



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 208 (2022). С. 11–14
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-208-11-14

УДК 519.117, 519.175.3

ДВА КОМБИНАТОРНЫХ ТОЖДЕСТВА, СВЯЗАННЫХ С ПЕРЕЧИСЛЕНИЕМ ГРАФОВ

© 2022 г. В. А. ВОБЛЫЙ

Аннотация. Из полученной автором явной формулы для числа помеченных последовательно-параллельных 2-связных графов с заданным числом вершин выведены два комбинаторных тождества. Приведены также не зависящие от перечисления графов доказательства полученных тождеств.

Ключевые слова: комбинаторное тождество, метод коэффициентов, перечисление, последовательно-параллельный граф, 2-связный граф.

TWO COMBINATORIAL IDENTITIES RELATED TO ENUMERATION OF GRAPHS

© 2022 V. A. VOBLYI

ABSTRACT. From the explicit formula for the number of labeled, series-parallel, 2-connected graphs with a given number of vertices obtained by the author, two combinatorial identities are derived. Also, proofs of these identities independent of the enumeration of graphs are given.

Keywords and phrases: combinatorial identity, method of coefficients, enumeration, series-parallel graph, 2-connected graph.

AMS Subject Classification: 05A19, 05C30

Определение 1 (см. [4, с. 118]). *Цикломатическим числом* связного графа называется увеличенная на единицу разность между числом ребер графа и числом его вершин.

Определение 2. *k-Циклический граф* — это граф с цикломатическим числом, равным k .

Определение 3 (см. [7]). Граф называется *последовательно-параллельным*, если он не содержит подразбиения полного графа K_4 .

Последовательно-параллельные графы применяются при построении надежных коммуникационных сетей (см. [9]).

В [3] получена явная формула для числа помеченных последовательно-параллельных 2-связных графов с заданным числом вершин. В данной заметке из этой формулы выведены два комбинаторных тождества, а также приведено не зависящее от перечисления графов доказательство полученных тождеств.

Теорема 1. *Верны следующие комбинаторные тождества:*

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=n+1}^{n+i} (-1)^j \frac{(j+1)^{i-1}}{(i-1)!} \binom{n}{i} \binom{n+i}{j} \binom{j}{n+1} = n, \quad n \geq 3; \quad (1)$$

$$\sum_{i=2}^n \sum_{j=n+2}^{n+i} (-1)^j \frac{(j+1)^{i-1}}{(i-1)!} \binom{n}{i} \binom{n+i}{j} \binom{j}{n+2} = \frac{n(n-1)(n+3)(n+4)}{12}, \quad n \geq 4. \quad (2)$$

Доказательство. В [3] для числа $B_k(n)$ помеченных последовательно-параллельных k -циклических 2-связных графов с n вершинами при $n \geq k+2$ получено выражение

$$B_k(n) = \frac{n!}{2} \sum_{i=k}^{n-2} \sum_{j=n+k-2}^{n+i-2} (-1)^j \frac{(j+1)^{i-2}}{i!} \binom{n-3}{i-1} \binom{n-i-2}{j+k-1} \binom{j+1}{n+k-1}. \quad (3)$$

Так как полный граф K_4 является трициклическим, то все унициклические и бициклические 2-связные графы не содержат в качестве подграфа подразделения K_4 и потому являются последовательно-параллельными графами.

Унициклический 2-связный граф — это простой цикл с помеченными вершинами. Число таких циклов известно (см. [8, с. 20]); следовательно, $B_1(n) = (n-1)!/2$, и при $k=1$ из (3) получим

$$\sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=n-1}^{n+i-2} (-1)^j \frac{(j+1)^{i-2}}{i!} \binom{n-3}{i-1} \binom{n+i-2}{j} \binom{j+1}{n} = \frac{1}{n}, \quad n \geq 3. \quad (4)$$

Э. Райт доказал (см. [10]), что число помеченных бициклических блоков с n вершинами равно $(n-3)(n+2)/24$; при $k=2$ из (3) получим

$$\sum_{i=2}^{n-2} \sum_{j=n}^{n+i-2} (-1)^j \frac{(j+1)^{i-2}}{i!} \binom{n-3}{i-1} \binom{n+i-2}{j} \binom{j+1}{n+1} = \frac{(n-3)(n+2)}{12}, \quad n \geq 4. \quad (5)$$

Преобразуем тождества (4) и (5). Заменяем n на $n+2$; поскольку

$$\binom{n-1}{i-1} = \frac{i}{n} \binom{n}{i}, \quad \binom{j+1}{n+2} = \frac{j+1}{n+2} \binom{j}{n+1},$$

тождество (4) эквивалентно тождеству (1), а тождество (5) эквивалентно тождеству (2). $\square$

Дадим теперь не зависящее от перечисления графов доказательство тождеств (1) и (2).

Обозначим левую часть тождества (1) через $L(n)$. Поскольку $\binom{n}{k} = 0$ при $0 \leq n < k$, то нижний индекс во внутренней сумме можно заменить на 0. С помощью метода коэффициентов (см. [5, с. 8]) имеем

$$\frac{(j+1)^{i-1}}{(i-1)!} = \text{Coef}_z e^{(j+1)z} z^{-i},$$

$$L(n) = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \text{Coef}_z e^z z^{-i} \sum_{j=0}^{n+i} (-1)^j e^{jz} \binom{n+i}{j} \binom{j}{n+1}.$$

В силу комбинаторного тождества

$$\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \binom{j}{l} x^j = \binom{m}{l} x^l (1+x)^{m-l} \quad (6)$$

(см. [6, с. 625]) имеем

$$\begin{aligned} L(n) &= \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \text{Coef}_z e^z z^{-i} \binom{n+i}{n+1} (-1)^{n+1} e^{(n+1)z} (1-z)^{i-1} = \\ &= \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \binom{n+i}{n+1} (-1)^{n-1} \text{Coef}_z \frac{1}{z} e^{(n+2)z} \left(\frac{1-e^z}{z} \right)^{i-1}. \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$f(z) = e^{(n+2)z} \left(\frac{1-e^z}{z} \right)^{i-1}.$$

Функция $f(z)$ аналитична в нуле, и по формуле для вычета в полюсе первого порядка имеем

$$\text{Coef}_z \frac{f(z)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} f(z), \quad L(n) = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \binom{n+i}{n+1} (-1)^{n-1} (-1)^{i-1}.$$

Используем теперь комбинаторное тождество

$$\sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} \binom{a+i}{l} = (-1)^m \binom{a}{l-m} \quad (7)$$

(см. [8, с. 619]). Так как в $L(n)$ под знаком суммы второй биномиальный коэффициент равен нулю при $i = 0$, то окончательно получим

$$L(n) = (-1)^n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n+i}{n+1} (-1)^i = (-1)^n (-1)^n \binom{n}{1} = n.$$

Для тождества (2) опять с помощью метода коэффициентов имеем

$$L(n) = \sum_{i=2}^n \binom{n}{i} \text{Coef}_z e^z z^{-i} \sum_{j=0}^{n+i} (-1)^j e^{jz} \binom{n+i}{j} \binom{j}{n+2}.$$

В силу комбинаторного тождества (6) найдем

$$\begin{aligned} L(n) &= \sum_{i=2}^n \binom{n}{i} \text{Coef}_z e^z z^{-i} \binom{n+i}{n+2} (-1)^n e^{(n+2)z} (1-e^z)^{i-2} = \\ &= \sum_{i=2}^n \binom{n}{i} \binom{n+i}{n+2} (-1)^n \text{Coef}_z \frac{1}{z^2} e^{(n+3)z} \left(\frac{1-e^z}{z} \right)^{i-2}. \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$f(z) = e^{(n+3)z} \left(\frac{1-e^z}{z} \right)^{i-2}.$$

Функция $f(z)$ аналитична в нуле, и по формуле для вычета в полюсе второго порядка найдем

$$\begin{aligned} \text{Coef}_z \frac{f(z)}{z^2} &= \lim_{z \rightarrow 0} f'(z) = (n+3) e^{(n+3)z} \left(\frac{1-e^z}{z} \right)^{i-2} + \\ &+ (i-2) e^{(n+3)z} \left(\frac{1-e^z}{z} \right)^{i-3} \frac{-ze^z + e^z - 1}{z^2} = (-1)^i \left(n+3 + \frac{i-2}{2} \right), \\ L(n) &= \sum_{i=2}^n \binom{n}{i} \binom{n+i}{n+2} (-1)^{n+i} \left(n+2 + \frac{i}{2} \right) = L_1(n) + L_2(n). \end{aligned}$$

Еще раз применим комбинаторное тождество (7):

$$L_1(n) = (n+2) (-1)^n \sum_{i=2}^n \binom{n}{i} \binom{n+i}{n+2} (-1)^i = (n+2) \binom{n}{2}.$$

Так как $i \binom{n}{i} = n \binom{n-1}{i-1}$, в силу тождества (7) имеем

$$\begin{aligned} L_2(n) &= \frac{1}{2}(-1)^n \sum_{i=1}^n i \binom{n}{i} \binom{n+i}{n+2} (-1)^i = \\ &= \frac{n}{2}(-1)^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \binom{n+i+1}{n+2} (-1)^{i+1} = \frac{n}{2} \binom{n+1}{3}. \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$L(n) = (n+2) \binom{n}{2} + \frac{n}{2} \binom{n+1}{3} = \frac{1}{12} n(n-1)(n+3)(n+4).$$

Отметим, что для чисел помеченных последовательно-параллельных трициклических и тетрациклических блоков известны выражения в виде многочленов от числа вершин графа (см. [1] и [2], соответственно). Поэтому из формулы (3) при $k = 3$ и $k = 4$ можно получить еще два тождества типа (1). Однако степень многочленов от n в правой части тождеств быстро растет; при $k = 4$ она равна 9.

Автор благодарит профессора В. К. Леонтьева за обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воблый В. А., Мелешко А. К. О числе помеченных последовательно-параллельных трициклических блоков // Мат. XV Междунар. конф. «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия. Современные проблемы и приложения» (Тула, 28–31 мая 2018 г.)). — Тула: ТПГУ. — С. 168–170.
2. Воблый В. А. Число помеченных последовательно-параллельных тетрациклических блоков // Прикл. дискр. мат. — 2020. — № 47. — С. 57–61.
3. Воблый В. А. О перечислении помеченных последовательно-параллельных k -циклических 2-связных графов // Дискр. анал. исслед. опер. — 2021. — 28, № 1. — С. 7–14.
4. Зыков А. А. Основы теории графов. — М.: Наука, 1987.
5. Леонтьев В. К. Избранные задачи комбинаторного анализа. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001.
6. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Т. 1. — М.: Наука, 1981.
7. Bodirsky M., Gimenez O., Kang M., Noy M. Enumeration and limit laws of series-parallel graphs // Eur. J. Combin. — 2007. — 28, № 8. — P. 2091–2105.
8. Moon J. W. Counting Labelled Trees. — Can. Math. Monogr., 1970.
9. Raghavan S. Low-connectivity network design on series-parallel graphs // Networks. — 2004. — 43, № 3. — P. 163–176.
10. Wright E. M. The number of connected sparsely edged graphs. II. Smooth graphs and blocks // J. Graph Theory. — 1978. — 2, № 4. — P. 299–305.

Воблый Виталий Антониевич

Всероссийский институт научной и технической информации РАН, Москва

E-mail: vitvobl@yandex.ru