, определяющие скалярные кинетические уравнения для бесцветной $N^l_{\boldsymbol{k}}$ и цветовой $W^l_{\boldsymbol{k}}$ частей данной декомпозиции. Здесь $\bigl\langle \mathcal{Q}^c \bigr\rangle$ — среднее значение цветового заряда пробной частицы, а цветовые генераторы T^a в присоединенном представлении определены как $\bigl(T^a\bigr)^{bc} \equiv -if^{abc}$, где f^{abc} — антисимметричные структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{su}(N_c)$. Цветовые индексы a, b, $c, \ldots$ пробегают значения $1, 2, \ldots, N_c^2 - 1$.

Целью данной (второй) статьи цикла является проведение более глубоко анализа полученной системы кинетических уравнений на скалярные функции $N^l_{\boldsymbol{k}}$ и $W^l_{\boldsymbol{k}}$. Данные уравнения представляют собой нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с весьма нетривиальным по структуре интегральным ядром (в данном случае квадратом амплитуды упругого рассеяния плазмона на жесткой цветозаряженной частице). Прямое построение каких-либо аналитических решений данных уравнений не представляется возможным, и поэтому здесь необходимо привлекать различные модельные приближения. В качестве одного из таких приближений будем рассматривать задачу взаимодействия двух бесконечно узких волновых пакетов, позволяющую в частности свести исходную систему интегро-дифференциальных уравнений к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, допускающей построение точного решения. Данная задача важна, например, в контексте определения направления спектральной перекачки энергии мягких бозе-возбуждений при наличии волновой турбулентности в нелинейных средах с дисперсией.

2. Система кинетических уравнений для мягких глюонных возбуждений. В данном разделе выпишем исходную систему интегро-дифференциальных уравнений на скалярные плотности числа плазмонов $N^l_{\boldsymbol{k}}$ и $W^l_{\boldsymbol{k}}$, полученные в первой статье цикла:

$$\begin{aligned} d_A \frac{\partial N^l_{\boldsymbol{k}}}{\partial t} &= 2\mathfrak{q}_2(t) N_c \bigl(\operatorname{Im} \mathcal{T}_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}}\bigr) W^l_{\boldsymbol{k}} - \mathfrak{q}_2(t) N_c \int d\boldsymbol{k}_1 \bigl|\mathcal{T}_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_1}\bigr|^2 \times \\ &\times \left\{ \bigl(N^l_{\boldsymbol{k}} - N^l_{\boldsymbol{k}_1}\bigr) - \frac{1}{2} N_c \bigl(W^l_{\boldsymbol{k}} N^l_{\boldsymbol{k}_1} - N^l_{\boldsymbol{k}} W^l_{\boldsymbol{k}_1}\bigr) \right\} (2\pi)\, \delta\bigl(\omega^l_{\boldsymbol{k}} - \omega^l_{\boldsymbol{k}_1} - \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_1)\bigr), \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W^l_{\boldsymbol{k}}}{\partial t} &= -\frac{1}{2}\, A(t) W^l_{\boldsymbol{k}} + 2\bigl(\operatorname{Im} \mathcal{T}_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}}\bigr) N^l_{\boldsymbol{k}} - \int d\boldsymbol{k}_1 \bigl|\mathcal{T}_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_1}\bigr|^2 \times \\ &\times \left\{ \rho \mathfrak{q}_2(t) \bigl(W^l_{\boldsymbol{k}} - W^l_{\boldsymbol{k}_1}\bigr) - \frac{1}{2}\, N_c N^l_{\boldsymbol{k}} N^l_{\boldsymbol{k}_1} \right\} (2\pi)\, \delta\bigl(\omega^l_{\boldsymbol{k}} - \omega^l_{\boldsymbol{k}_1} - \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_1)\bigr). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь $\omega^l_{\boldsymbol{k}}$ — частота собственных колебаний мягких бозонных возбуждений, являющаяся функцией волнового вектора $\boldsymbol{k}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2} = T_{\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega^l_{\boldsymbol{k}_1} - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k}_1} + \frac{1}{\omega^l_{\boldsymbol{k}_2} - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k}_2}\right)\phi^*_{\boldsymbol{k}_1}\phi_{\boldsymbol{k}_2} + \\ + i\Bigg[\left(\frac{1}{\omega^l_{\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2} - \boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)} + \frac{1}{\omega^l_{\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2} - \omega^l_{\boldsymbol{k}_1} + \omega^l_{\boldsymbol{k}_2}}\right)\mathcal{V}_{\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2}\phi^*_{\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2} - \\ - \left(\frac{1}{\omega^l_{\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_1} - \boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_1)} + \frac{1}{\omega^l_{\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_1} - \omega^l_{\boldsymbol{k}_2} + \omega^l_{\boldsymbol{k}_1}}\right)\mathcal{V}^*_{\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_1}\phi_{\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_1}\Bigg]\end{aligned} \tag{2.3}$$

— полная эффективная амплитуда упругого рассеяния плазмона на жесткой цветозаряженной частице, где, в свою очередь,

$$\mathcal{V}_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2} = \frac{1}{2^{3/4}}\,g\left(\frac{\epsilon^l_{\mu}(\boldsymbol{k})}{\sqrt{2\omega^l_{\boldsymbol{k}}}}\right)\left(\frac{\epsilon^l_{\mu_1}(\boldsymbol{k}_1)}{\sqrt{2\omega^l_{\boldsymbol{k}_1}}}\right)\left(\frac{\epsilon^l_{\mu_2}(\boldsymbol{k}_2)}{\sqrt{2\omega^l_{\boldsymbol{k}_2}}}\right)\,{}^*\Gamma^{\mu\mu_1\mu_2}(k,-k_1,-k_2)\Big|_{\text{on-shell}} \tag{2.4}$$

— вершинная функция трехплазмонного взаимодействия в HTL-приближении (см. [4, 7]). Функции $\mathfrak{q}_2(t)$ и $A(t)$ определяются, соответственно, выражениями $\mathfrak{q}_2(t) \equiv \langle \mathcal{Q}^a\rangle\langle\mathcal{Q}^a\rangle$ и

$$A(t) \equiv N_c^2\int d\boldsymbol{k}_1 d\boldsymbol{k}_2\left|\mathcal{T}_{\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2}\right|^2 N^l_{\boldsymbol{k}_1}N^l_{\boldsymbol{k}_2}(2\pi)\delta\big(\omega^l_{\boldsymbol{k}} - \omega^l_{\boldsymbol{k}_1} - \boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)\big) \tag{2.5}$$

и связаны между собой соотношением

$$\mathfrak{q}_2(t) = \mathfrak{q}_2(t_0)\exp\left\{\int\limits_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right\}. \tag{2.6}$$

Коэффициент $d_A \equiv N^2 - 1$ в левой части (2.1) является инвариантом для группы $SU(N)$, а коэффициент ρ в последнем уравнении равен

$$\rho = \begin{cases} 1 & \text{для цветовой группы } SU(2), \\ 3/4 & \text{для цветовой группы} SU(3). \end{cases}$$

Величина ρ не зависит от начального значения цветного заряда тестовой частицы только для этих частных значений цветовой группы $SU(N_c)$.

Введем полное число «бесцветных» плазмонов, полагая по определению

$$\mathbb{N}^l(t) \equiv \int d\boldsymbol{k}N^l_{\boldsymbol{k}}(t). \tag{2.7}$$

С помощью (2.1) и того факта, что квадрат модуля амплитуды (2.3) является четной функцией относительно перестановки моментов $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{k}_1$, легко находим

$$\frac{d\mathbb{N}^l(t)}{dt} = 2\frac{N_c}{d_A}\,\mathfrak{q}_2(t)\int d\boldsymbol{k}\big(\operatorname{Im}\mathcal{T}_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}}\big)W^l_{\boldsymbol{k}}(t), \tag{2.8}$$

т.е. полное число плазмонных возбуждений будет сохраняться только в отсутствие диссипативных эффектов, когда $\operatorname{Im}\mathcal{T}_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}} = 0$ (см. следующий раздел).

Кроме того, если ввести в рассмотрение полную энергию и импульс волновой системы бесцветных плазмонов

$$\mathbb{E}^l(t) \equiv \int d\boldsymbol{k}\omega^l_{\boldsymbol{k}}N^l_{\boldsymbol{k}}(t), \quad \boldsymbol{K}^l(t) \equiv \int d\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}N^l_{\boldsymbol{k}}(t), \tag{2.9}$$

то в силу того же кинетического уравнения имеем

$$\frac{d\big(\mathbb{E}^l - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{K}^l\big)(t)}{dt} = 2\frac{N_c}{d_A}\,\mathfrak{q}_2(t)\int d\boldsymbol{k}\,\big(\omega^l_{\boldsymbol{k}} - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k}\big)\big(\operatorname{Im}\mathcal{T}_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}}\big)W^l_{\boldsymbol{k}}(t). \tag{2.10}$$

Видим, что величина $\big(\mathbb{E}^l - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{K}^l\big)(t)$ также не сохраняется из-за диссипативных эффектов.

3. Взаимодействие бесконечно узких волновых пакетов. Чтобы получить некоторое представление о поведении решения системы кинетических уравнений (2.1) и (2.2), рассмотрим модельную задачу взаимодействия двух бесконечно узких пакетов с характерными волновыми векторами $\boldsymbol{k}_0$ и $\boldsymbol{k}'_0$. Введем скалярные плотности числа плазмонов $N^l_{\boldsymbol{k}}$ и $W^l_{\boldsymbol{k}}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} N^l_{\boldsymbol{k}}(t) &= N_1(t)\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0) + N_2(t)\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'_0),\\ W^l_{\boldsymbol{k}}(t) &= W_1(t)\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0) + W_2(t)\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'_0), \end{aligned} \tag{3.1}$$

так что $\boldsymbol{k}_0 \neq \boldsymbol{k}'_0$. В частности, из этого представления для функции $N^l_{\boldsymbol{k}}(t)$ и из определений (2.7) и (2.9) сразу следует

$$\begin{aligned} \mathbb{N}^l(t) &= N_1(t) + N_2(t),\\ \big(\mathbb{E}^l - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{K}^l\big)(t) &= (\omega^l_{\boldsymbol{k}_0} - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k}_0)N_1(t) + (\omega^l_{\boldsymbol{k}'_0} - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k}'_0)N_2(t). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Подставим (3.1) в левую и правую части уравнений (2.1) и (2.2). После выполнения интегрирования по $d\boldsymbol{k}_1$ в правых частях, получаем систему двух самосогласованных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которые запишем следующим образом: первое уравнение для функций $N_1(t)$ и $N_2(t)$ — в виде

$$\begin{aligned} &\frac{dN_1(t)}{dt}\,\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0) + \frac{dN_2(t)}{dt}\,\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'_0) =\\ &\qquad = \Big\{A_{11}N_1 + A_{13}W_1 - \frac{N_c}{d_A}\,\mathfrak{q}_2(t)B\big(N_1W_2 - N_2W_1\big)\Big\}\,\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)+\\ &\qquad + \Big\{A_{22}N_2 + A_{24}W_2 + \frac{N_c}{d_A}\,\mathfrak{q}_2(t)B\big(N_1W_2 - N_2W_1\big)\Big\}\,\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'_0)+\\ &\qquad + \frac{N_c}{d_A}\,\mathfrak{q}_2(t)\Big\{\big|\mathcal{T}_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_0}\big|^2(2\pi)\,\delta(\Delta\omega_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_0})N_1 + \big|\mathcal{T}_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'_0}\big|^2(2\pi)\,\delta(\Delta\omega_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'_0})N_2\Big\}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Второе уравнение для функций $W_1(t)$ и $W_2(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{dW_1(t)}{dt}\,\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0) + \frac{dW_2(t)}{dt}\,\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'_0) =\\ &= \Big\{A_{31}N_1 + A_{33}W_1 - \frac{1}{2}\,A(t)W_1 + BN_1N_2 + \frac{1}{2}\,N_c\big|\mathcal{T}_{\boldsymbol{k}_0,\boldsymbol{k}_0}\big|^2(2\pi)\,\delta\big(\Delta\omega_{\boldsymbol{k}_0,\boldsymbol{k}_0}\big)N_1^2\Big\}\,\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)+\\ &+ \Big\{A_{42}N_2 + A_{44}W_2 - \frac{1}{2}\,A(t)W_2 + BN_1N_2 + \frac{1}{2}\,N_c\big|\mathcal{T}_{\boldsymbol{k}'_0,\boldsymbol{k}'_0}\big|^2(2\pi)\,\delta\big(\Delta\omega_{\boldsymbol{k}'_0,\boldsymbol{k}'_0}\big)N_2^2\Big\}\,\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'_0)+\\ &\qquad + \rho\mathfrak{q}_2(t)\Big\{\big|\mathcal{T}_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_0}\big|^2(2\pi)\,\delta\big(\Delta\omega_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_0}\big)W_1 + \big|\mathcal{T}_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'_0}\big|^2(2\pi)\,\delta\big(\Delta\omega_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'_0}\big)W_2\Big\}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

где для краткости введено обозначение

$$\Delta\omega_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_1} \equiv \omega^l_{\boldsymbol{k}} - \omega^l_{\boldsymbol{k}_1} - \boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1). \tag{3.5}$$

Ненулевые «матричные элементы» A_{ij}, $i,j = 1,\ldots,4$, определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} A_{31} &= 2\big(\operatorname{Im}\mathcal{T}_{\boldsymbol{k}_0,\boldsymbol{k}_0}\big), & A_{13} &= \frac{N_c}{d_A}\,\mathfrak{q}_2(t)A_{31},\\ A_{42} &= 2\big(\operatorname{Im}\mathcal{T}_{\boldsymbol{k}'_0,\boldsymbol{k}'_0}\big), & A_{24} &= \frac{N_c}{d_A}\,\mathfrak{q}_2(t)A_{42},\\ A_{11} &= -\frac{N_c}{d_A}\,\mathfrak{q}_2(t)\int d\boldsymbol{k}\,\big|\mathcal{T}_{\boldsymbol{k}_0,\boldsymbol{k}}\big|^2(2\pi)\,\delta\big(\Delta\omega_{\boldsymbol{k}_0,\boldsymbol{k}}\big), & A_{33} &= \rho\frac{d_A}{N_c}A_{11},\\ A_{22} &= -\frac{N_c}{d_A}\,\mathfrak{q}_2(t)\int d\boldsymbol{k}\,\big|\mathcal{T}_{\boldsymbol{k}'_0,\boldsymbol{k}}\big|^2(2\pi)\,\delta\big(\Delta\omega_{\,\boldsymbol{k}'_0,\boldsymbol{k}}\big), & A_{44} &= \rho\frac{d_A}{N_c}A_{22}, \end{aligned}$$

а коэффициент B задается в виде

$$B = \frac{1}{2}\,N_c\,\mathfrak{q}_2(t)\big|\mathcal{T}_{\boldsymbol{k}_0,\boldsymbol{k}'_0}\big|^2(2\pi)\,\delta(\Delta\omega_{\boldsymbol{k}_0,\boldsymbol{k}'_0}). \tag{3.6}$$

Заметим, однако, что этот коэффициент зависит явным образом от δ-функции Дирака и поэтому является, вообще говоря, *обобщенной* функцией. Обозначения для элементов матрицы A_{ij} выбраны так, чтобы соответствовать обычному матричному умножению матрицы $\mathcal{A} \equiv (A_{ij})$ на некоторый эффективный вектор $\mathbf{\Lambda}$, составленный из искомых функций:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \Lambda_3 \\ \Lambda_4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ W_1 \\ W_2 \end{pmatrix}.$$

Из структуры правых частей уравнений (3.3) и (3.4) видно, что только последние члены в этих уравнениях не позволяют выделить вклады, пропорциональные δ-функциям: $\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)$ и $\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'_0)$, как это было сделано, например, в [9,10] для аналогичных задач взаимодействия бесконечно узких волновых пакетов. Кроме того, (3.4) содержит члены с плохо определенными произведениями, например, $\left|\mathcal{T}_{\boldsymbol{k}_0,\boldsymbol{k}_0}\right|^2 (2\pi)\, \delta(\Delta\omega_{\,\boldsymbol{k}_0,\boldsymbol{k}_0})$, которые в дальнейших рассуждениях мы просто отбрасываем.

Далее поступаем следующим образом. Проинтегрируем выражения (3.3) и (3.4) по $\boldsymbol{k}$. В силу требования $\boldsymbol{k}_0 \neq \boldsymbol{k}'_0$ можем выбрать области интегрирования вблизи волновых векторов $\boldsymbol{k}_0$ и $\boldsymbol{k}'_0$ непересекающимися. В этом случае из (3.3) и (3.4) легко получаем систему четырех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dN_1(t)}{dt} &= A_{13}W_1 - \frac{N_c}{d_A}\,\mathfrak{q}_2(t)B\big(N_1W_2 - N_2W_1\big), \\ \frac{dN_2(t)}{dt} &= A_{24}W_2 + \frac{N_c}{d_A}\,\mathfrak{q}_2(t)B\big(N_1W_2 - N_2W_1\big), \\ \frac{dW_1(t)}{dt} &= A_{31}N_1 - \frac{1}{2}\,A(t)W_1 + BN_1N_2, \\ \frac{dW_2(t)}{dt} &= A_{42}N_2 - \frac{1}{2}\,A(t)W_2 + BN_1N_2. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Заметим, что при таком подходе вклады с матричными элементами A_{11}, A_{22}, A_{33} и A_{44} в точности сокращаются с последними членами в (3.3) и (3.4). Система (3.7) может быть также получена несколько иным путем. Рассмотрим для конкретности исходное выражение (3.3). Проинтегрируем его по всему пространству импульсов $\boldsymbol{k} \in \mathbf{R}^3$. Затем умножим (3.3) на функцию $(\omega^l_{\boldsymbol{k}} - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k})$ и снова проинтегрируем по $\boldsymbol{k}$. В результате получаем систему из двух уравнений, которую удобно представить в матричной форме:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \omega^l_{\boldsymbol{k}_0} - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k}_0 & \omega^l_{\boldsymbol{k}'_0} - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k}'_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{N}_1 \\ \dot{N}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \omega^l_{\boldsymbol{k}_0} - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k}_0 & \omega^l_{\boldsymbol{k}'_0} - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k}'_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{13}W_1 \\ A_{24}W_2 \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{N_c}{d_A}\,\mathfrak{q}_2(t)B\big(N_1W_2 - N_2W_1\big)\Delta\omega_{\boldsymbol{k}_0,\boldsymbol{k}'_0} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

где точка над N_1 и N_2 обозначает дифференцирование по t. Предположим, что определитель матрицы в левой части (3.8) отличен от нуля:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \omega^l_{\boldsymbol{k}_0} - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k}_0 & \omega^l_{\boldsymbol{k}'_0} - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k}'_0 \end{pmatrix} = -\Delta\omega_{\boldsymbol{k}_0,\boldsymbol{k}'_0} \neq 0.$$

Напомним, что мы используем обозначение (3.5). В этом случае, умножая уравнение (3.8) на соответствующую обратную матрицу, легко приходим к первым двум уравнениям системы (3.7). Заметим, что в этих уравнениях множитель $\Delta\omega_{\boldsymbol{k}_0,\boldsymbol{k}'_0}$ полностью сокращается (он представлен только в коэффициенте B (уравнение (3.6)) как аргумент δ-функции), и требование $\Delta\omega_{\boldsymbol{k}_0,\boldsymbol{k}'_0} \neq 0$ можно формально отбросить. Вторая пара уравнений в системе (3.7) может быть получена полностью аналогичным образом. Легко видеть, что первые два уравнения в (3.7) находятся в полном соответствии с соотношениями, полученными в предыдущем разделе, а именно, с (2.8) и (2.10) при использовании представления (3.1).

Максимально упростим полученную систему. Матричные элементы A_{13}, A_{24}, A_{31} и A_{42} перед линейными членами в правых частях (3.7) пропорциональны коэффициентам $\operatorname{Im}\mathcal{T}_{\boldsymbol{k}_0,\boldsymbol{k}_0}(\boldsymbol{v})$ и

$\operatorname{Im}\mathcal{T}_{\boldsymbol{k}'_0,\boldsymbol{k}'_0}(\boldsymbol{v})$. Эти коэффициенты фактически связаны с так называемым бесстолкновительным затуханием Ландау мягких глюонных колебаний и, следовательно, должны содержать дельта-функцию Дирака, отражающую соответствующие законы сохранения энергии и импульса данного физического процесса:

$$\operatorname{Im}\mathcal{T}_{\boldsymbol{k}_0,\boldsymbol{k}_0}(\boldsymbol{v}) \sim \int \frac{d\Omega_{\boldsymbol{v}'}}{4\pi}\, w_{\boldsymbol{v}'}(\boldsymbol{v};\boldsymbol{k}_0)(2\pi)\delta\big(\omega^l_{\boldsymbol{k}_0} - \boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{k}_0\big),$$

где $w_{\boldsymbol{v}'}(\boldsymbol{v};\boldsymbol{k}_0)$ — вероятность процесса затухания Ландау. Явный вид этой вероятности можно получить, используя выражения для амплитуды рассеяния (2.3), трехточечной вершинной функции $\mathcal{V}_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2}$, уравнение (2.4) и HTL-поправки $\delta\Gamma^{\mu\nu\rho}(k,k_1,k_2)$. Однако, как известно, *линейное* затухание Ландау кинематически запрещено в горячей глюонной плазме, поэтому эти матричные элементы можно полагать равными нулю, т.е.

$$A_{13} = A_{24} = A_{31} = A_{42} = 0.$$

Далее рассмотрим члены последних двух уравнений в (3.7), содержащие функцию $A(t)$. В силу определения (2.5) эта функция квадратична по (бесцветной части) плотности числа плазмонов, и поэтому члены $A(t)W_1$ и $A(t)W_2$ в (3.7) имеют третий порядок. При построении кинетических уравнений (2.1) и (2.2) мы ограничились линейным и квадратичным вкладами плотности числа плазмонов. Поэтому, в пределах принятой точности, в последних двух уравнениях в (3.7) следует отбросить вклады с функцией $A(t)$, а в первых двух уравнениях, в силу соотношения (2.6), по той же причине следует полагать

$$\mathfrak{q}_2(t) \simeq \mathfrak{q}_2(t_0) \equiv \mathfrak{q}_2^0.$$

Учитывая все вышесказанное, вместо (3.7) теперь имеем

$$\begin{aligned}
\frac{dN_1(t)}{dt} &= -\frac{N_c}{d_A}\,\mathfrak{q}_2^0 B\big(N_1W_2 - N_2W_1\big), &\qquad \frac{dW_1(t)}{dt} &= BN_1N_2,\\
\frac{dN_2(t)}{dt} &= \frac{N_c}{d_A}\,\mathfrak{q}_2^0 B\big(N_1W_2 - N_2W_1\big), &\qquad \frac{dW_2(t)}{dt} &= BN_1N_2,
\end{aligned}$$

откуда, в частности, непосредственно следуют соотношения

$$N_1(t) + N_2(t) = \mathcal{C}_1, \quad W_1(t) - W_2(t) = \mathcal{C}_2, \tag{3.9}$$

где $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ — некоторые постоянные. Эти соотношения позволяют свести систему четырех уравнений к системе двух уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{dN_1(t)}{dt} &= \beta B\big[N_1(\mathcal{C}_2 - W_1) + W_1(\mathcal{C}_1 - N_1)\big],\\
\frac{dW_1(t)}{dt} &= BN_1(\mathcal{C}_1 - N_1),
\end{aligned} \tag{3.10}$$

где для краткости мы обозначили $\beta \equiv N_c\,\mathfrak{q}_2^0/d_A$. Очевидно, что эта система имеет две стационарные точки, одна из которых тривиальна: $N_1 = W_1 = 0$, а вторая имеет вид $N_1 = \mathcal{C}_1$, $W_1 = \mathcal{C}_2$. Из равенств (3.2) и первого соотношения в (3.9) следует, что $\mathbb{N}^l(t) = \mathrm{const}$, т.е. полное число плазменных возбуждений в отсутствии диссипации сохраняется, как и должно быть в силу (2.8).

При определенном соотношении между константами $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$, а именно при

$$\mathcal{C}_2^2 = \frac{1}{2\beta}\,\mathcal{C}_1^2,$$

можем получить точное решение системы (3.10). С этой целью первым шагом, в силу автономности правых частей, сведем эту систему к одному уравнению

$$\frac{dN_1}{dW_1} = \beta\left(\frac{\mathcal{C}_2 - W_1}{\mathcal{C}_1 - N_1} + \frac{W_1}{N_1}\right)$$

или в несколько иной форме:

$$\Big[\big(2N_1 - \mathcal{C}_1\big)W_1 - \mathcal{C}_2N_1\Big]\frac{dW_1}{dN_1} = \frac{1}{\beta}\,(N_1^2 - \mathcal{C}_1N_1), \tag{3.11}$$

которое определяет W_1 как функцию от N_1. Построение решения уравнения (3.11), а затем и исходной системы (3.10) выполнено в следующем разделе. Здесь же сразу приведем явный вид точного решения для системы (3.10) в параметрической форме:

$$\begin{aligned} N_1 &= N_1(\tau, C) = \frac{1}{2}\,\mathcal{C}_1 - \frac{1}{4a}\,\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2\frac{\tau}{f(\tau)}, \\ W_1 &= W_1(\tau, C) = a\left[\frac{1+\tau}{\tau}\,f(\tau) - \frac{1}{2}\,\frac{\tau}{f(\tau)}\right] + \frac{\mathcal{C}_2 N_1}{2N_1 - \mathcal{C}_1}, \\ t &= t(\tau, C, \widetilde{C}) = -\frac{2a}{B\mathcal{C}_1^2}\int\frac{d\tau}{(1+\tau)f(\tau)} + \widetilde{C}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

где C и $\widetilde{C}$ — произвольные постоянные интегрирования и

$$a^2 = \frac{1}{4\beta}\,\mathcal{C}_1^2, \quad f(\tau) \equiv \big(\tau - \ln|1+\tau| - C\big)^{1/2}.$$

В разделе 5 интеграл по τ в параметрическом представлении времени t в (3.12) переписан в терминах интеграла от известной функции Ламберта W (см. [5]).

4. Построение точного решения системы (3.10)**.** Перепишем систему (3.10) и уравнение (3.11) в иной форме, введя общепринятые в теории дифференциальных уравнений обозначения. Полагаем

$$y \equiv W_1, \quad x \equiv N_1; \tag{4.1}$$

тогда вместо (3.10) имеем

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = x(\mathcal{C}_1 - x), \\ \dfrac{dx(t)}{dt} = \beta\big[x(\mathcal{C}_2 - y) + y(\mathcal{C}_1 - x)\big], \end{cases} \tag{4.2}$$

а вместо (3.11) —

$$\Big[\big(2x - \mathcal{C}_1\big)y - \mathcal{C}_2 x\Big]\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\beta}\,x(x - \mathcal{C}_1) \tag{4.3}$$

или в более стандартных обозначениях (см. [2])

$$\big[g_1(x)y + g_0(x)\big]\frac{dy}{dx} = f_0(x), \tag{4.4}$$

где

$$g_0(x) \equiv -\mathcal{C}_2 x, \quad g_1(x) \equiv 2x - \mathcal{C}_1, \quad f_0(x) \equiv \frac{1}{\beta}\,x(x - \mathcal{C}_1).$$

В системе (4.2) мы избавились от параметра B, формально переопределив время

$$t \to t/B. \tag{4.5}$$

Напомним, что данный параметр, в силу определения (3.6), является обобщенной функцией волновых векторов $\boldsymbol{k}_0$ и $\boldsymbol{k}_0'$. Уравнение (4.4) относится к классу уравнений Абеля второго рода. Первым шагом приведем его к «нормальной» форме. Произведем замену неизвестной функции

$$w = y + \frac{g_0(x)}{g_1(x)}.$$

Это преобразование приводит исходное уравнение (4.4) к виду

$$w\frac{dw}{dx} = F_1(x)w + F_0(x), \tag{4.6}$$

где

$$F_1(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{g_0(x)}{g_1(x)}\right) = \frac{\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2}{(2x - \mathcal{C}_1)^2}, \quad F_0(x) = \frac{f_0(x)}{g_1(x)} = \frac{1}{\beta}\,\frac{x(x - \mathcal{C}_1)}{2x - \mathcal{C}_1}.$$

Далее, замена аргумента функции w

$$\xi = \int F_1(x)dx = -\frac{1}{2}\,\frac{\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2}{2x - \mathcal{C}_1} \quad \text{или} \quad x = \frac{1}{2}\,\mathcal{C}_1 - \frac{1}{4\xi}\,\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2$$

позволяет привести уравнение (4.6) к каноническому виду

$$w\frac{dw}{d\xi} = w + F(\xi). \tag{4.7}$$

Здесь

$$F(\xi) = \frac{F_0(x)}{F_1(x)} = \frac{\mathcal{C}_1^2}{8\beta}\left(\frac{1}{\xi} - \frac{\mathcal{C}_2^2}{4\xi^3}\right).$$

Для уравнения (4.7) при некотором соотношении между параметрами $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$, а именно, при

$$\mathcal{C}_2^2 = \frac{1}{2\beta}\,\mathcal{C}_1^2, \tag{4.8}$$

существует точное решение в параметрическом виде (см. [2, уравнение 1.3.7]):

$$\xi = \frac{a}{\tau}\bigl(\tau - \ln|1+\tau| - C\bigr)^{1/2}, \quad w = a\left[\frac{1+\tau}{\tau}\bigl(\tau - \ln|1+\tau| - C\bigr)^{1/2} - \frac{1}{2}\,\tau\bigl(\tau - \ln|1+\tau| - C\bigr)^{-1/2}\right],$$

где τ — параметр, C — произвольная постоянная и

$$a^2 = \frac{1}{4\beta}\,\mathcal{C}_1^2. \tag{4.9}$$

Возвращаясь к исходной функции y и ее аргументу x, определим точное решение уравнения (4.3) в параметрической форме

$$x = x(\tau, C) = \frac{1}{2}\,\mathcal{C}_1 - \frac{1}{4a}\,\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2\frac{\tau}{f(\tau)}, \tag{4.10a}$$

$$y = y(\tau, C) = a\left[\frac{1+\tau}{\tau}\,f(\tau) - \frac{1}{2}\,\frac{\tau}{f(\tau)}\right] + \frac{\mathcal{C}_2 x}{2x - \mathcal{C}_1}. \tag{4.10b}$$

Здесь введено обозначение

$$f(\tau) \equiv \bigl(\tau - \ln|1+\tau| - C\bigr)^{1/2}. \tag{4.11}$$

Решение исходной динамической системы (4.2) определяется формулами

$$x = x(\tau, C), \quad y = y(\tau, C), \quad t = \frac{1}{\beta}\int \frac{\dot{x}_\tau d\tau}{[\mathcal{C}_1 - 2x(\tau, C)]y(\tau, C) + \mathcal{C}_2 x(\tau, C)} + \widetilde{C}. \tag{4.12}$$

Здесь $\dot{x}_\tau \equiv dx(\tau, C)/d\tau$ и $\widetilde{C}$ — другая произвольная постоянная интегрирования. Последнее соотношение в (4.12) определяет неявную зависимость параметра τ от времени t: $\tau = \tau(t, C, \widetilde{C})$. Тем самым, используя формулы (4.10a) и (4.10b), можно установить зависимость x и y от t. Заметим, что вместо последнего выражения в (4.12) с тем же успехом можно использовать формулу

$$t = \int \frac{\dot{y}_\tau d\tau}{x(\tau, C)(\mathcal{C}_1 - x(\tau, C))} + \widetilde{C}.$$

К сожалению, прямое использование обоих параметрических представлений для времени $t = t(\tau, C, \widetilde{C})$ приводит к довольно громоздким выражениям, поэтому здесь будем действовать иначе.

Фактически задача сводится к определению такой функции $\mathcal{F}(\tau)$, что выполняется система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy(\tau, C)}{d\tau} = \mathcal{F}(\tau)x(\mathcal{C}_1 - x), \\ \dfrac{dx(\tau, C)}{d\tau} = \beta\mathcal{F}(\tau)\bigl[(\mathcal{C}_1 - 2x)y + \mathcal{C}_2 x\bigr]. \end{cases} \tag{4.13}$$

Здесь в правой части для краткости опущена зависимость функций x и y от параметра τ и константы C. Зависимость времени t от τ в этом случае задается неопределенным интегралом вида

$$t = \int \mathcal{F}(\tau)d\tau + \widetilde{C}. \tag{4.14}$$

Для определения подынтегральной функции $\mathcal{F}(\tau)$ выразим $f(\tau)$ как функцию от x из параметрического решения (4.10a), подставим ее в y (решение (4.10b)) и продифференцируем по τ. В результате получим

$$\dot{y}_\tau = \frac{1}{2}\,\frac{\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2}{\mathcal{C}_1 - 2x} + \mathcal{C}_1\mathcal{C}_2\,\frac{\tau\dot{x}_\tau}{(\mathcal{C}_1-2x)^2} + \frac{2a^2}{\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2}\,\dot{x}_\tau.$$

Напомним, что коэффициент a^2 определялся равенством (4.9). Основная особенность последнего выражения — отсутствие производной $\dot{x}_\tau$ в первом члене правой части. Осталось подставить соответствующие правые части из (4.13) в предыдущее выражение вместо производных $\dot{y}_\tau$ и $\dot{x}_\tau$, а затем подставить точные решения (4.10) вместо y и x. После несложных, но несколько громоздких алгебраических преобразований, учитывая соотношения (4.8) и (4.9), находим искомую функцию

$$\mathcal{F}(\tau) = -\frac{2a}{\mathcal{C}_1^2}\,\frac{1}{(1+\tau)f(\tau)}. \tag{4.15}$$

Преимущество такого подхода заключается в том, что большинство членов взаимно сокращаются, и мы получаем достаточно простое выражение. Подставляя $\mathcal{F}(\tau)$ в (4.14) и вспоминая определение (4.11), находим искомую параметризацию времени

$$t = t(\tau, C, \widetilde{C}) = -\frac{2a}{\mathcal{C}_1^2}\int \frac{d\tau}{(1+\tau)\big(\tau - \ln|1+\tau| - C\big)^{1/2}} + \widetilde{C}. \tag{4.16}$$

Прямой подстановкой (4.15) и точных решений (4.10) в систему уравнений (4.13), мы убеждаемся, что они обращаются в тождество. Переходя к исходным функциям N_1 и W_1 в соответствии с (4.1) и восстанавливая параметр B, уравнение (4.5), мы тем самым определяем точное решение системы (3.10), задаваемое выражением (3.12).

5. Функция Ламберта. Проанализируем структуру подынтегрального выражения в (4.16) более детально. Для этого заменим переменную интегрирования $\ln|1+\tau| = \zeta$, что дает

$$\int \frac{d\tau}{(1+\tau)\big(\tau - \ln|1+\tau| - C\big)^{1/2}} = \int \frac{d\zeta}{\big[\pm e^{\zeta} - \zeta - \big(1+C\big)\big]^{1/2}}, \tag{5.1}$$

где в правой части в подынтегральном выражении имеем

$$\begin{cases} +e^{\zeta} & \text{для } \tau > -1,\\ -e^{\zeta} & \text{для } \tau < -1. \end{cases}$$

Еще раз выполним замену переменной интегрирования:

$$\pm e^{\zeta} - \zeta - \big(1+C\big) = \lambda. \tag{5.2}$$

Решение этого уравнения относительно новой переменной λ можно представить в следующем виде:

$$\zeta = \zeta(\lambda) = -\lambda - \big(1+C\big) - W\big(\mp e^{-(1+C)}e^{-\lambda}\big),$$

где $W(x)$ — функция Ламберта W (см. [5]). Используя правило дифференцирования этой функции (см. [1, 5, 6]), находим далее

$$d\zeta = -d\lambda + \frac{W\big(\mp e^{-(1+C)}e^{-\lambda}\big)}{1+W\big(\mp e^{-(1+C)}e^{-\lambda}\big)}\,d\lambda \equiv -\frac{1}{1+W\big(\mp e^{-(1+C)}e^{-\lambda}\big)}\,d\lambda.$$

С учетом замены переменной интегрирования (5.2) и явного вида дифференциала $d\zeta$, находим вместо последнего интеграла в (5.1)

$$-\int \frac{d\lambda}{\lambda^{1/2}\big[1+W\big(\mp e^{-(1+C)}e^{-\lambda}\big)\big]} \quad \text{или} \quad -2\int \frac{d\xi}{1+W\big(\mp e^{-(1+C)}e^{-\xi^2}\big)}, \quad \xi \equiv \lambda^{1/2}. \tag{5.3}$$

Таким образом, мы свели интеграл от трансцендентной функции в (4.16) к интегралу от функции Ламберта W.

Однако такой интеграл также не может быть найден непосредственно, т.е. не может быть выражен в виде известных алгебраических и трансцендентных функций. Сложность заключается в том, что функция Ламберта W зависит от переменной ξ^2. Здесь мы можем использовать частное интегральное представление для функции Ламберта W, приведенное в [8, уравнение (45)]. В нашем случае оно будет выглядеть следующим образом:

$$\int \frac{d\xi}{1+W\bigl(\mp e^{-(1+C)}e^{-\xi^2}\bigr)} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} dv \int \frac{d\xi}{1\mp e^{-(1+C)}e^{-\xi^2}e^{v\operatorname{ctg} v}\sin v/v}. \tag{5.4}$$

Далее представим интеграл в виде разложения в ряд:

$$\frac{1}{1\mp e^{-(1+C)}e^{-\xi^2}e^{v\operatorname{ctg} v}\sin v/v} = 1+\sum_{\nu=1}^{\infty}(\pm 1)^{\nu}e^{-\nu(1+C)}e^{-\nu\xi^2}\left\{e^{v\operatorname{ctg} v}\,\frac{\sin v}{v}\right\}^{\nu}.$$

Запишем интеграл по ξ через функцию ошибки Гаусса:

$$\int\limits_0^{\xi} e^{-\nu\xi^2}d\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\nu}}\operatorname{erf}(\sqrt{\nu}\xi),$$

а для интегрирования по v используем [8, следствие 3.4]:

$$\int\limits_0^{\pi}\left\{e^{v\operatorname{ctg} v}\,\frac{\sin v}{v}\right\}^{\nu}dv = \frac{\pi\nu^{\nu}}{\nu!}.$$

В результате для интеграла (5.4) находим представление в виде ряда

$$\int \frac{d\xi}{1+W\bigl(\mp e^{-(1+C)}e^{-\xi^2}\bigr)} = \xi+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(\pm 1)^{\nu}}{\nu!\sqrt{\nu}}\bigl(e^{-(1+C)}\nu\bigr)^{\nu}\operatorname{erf}(\sqrt{\nu}\xi).$$

Подставив это представление в (5.3) и вернувшись к исходной переменной τ (в нашем случае просто заменив ξ на $f(\tau)$), получим следующее представление для параметризации времени (4.16):

$$t = \frac{4a}{\mathcal{C}_1^2}\left\{f(\tau)+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(\pm 1)^{\nu}}{\nu!\sqrt{\nu}}\bigl(e^{-(1+C)}\nu\bigr)^{\nu}\operatorname{erf}\bigl(\sqrt{\nu}f(\tau)\bigr)\right\}+\widetilde{C}.$$

Напомним, что под знаком суммы выбираем $(+1)^{\nu}\equiv 1$, если $\tau>-1$, и $(-1)^{\nu}$, если $\tau<-1$. Возможно, такое представление более удобно для приближенных аналитических выражений времени t как функции параметра τ, с использованием, например, нескольких первых членов ряда или, наоборот, с использованием асимптотической аппроксимации по $\nu\to\infty$ для членов этого ряда.

6. Заключение. В данной работе в рамках гамильтоновой теории была выписана самосогласованная система кинетических уравнений больцмановского типа, учитывающая эволюцию по времени мягких возбуждений плазмы и среднего значения цветового заряда при взаимодействии жесткой тестовой цветозаряженной частицы с плазмой с неабелевым типом взаимодействия. На основе найденных кинетических уравнений была рассмотрена модельная задача взаимодействия двух бесконечно узких волновых пакетов. Полученная система четырех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, определяющая динамику взаимодействия бесцветной $N^l_{\boldsymbol{k}}$ и цветовой $W^l_{\boldsymbol{k}}$ компонент плотности числа коллективных бозонных возбуждений, в силу отсутствия в системе бесстолкновительного затухания Ландау, была приведена на первом шаге к системе из двух уравнений. Затем в силу автономности правых частей редуцированная система была сведена к одному нелинейному дифференциальному уравнению типа Абеля второго рода. Показано, что при определенном соотношении между постоянными, входящими в данное нелинейное уравнение, можно получить точное решение в параметрическом виде. На последнем шаге было восстановлено соответствующее точное решение в параметрической форме исходной эволюционной системы (2.1) и (2.2) на функции $N^l_{\boldsymbol{k}}$ и $W^l_{\boldsymbol{k}}$.

Было найдено простое параметрическое представление времени в виде неопределенного интеграла, который затем был представлен как интеграл от известной функции Ламберта W. Такое представление позволило, в частности, получить явное выражение для времени t как функции параметра τ в виде ряда по специальной функции интеграла ошибок $\mathrm{erf}(f(\tau))$, которое, возможно, более удобно для приближенных выражений времени t как функции параметра τ, при использовании, например, несколько первых членов ряда или, наоборот, при асимптотической аппроксимации членов этого ряда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дубинов А. Е., Дубинова И. Д., Сайков С. К.* W-Функция Ламберта и её применение в математических задачах физики. — Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2006.
2. *Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.* Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям: Приложения в механике, точные решения. — М.: Наука, 1993.
3. *Марков Ю. А., Маркова М. А., Марков Н. Ю.* Гамильтонов формализм для жестких и мягких возбуждений в плазме с неабелевым взаимодействием// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2024. — *234.* — С. 143–158.
4. *Blaizot J.-P., Iancu E.* The quark-gluon plasma: collective dynamics and hard thermal loops// Phys. Rep. — 2002. — *359.* — P. 355–528.
5. *Corless R. M., Gonnet G. H., Hare D .E. G. et al.* On the Lambert W function// Adv. Comput. Math. — 1996. — *5.* — P. 329–359.
6. *Corless R. M., Jeffrey D. J., Knuth D. E.* A sequence series for the Lambert W function// Proc. Int. Symp. on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC, 1997). — New York, 1997. — P. 197–204.
7. *Ghiglieri J., Kurkela A., Strickland M., Vuorinen A.* Perturbative thermal QCD: Formalism and applications// Phys. Rep. — 2020. — *880.* — P. 1–73.
8. *Kalugin G. A., Jeffrey D. J., Corless R. M.* Stieltjes, Poisson and other integral representations for functions of Lambert W/ `arXiv:math.CV/:1103.5640v1`.
9. *Markov Yu. A., Markova M. A.* Nonlinear plasmon damping in the quark-gluon plasma// J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. — 2000. — *26.* — P. 1581–1619.
10. *Markov Yu. A., Markova M. A.* Nonlinear Landau damping of a plasmino in the quark-gluon plasma// Phys. Rev. D. — 2001. — *64.* — 105009.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России по проекту «Аналитические и численные методы математической физики в задачах томографии, квантовой теории поля и механики жидкости и газа» (№ гос. регистрации 12104130005-1).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Марков Юрий Адольфович (Markov Yurii Adolfovich)
Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск
(V. M. Matrosov Institute of System Dynamics and Control Theory
of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia)
E-mail: `markov@icc.ru`

Маркова Маргарита Анатольевна (Markova Margarita Anatol'evna)
Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск
(V. M. Matrosov Institute of System Dynamics and Control Theory
of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia)
E-mail: `markova@icc.ru`

Марков Никита Юрьевич (Markov Nikita Yurievich)
Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск
(V. M. Matrosov Institute of System Dynamics and Control Theory
of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia)
E-mail: `NYumarkov@gmail.com`