



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 208 (2022). С. 29–36
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-208-29-36

УДК 517.928

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА О ВОССТАНОВЛЕНИИ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТИ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ

© 2022 г. Э. В. КОРАБЛИНА, В. Б. ЛЕВЕНШТАМ

Аннотация. В работе рассматривается задача Коши для телеграфного уравнения. Младший коэффициент и правая часть уравнения осциллируют по времени с большой частотой, причём амплитуда младшего коэффициента мала — обратно пропорциональна частоте, а правая часть не известна. Исследован вопрос о её восстановлении по заданной в некоторой точке пространства трёхчленной асимптотике решения. При решении задачи используется неклассический алгоритм решения обратных коэффициентных задач с быстро осциллирующими по времени данными.

Ключевые слова: обратная задача, асимптотические методы, телеграфное уравнение, быстро осциллирующие данные.

ASYMPTOTIC PROBLEM OF RESTORING THE HIGH-FREQUENCY RIGHT-HAND SIDE OF THE TELEGRAPH EQUATION

© 2022 E. V. KORABLINA, V. B. LEVENSHTAM

ABSTRACT. In this paper, we consider the Cauchy problem for the telegraph equation. The lower coefficient and the right-hand side of the equation oscillate in time with a high frequency, the amplitude of the lower coefficient is small, namely, is inversely proportional to the frequency, and the right-hand side is unknown. We examine the problem on the recovery of the right-hand side from the three-term asymptotics of the solution given at some point in space. For this purpose, we use a nonclassical algorithm for solving inverse coefficient problems with rapidly oscillating data.

Keywords and phrases: inverse problem, asymptotic methods, telegraph equation, rapidly oscillating data.

AMS Subject Classification: 34D05

1. Введение. В работе рассматривается задача Коши для телеграфного уравнения. Младший коэффициент и правая часть уравнения осциллируют по времени с большой частотой ω , причём амплитуда младшего коэффициента мала — пропорциональна ω^{-1} , а правая часть не известна. (Термин «телеграфное уравнение» в данной работе можно заменить на «волновое уравнение с малым младшим членом».) Исследован вопрос о её восстановлении по заданной в некоторой точке пространства трёхчленной асимптотике решения (на самом деле, непосредственно задаётся принципиально меньше — подробнее об этом сказано в последнем абзаце введения). При решении задачи используется неклассический алгоритм решения обратных коэффициентных задач с быстро осциллирующими по времени данными (см. [1, 2, 10, 13, 14]).

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 20-11-20141).

В настоящее время теория обратных задач (включая задачу о восстановлении источника) разработана с большой полнотой (см., например, [3–6, 11, 15]). Однако задачи с быстро осциллирующими данными в классической теории не рассматривались. Вместе с тем обратные задачи для уравнений такого типа часто встречаются при математическом моделировании физических, химических и иных процессов, протекающих в средах с неизвестными характеристиками, подверженных высокочастотному воздействию электромагнитных, акустических, вибрационных и т. п. полей. Укажем некоторые примеры таких уравнений: уравнение теплопроводности для стержня, через который пропускается высокочастотный электрический ток, вследствие чего в стержне образуются высокочастотные тепловые источники; волновое уравнение, описывающее колебания стержня под действием высокочастотных внешних сил (вспомним знаменитую задачу В. Н. Челомея о высокочастотных сжатиях — растяжениях стержня, стабилизирующих его прямолинейную форму); уравнение переноса вещества в несжимаемой жидкости при наличии высокочастотных источников; уравнения тепловой конвекции жидкости в сосуде при его высокочастотных вибрациях (см. [7–9, 12]) и др.

В работах [1, 2, 10, 13, 14] и в данной работе используется новый подход к постановке и решению обратных коэффициентных высокочастотных задач, лежащий на стыке двух дисциплин — асимптотические методы и обратные задачи. В связи с этим решение обратной задачи разбито там на две части (этапы), относящиеся к соответствующим дисциплинам, и нужно следить за согласованностью (например, в смысле гладкости функций) указанных частей. В этих работах исследуются обратные задачи для эволюционных уравнений с неизвестным быстро осциллирующим источником (в [1, 2, 10, 13, 14] — начально-краевые задачи; в данной работе — задача Коши). Подчеркнём в заключение, что специфика используемого подхода к постановке обратной задачи состоит в следующем: здесь в условии переопределения участвует не точное решение, как в классике, а лишь его частичная асимптотика, длина которой вычисляется на первом этапе решения обратной задачи; при этом необходимая для условия переопределения информация задаётся не для всех коэффициентов этой асимптотики, а лишь для некоторых «базисных» (нужные сведения для остальных коэффициентов однозначно определяются из «базисных»). Так, в данной работе в постановке обратной задачи (в условии переопределения) участвуют коэффициенты трёхчленной асимптотики, вычисленные в фиксированной точке пространства — это функции $q(t)$, $\phi(t)$ и $\psi(t) + \chi(t, \omega t)$, но непосредственно задаются лишь функции $q(t)$ и $\chi(t, \tau)$. Поставленная обратная задача при этом однозначно разрешима.

2. Построение асимптотики. Пусть $T > 0$, $\Pi = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}, t \in [0, T]\}$ — полоса, $\Omega = \{(x, t, \tau) : (x, t) \in \Pi, \tau \in [0; \infty)\}$ — бесконечный прямоугольный параллелепипед. На множестве Π рассмотрим задачу Коши с большим параметром ω вида:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) + \frac{1}{\omega} a(x, t, \omega t) u(x, t) = f(x, t, \omega t) \\ u(x, t)|_{t=0} = 0 \\ u_t(x, t)|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $f(x, t, \tau)$ и $a(x, t, \tau)$ — вещественные функции, определённые и непрерывные на множестве Ω , 2π — периодические по τ . Символом $F(x, t)$ обозначим среднее функции $f(x, t, \tau)$ по τ :

$$F(x, t) = \langle f(x, t, \tau) \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, t, \tau) d\tau.$$

(Всюду в работе среднее вычисляется по переменной τ , $\tau = \omega t$). Пусть функция $F(x, t)$ непрерывна на Π вместе с двумя производными по x . Введём в рассмотрение функцию $\phi(x, t, \tau) = f(x, t, \tau) - F(x, t)$ и будем предполагать, что она непрерывна на множестве Ω и вместе с производной по x дифференцируема по (x, t) вплоть до 4-го порядка и все указанные производные непрерывны в Ω . Символом $A(x, t)$ обозначим среднее функции $a(x, t, \tau)$ по τ :

$$A(x, t) = \langle a(x, t, \tau) \rangle$$

и предположим, что функция $A(x, t)$ непрерывна на Π вместе с двумя производными по x . Далее введём в рассмотрение функцию $b(x, t, \tau) = a(x, t, \tau) - A(x, t)$ и предположим, что она три раза непрерывно дифференцируема по совокупности переменных (x, t) , причём все эти производные непрерывны на Ω .

Пусть $u_\omega(x, t)$ — решение задачи (1). Его асимптотику можно строить в виде ряда:

$$u_\omega(x, t) \sim u_0(x, t) + \frac{1}{\omega} u_1(x, t) + \frac{1}{\omega^2} (u_2(x, t) + v_2(x, t, \omega t)) + \dots + \frac{1}{\omega^k} (u_k(x, t) + v_k(x, t, \omega t)) + \dots, \quad (2)$$

где функции $u_k(x, t)$ и $v_k(x, t, \tau)$ определены и непрерывны в Π и Ω соответственно, а также дважды непрерывно дифференцируемы по x и по (t, τ) , причём $v_k(x, t, \tau) - 2\pi$ — периодические по τ с нулевым средним:

$$\langle v_k(x, t, \tau) \rangle = 0.$$

Для формулировки теоремы определим два типа линейных однозначно разрешимых задач. К первому отнесём задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка следующего вида:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 s(x, t, \tau)}{\partial \tau^2} = \psi(x, t, \tau), \\ s(x, t, \tau + 2\pi) = s(x, t, \tau), \\ \langle s(x, t, \tau) \rangle = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где $\psi(x, t, \tau)$ — определённая и непрерывная на множестве Ω функция, 2π — периодическая по $\tau \in [0; \infty)$ с нулевым средним. Как известно, решение задачи (3) имеет вид

$$s(x, t, \tau) = \int_0^\tau \left(\int_0^z \psi(x, t, s) ds - \left\langle \int_0^\tau \psi(x, t, s) ds \right\rangle \right) dz - \left\langle \int_0^\tau \left(\int_0^z \psi(x, t, s) ds - \left\langle \int_0^\tau \psi(x, t, s) ds \right\rangle \right) dz \right\rangle.$$

Ко второму типу отнесём задачу Коши для волнового уравнения второго порядка в полосе $(x, t) \in \Pi$ вида

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = g(x, t), \\ u(x, t)|_{t=0} = a(x), \\ u_t(x, t)|_{t=0} = b(x), \end{cases} \quad (4)$$

где функции $g(x, t)$ и $a(x)$, $b(x)$ определены и непрерывны в полосе Π и на $\mathbb{R}$ соответственно, причём $g(x, t)$ и $b(x)$ — непрерывно дифференцируемы по x и g_x непрерывна в Π , а $a(x)$ — дважды непрерывно дифференцируема. Решение задачи (4), как известно, выражается формулой Даламбера:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (a(x-t) + a(x+t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} b(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_0^t ds \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} g(\xi, s) d\xi.$$

Для любого положительного числа M определим прямоугольник $\Pi_M = \{(x, t) : |x| \leq M, t \in [0; T]\}$, а также введём в рассмотрение $(k+1)$ -членную, $k = 1, 2$, асимптотику решения задачи (1) (см. (2)):

$$u_\omega^k(x, t) = u_0(x, t) + \frac{1}{\omega} u_1(x, t) + \dots + \frac{1}{\omega^k} (u_k(x, t) + v_k(x, t, \omega t)).$$

Теорема 1. Для каждого $M > 0$ справедлива асимптотическая формула

$$\|u_\omega(x, t) - u_\omega^2(x, t)\|_{C(\Pi_M)} = O(\omega^{-3}), \quad \omega \rightarrow \infty,$$

где $u_n(x, t)$, $n = 0, 1, 2$, и $v_2(x, t, \tau)$ — решения задач типа (4) и (3) соответственно.

Доказательство. Подставим формально ряд (2) в уравнения (1):

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial t^2} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial t^2} + \\ & + \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v_2(x, t, \omega t)}{\partial t^2} + 2\omega \frac{\partial^2 v_2(x, t, \omega t)}{\partial t \partial \tau} + \omega^2 \frac{\partial^2 v_2(x, t, \omega t)}{\partial \tau^2} \right) - \\ & - \frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\omega} \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2(x, t, \omega t)}{\partial x^2} \right) + \\ & + \frac{1}{\omega} a(x, t, \omega t) \left[u_0(x, t) + \frac{1}{\omega} u_1(x, t) + \frac{1}{\omega^2} (u_2(x, t) + v_2(x, t, \omega t)) \right] + \dots = f(x, t, \omega t), \\ & \left[u_0(x, t) + \frac{1}{\omega} u_1(x, t) + \frac{1}{\omega^2} (u_2(x, t) + v_2(x, t, \omega t)) + \dots \right] \Big|_{t=0} = 0, \\ & \left[\frac{\partial u_0(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial v_2(x, t, \omega t)}{\partial t} + \omega \frac{\partial v_2(x, t, \omega t)}{\partial \tau} \right) + \dots \right] \Big|_{t=0} = 0. \end{aligned} \right.$$

В каждом из этих трёх последних равенств поочерёдно приравняем коэффициенты при степенях $\omega^0, \omega^{-1}, \omega^{-2}, \omega^{-3}$, а затем применим к полученным уравнениям операцию усреднения. В результате придём к следующему набору задач:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial x^2} = F(x, t), \\ & u_0(x, t)|_{t=0} = 0, \\ & \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0; \end{aligned} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 v_2(x, t, \tau)}{\partial \tau^2} = \phi(x, t, \tau), \\ & v_2(x, t, \tau + 2\pi) = v_2(x, t, \tau), \\ & \langle v_2(x, t, \tau) \rangle = 0; \end{aligned} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} = -A(x, t)u_0(x, t), \\ & u_1(x, t)|_{t=0} = 0, \\ & \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} + \frac{\partial v_2(x, t, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{t, \tau=0} = 0; \end{aligned} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 v_3(x, t, \tau)}{\partial \tau^2} = -2 \frac{\partial^2 v_2(x, t, \tau)}{\partial t \partial \tau} - b(x, t, \tau)u_0(x, t), \\ & v_3(x, t, \tau + 2\pi) = v_3(x, t, \tau), \\ & \langle v_3(x, t, \tau) \rangle = 0; \end{aligned} \right. \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x^2} = -A(x, t)u_1(x, t), \\ & u_2(x, t)|_{t=0} + v_2(x, t, \tau)|_{t, \tau=0} = 0, \\ & \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} + \frac{\partial v_2(x, t, \tau)}{\partial t} \Big|_{t, \tau=0} + \frac{\partial v_3(x, t, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{t, \tau=0} = 0; \end{aligned} \right. \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 v_4(x, t, \tau)}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 v_2(x, t, \tau)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v_2(x, t, \tau)}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial^2 v_3(x, t, \tau)}{\partial t \partial \tau} - b(x, t, \tau)u_1(x, t), \\ & v_4(x, t, \tau + 2\pi) = v_4(x, t, \tau), \\ & \langle v_4(x, t, \tau) \rangle = 0; \end{aligned} \right. \quad (10)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_3(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_3(x, t)}{\partial x^2} = -A(x, t)u_2(x, t) - \langle b(x, t, \tau)v_2(x, t, \tau) \rangle, \\ u_3(x, t)|_{t=0} + v_3(x, t, \tau)|_{t, \tau=0} = 0, \\ \frac{\partial u_3(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} + \frac{\partial v_3(x, t, \tau)}{\partial t} \Big|_{t, \tau=0} + \frac{\partial v_4(x, t, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{t, \tau=0} = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Положив

$$\hat{u}_\omega^3(x, t) = u_\omega^3(x, t) + \frac{1}{\omega^4}v_4(x, t, \omega t),$$

придём к задаче

$$\begin{cases} (\hat{u}_\omega^3(x, t))_{tt} - (\hat{u}_\omega^3(x, t))_{xx} + \frac{1}{\omega}a(x, t, \omega t) \hat{u}_\omega^3(x, t) = f(x, t, \omega t) + z(x, t, \omega t), \\ \hat{u}_\omega^3(x, t)|_{t=0} = w(x), \\ (\hat{u}_\omega^3(x, t))_t|_{t=0} = r(x), \end{cases} \quad (12)$$

где функции $z(x, t, \tau)$, $w(x)$ и $r(x)$ имеют вид

$$\begin{aligned} z(x, t, \tau) = & \frac{1}{\omega^3} \left(\frac{\partial^2 v_3(x, t, \tau)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v_3(x, t, \tau)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 v_4(x, t, \tau)}{\partial t \partial \tau} + \right. \\ & + [b(x, t, \tau) + A(x, t)](u_2(x, t) + v_2(x, t, \tau)) - A(x, t)u_2(x, t) - \langle b(x, t, \tau)v_2(x, t, \tau) \rangle \Big) + \\ & + \frac{1}{\omega^4} \left(\frac{\partial^2 v_4(x, t, \tau)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v_4(x, t, \tau)}{\partial x^2} + [b(x, t, \tau) + A(x, t)](u_3(x, t, \tau) + v_3(x, t, \tau)) \right) + \\ & + \frac{1}{\omega^5} [b(x, t, \tau) + A(x, t)]v_4(x, t, \tau), \\ w(x) = & \frac{1}{\omega^4}v_4(x, 0, 0), \quad r(x) = \frac{1}{\omega^4} \frac{\partial v_4(x, t, \tau)}{\partial t} \Big|_{t, \tau=0}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекают следующие асимптотические равенства:

$$z(x, t, \tau) = O(\omega^{-3}), \quad \omega \rightarrow \infty, \quad (13)$$

равномерно относительно (x, t, τ) , $(x, t, \tau) \in \Omega_M$, где $\Omega_M = \{(x, t, \tau) : (x, t) \in \Pi_M, \tau \in [0; \infty)\}$;

$$w(x) = O(\omega^{-4}), \quad r(x) = O(\omega^{-4}), \quad \omega \rightarrow \infty, \quad (14)$$

равномерно относительно x , $|x| \leq M$.

Согласно неравенству треугольника

$$\|u_\omega(x, t) - \hat{u}_\omega^2(x, t)\|_{C(\Pi_M)} \leq \|u_\omega(x, t) - \hat{u}_\omega^3(x, t)\|_{C(\Pi_M)} + \|\hat{u}_\omega^3(x, t) - \hat{u}_\omega^2(x, t)\|_{C(\Pi_M)}. \quad (15)$$

Оценим каждое из слагаемых правой части (15). Очевидно, что

$$\|\hat{u}_\omega^3(x, t) - \hat{u}_\omega^2(x, t)\|_{C(\Pi_M)} = O(\omega^{-3}), \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Разность $v_\omega(x, t) \equiv u_\omega(x, t) - \hat{u}_\omega^3(x, t)$ представим следующим образом:

$$\begin{aligned} v_\omega(x, t) = & -\frac{1}{2} \int_0^t ds \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} z(\xi, s) d\xi - \\ & - \frac{1}{2} (w(x-t) + w(x+t)) - \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} r(\xi) d\xi - \frac{1}{2\omega} \int_0^t ds \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} a(\xi, s, \omega s) v_\omega(\xi, s) d\xi. \end{aligned}$$

Отсюда и из (13), (14) следует, что

$$\|v_\omega(x, t)\|_{C(\Pi_M)} = O(\omega^{-3}), \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Из (15)–(17) при любом фиксированном $M > 0$ получим:

$$\|u_\omega(x, t) - u_\omega^2(x, t)\|_{C(\Pi_M)} = O(\omega^{-3}), \quad \omega \rightarrow \infty.$$

Теорема 1 доказана. $\square$

3. Обратная задача. Пусть T , Ω и Π — те же, что в пункте 2. В полосе Π рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) + \frac{1}{\omega} a(x, t, \omega t) u(x, t) = f(x, t) r(t, \omega t), \\ u(x, t)|_{t=0} = 0, \\ u_t(x, t)|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Относительно функций $a(x, t, \tau)$, $f(x, t)$ и $r(t, \tau)$ сделаем следующие предположения. Функция $f(x, t)$ определена на Π и вместе с производной по x непрерывно дифференцируема по (x, t) вплоть до 4-го порядка. Функция $a(x, t, \tau)$ определена и непрерывна на множестве Ω и 2π -периодична по τ . Функция $A(x, t) = \langle a(x, t, \tau) \rangle$ непрерывна на Π вместе с двумя производными по x . Функция $b(x, t, \tau) = a(x, t, \tau) - A(x, t)$ определена на множестве Ω , три раза непрерывно дифференцируема по совокупности переменных (x, t) и все эти производные непрерывны на Ω . Функция $r(t, \tau)$ определена и непрерывна на множестве $Q = \{(t, \tau) : t \in [0, T], \tau \in [0; \infty)\}$ и 2π -периодична по τ . Положим $r(t, \tau) = r_0(t) + r_1(t, \tau)$, где $r_0(t) = \langle r(t, \tau) \rangle$. Пусть функция $r_0(t)$ непрерывна на отрезке $[0; T]$, а $r_1(t, \tau)$ имеет на Q непрерывные производные по переменной t вплоть до четвертого порядка. Функцию $r(t, \tau)$, удовлетворяющую указанным выше условиям, будем называть функцией класса (I). В этом пункте будем считать её неизвестной.

Пусть заданы следующие объекты: точка x_0 , для которой $f(x_0, t) \neq 0$, $t \in [0, T]$; функция $q \in C^2([0; T])$ и удовлетворяющая условию $q(0) = q'(0) = 0$; функция $\chi(t, \tau)$, непрерывная на множестве Q , 2π -периодическая по τ с нулевым средним и дважды непрерывно дифференцируемая по переменной τ , причём $\chi''_{\tau^2}(t, \tau)$ имеет непрерывные на Q производные по переменной t вплоть до четвёртого порядка. Отметим следующий факт, который докажем позже: задача (5) с $F = f r_0$ при дополнительном условии $u_0(x_0, t) = q(t)$ имеет единственное решение $r_0(t)$. Теперь введём в рассмотрение ещё две функции

$$\phi(t) = \tilde{u}_1(x_0, t), \quad \psi(t) = \tilde{u}_2(x_0, t),$$

где $\tilde{u}_1(x, t)$, $\tilde{u}_2(x, t)$ — решения задач (7)–(9), в которых положено

$$v_2(x, t, \tau) = \frac{f(x, t) \chi(t, \tau)}{f(x_0, t)},$$

$$\begin{aligned} v_3(x, t, \tau) = & - \int_0^\tau \left(\int_0^z \left[2 \frac{\partial^2 v_2(x, t, s)}{\partial t \partial \tau} + b(x, t, s) u_0(x, t) \right] ds + \left\langle \int_0^\tau \left[2 \frac{\partial^2 v_2(x, t, s)}{\partial t \partial \tau} + b(x, t, s) u_0(x, t) \right] ds \right\rangle \right) dz + \\ & + \left\langle \int_0^\tau \left(\int_0^z \left[2 \frac{\partial^2 v_2(x, t, s)}{\partial t \partial s} + b(x, t, \tau) u_0(x, t) \right] ds + \left\langle \int_0^\tau \left[2 \frac{\partial^2 v_2(x, t, s)}{\partial t \partial \tau} + b(x, t, s) u_0(x, t) \right] ds \right\rangle \right) dz \right\rangle, \end{aligned}$$

где $u_0(x, t)$ — решение задачи (5) с правой частью $f(x, t) r_0(t)$.

Определение. Задачу о нахождении функции $r(t, \tau)$ класса (I), при которой решение задачи (18) на отрезке (x_0, t) , $t \in [0, T]$, удовлетворяет условию

$$\left\| u_\omega(x_0, t) - q(t) - \frac{1}{\omega} \phi(t) - \frac{1}{\omega^2} (\psi(t) + \chi(t, \omega t)) \right\|_{C([0, T])} = O(\omega^{-3}), \quad \omega \rightarrow \infty, \quad (19)$$

будем называть обратной задачей.

Теорема 2. *Обратная задача имеет единственное решение.*

Доказательство. Согласно теореме 1 решение задачи Коши (18) при известной функции r класса (I) удовлетворяет условию

$$\left\| u_\omega(x, t) - u_0(x, t) - \frac{1}{\omega} u_1(x, t) - \frac{1}{\omega^2} (u_2(x, t) + v_2(x, t, \omega t)) \right\|_{C(\Pi_M)} = O(\omega^{-3}), \quad \omega \rightarrow \infty,$$

где u_i, v_i — те же, что в п. 2. Отсюда, с учётом (19), следует асимптотическая формула

$$\begin{aligned} u_0(x_0, t) + \frac{1}{\omega} u_1(x_0, t) + \frac{1}{\omega^2} (u_2(x_0, t) + v_2(x_0, t, \omega t)) = \\ = q(t) + \frac{1}{\omega} \phi(t) + \frac{1}{\omega^2} (\psi(t) + \chi(t, \omega t)) + O(\omega^{-3}). \end{aligned} \quad (20)$$

Приравняв коэффициенты при степенях $\omega^0, \omega^{-1}, \omega^{-2}$ в равенстве (20). Отсюда, используя операцию усреднения по $\tau, \tau = \omega t$, получим равенства:

$$\begin{aligned} (a) \quad u_0(x_0, t) &= q(t), & (b) \quad u_1(x_0, t) &= \phi(t), \\ (c) \quad u_2(x_0, t) &= \psi(t), & (d) \quad v_2(x_0, t, \tau) &= \chi(t, \tau). \end{aligned} \quad (21)$$

В силу п. 2

$$u_0(x_0, t) = \frac{1}{2} \int_0^t r_0(s) \int_{x_0-(t-s)}^{x_0+(t-s)} f(\xi, s) d\xi ds.$$

Отсюда и из (21)(a) следует равенство

$$q(t) = \frac{1}{2} \int_0^t r_0(s) \int_{x_0-(t-s)}^{x_0+(t-s)} f(\xi, s) d\xi ds.$$

Продифференцировав его дважды по t , получим уравнение Вольтерра второго рода

$$q''(t) = r_0(t)f(x_0, t) + \frac{1}{2} \int_0^t r_0(s)[f'_x(x_0 + (t-s), s) - f'_x(x_0 - (t-s), s)]ds,$$

из которого следует существование и единственность решения $r_0 \in C([0, T])$. Теперь продифференцируем (21)(d) по переменной τ дважды. В силу (6) получим

$$f(x_0, t)r_1(t, \tau) = \frac{\partial^2 \chi(t, \tau)}{\partial \tau^2}.$$

Таким образом, функция $r_1(t, \tau)$ также определяется единственным образом. В силу условий, наложенных на функции $q(t)$ и $\chi(t, \tau)$, полученная функция $r(t, \tau) = r_0(t) + r_1(t, \tau)$ принадлежит классу (I).

Нетрудно показать, что при найденной функции $r(t, \tau)$ решение задачи Коши (18) удовлетворяет требуемой асимптотической формуле (19). Теорема 2 доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабич П. В., Левенштам В. Б. Восстановление быстро осциллирующего свободного члена в многомерном гиперболическом уравнении// Мат. заметки. — 2018. — 104, № 4. — С. 489–497.
2. Бабич П. В., Левенштам В. Б., Прика С. П. Восстановление быстро осциллирующего источника в уравнении теплопроводности по асимптотике решения// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2017. — 57, № 12. — С. 1955–1965.
3. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. — М.: Физматлит, 2007.
4. Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач. — М.: Наука, 1994.
5. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи. — Новосибирск, 2008.

6. *Лавретьев М. М., Резницкая К. Г., Яхно В. Г.* Одномерные обратные задачи математической физики. — Новосибирск: Наука, 1982.
7. *Левенштам В. Б.* Метод усреднения в задаче конвекции при высокочастотных наклонных вибрациях // Сиб. мат. ж. — 1996. — 37, № 5. — С. 1103–1116.
8. *Левенштам В. Б.* Асимптотическое интегрирование задачи о вибрационной конвекции // Диффер. уравн. — 1998. — 34, № 4. — С. 523–532.
9. *Левенштам В. Б.* Асимптотическое разложение решения задачи о вибрационной конвекции // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2000. — 40, № 9. — С. 1416–1424.
10. *Левенштам В. Б.* Параболические уравнения с большим параметром. Обратные задачи // Мат. заметки. — 2020. — 107, № 3. — С. 412–425.
11. *Романов В. Г.* Обратные задачи математической физики. — М.: Наука, 1984.
12. *Симоненко И. Б.* Обоснование метода усреднения для задачи конвекции в поле быстро осциллирующих сил и для других параболических уравнений // Мат. сб. — 1972. — 87, № 2. — С. 236–253.
13. *Babich P. V., Levenshtam V. B.* Direct and inverse asymptotic problems high-frequency terms // Asympt. Anal. — 2016. — 97. — P. 329–336.
14. *Babich P. V., Levenshtam V. B.* Inverse problem in the multidimensional hyperbolic equation with rapidly oscillating absolute term // in: Operator Theory and Differential Equations (*Kusraev A. G., Totieva Zh. D.*, eds.). — Birkhäuser, 2021. — P. 7–25.
15. *Prilepko A. U., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. — New York: Marsel Dekker, 2000.

Кораблина Элла Викторовна

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва;

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

E-mail: ellakorablina1998@gmail.com

Левенштам Валерий Борисович

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва;

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

E-mail: vlevenshtam@yandex.ru