ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 208 (2022). С. 37–48
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-208-37-48

УДК 517.925

КАЧЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА НА ГРАФАХ

© 2022 г. **Р. Ч. КУЛАЕВ, А. А. УРТАЕВА**

Посвящается памяти Александра Дмитриевича Баева

Аннотация. В работе изучаются свойства решений дифференциальных уравнений четвертого порядка на геометрических графах (положительность, колеблемость, распределение нулей). Доказаны теоремы о перемежаемости нулей решений, разработана теория неосцилляции. Определение неосцилляции для уравнения четвертого порядка на графе базируется на введенном в работе понятии двойной зоны знакопостоянства. Новый подход позволяет обобщить основные принципы теории неосцилляции уравнений второго порядка на графе на уравнения четвертого порядка.

Ключевые слова: осцилляционность, уравнение на графе, уравнение четвертого порядка.

QUALITATIVE PROPERTIES OF SOLUTIONS TO FOURTH-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS ON GRAPHS

© 2022 **R. Ch. KULAEV, A. A.URTAEVA**

Abstract. In this paper, we examine properties of solutions to fourth-order differential equations on geometric graphs (positivity, oscillatory behavior, distribution of zeros, etc.). We prove theorems on alternation of zeros of solutions and develop the theory of nonoscillation. The definition of nonoscillation for fourth-order equations on graphs is based on the concept of a double constancy zone introduced in the paper. The new approach allows one to generalize the basic principles of the theory of nonoscillation of second-order equations on a graph to fourth-order equations.

Keywords and phrases: oscillation, graph equation, fourth-order equation.

AMS Subject Classification: 34C10, 34B45

1. Введение. В статье устанавливаются теоремы о перемежаемости нулей решений дифференциальных уравнений четвертого порядка на геометрических графах и развиваются основные факты теории неосцилляции для таких уравнений. В классической теории уравнение n-го порядка называется неосциллирующим на интервале $I \subset \mathbb{R}$, если любое из его нетривиальных решений имеет не более $n-1$ нулей (с учетом кратности), см. [8,16]. Вопрос о неосцилляции дифференциального уравнения занимает центральное место в качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений [2, 7–9, 12, 13, 15]. Это свойство лежит в основе изучения осцилляционных свойств спектра дифференциальных операторов и положительности функции Грина некоторых классов краевых задач. Так, например, для уравнения второго порядка на интервале (a, b) неосцилляция эквивалентна, с одной стороны, существованию решения уравнения, положительного на полуоткрытом интервале $[a, b)$, а с другой стороны, чтобы функция Грина для задачи Дирихле была положительной.

Свойство неосцилляции уравнения второго порядка на графе базируется на понятии S-зоны, являющейся аналогом промежутка между соседними нулями непрерывной на отрезке функции (см. [9, 12]). Для непрерывной на графе функции под S-зоной понимается любой подграф, на котором функция не имеет нулей и на границе которого она равна нулю (более точное определение будет дано ниже). Уравнение второго порядка на графе называется неосциллирующим, если любое его нетривиальное решение не имеет S-зон на графе. Замена в определении неосцилляции уравнения второго порядка «числа нулей» на «число S-зон» позволила получить для уравнения второго порядка на графе точный аналог теории неосцилляции уравнения на отрезке — аналоги теорем сравнения Штурма и критерия неосцилляции Валле-Пуссена. При этом, как и в случае уравнения на отрезке, условия неосцилляции уравнения второго порядка на графе оказались эквивалентны, с одной стороны, положительности решений специальных задач Дирихле, а с другой стороны — положительности функции Грина задачи Дирихле.

Уравнения четвертого порядка на графах изучены гораздо меньше. Практически все исследования в этом направлении относятся к системам стержней: Эйлера—Бернулли на ребрах и различные условия соединения в узлах [3, 14, 18]. Несмотря на кажущуюся простоту формулировок, даже модели физического происхождения оказываются весьма трудными для анализа. Первые попытки развития теории неосцилляции для уравнений четвертого порядка на графах были предприняты в [3–6]. В этих работах определение неосцилляции давалось в терминах знакопостоянства специальной фундаментальной системы решений уравнения.

В данной статье мы предлагаем иной подход к определению неосцилляции дифференциальных уравнений четвертого порядка на графах. Для этого вводится понятие двойной S-зоны. На этом пути устанавливаются аналоги классической теоремы о разделении нулей решений дифференциального уравнения четвертого порядка [19, Гл. 3], [17]. Также устанавливается эквивалентность определений неосцилляции в терминах двойной S-зоны и в терминах знаковых свойств специальной фундаментальной системы решений уравнения. Такой подход также позволяет установить связь свойства неосцилляции уравнения четвертого порядка на графе и положительности функции Грина краевой задачи Дирихле.

2. Основные определения и обозначения. Под геометрическим графом Γ в настоящей работе понимается ограниченное связное множество, имеющее структуру сети и вложенное в $\mathbb{R}^2$. Ребро графа — это интервал в $\mathbb{R}^2$, а вершина графа — точка, являющаяся концом одного или нескольких ребер. При этом ребра графа занумерованы и обозначаются через γ_i, а вершины — через a, b, c.

Обозначим через $V(\Gamma)$ множество всех вершин графа, а через $J(\Gamma)$ — множество вершин графа, которые являются концевыми точками двух и более ребер. Такие вершины мы называем внутренними. Вершины графа, не принадлежащие $J(\Gamma)$, будем называть граничными и обозначать их множество через $\partial\Gamma$. Мы считаем, что граф Γ — это объединение множества всех его ребер $\{\gamma_i\}_{i=1}^N$ и множества всех внутренних вершин $J(\Gamma)$. При этом граничные вершины в граф не входят. Если вершина a является концевой точкой ребра γ_i, то будем говорить, что ребро γ_i примыкает к вершине a. Множество индексов всех ребер, примыкающих к вершине a, обозначим $I(a)$. Множество, получаемое удалением из графа всех его вершин, обозначим через $E(\Gamma)$. Подграфом графа Γ назовем любое связное подмножество графа Γ.

Замечание 1. Всюду в данной работе мы считаем, что $\partial\Gamma \neq \varnothing$.

Под функцией на графе понимается отображение $u\colon \Gamma \to \mathbb{R}$. Через $u_i(x)$ будем обозначать сужение функции $u(x)$ на ребро γ_i. Если a — граничная вершина графа Γ, то под $u(a)$ понимается

$$\lim_{\gamma_i \ni x \to a} u_i(x), \quad i \in I(a).$$

Через $C[\Gamma]$ будем обозначать пространство функций, равномерно непрерывных на каждом ребре графа Γ. Для таких функций в каждой вершине $a \in J(\Gamma)$ при $i \in I(a)$ существует предел

$$\lim_{\gamma_i \ni x \to a} u_i(x),$$

который мы также обозначаем через $u_i(a)$. При этом величины $u_k(a)$ и $u_i(a)$ не обязаны совпадать при $k \neq i$ $(k, i \in I(a))$. Выделим в пространстве $C[\Gamma]$ подпространство функций, для которых

$u_k(a) = u(a)$ при любой $a \in J(\Gamma)$ и любом $k \in I(a)$. Множество всех таких функций обозначим через $C(\Gamma)$ и назовем их непрерывными на графе.

Определим понятие производной функции, заданной на графе. Для этого введем в рассмотрение функцию $\mu(x) \in C[\Gamma]$, взаимно однозначно отображающую каждое ребро $\gamma_i \subset \Gamma$ на некоторый интервал $(0, l_i) \subset \mathbb{R}$ при $l_i > 0$. Функцию $\mu(x)$ будем называть метрической, а величину l_i — длиной ребра γ_i. Для сужения функции $\mu(x)$ на ребро γ_i существует обратное отображение $x(\mu)$ интервала $(0, l_i)$ на ребро γ_i. Метрическая функция определяет на каждом ребре графа ориентацию. Более того, она позволяет ввести для точек, принадлежащих замыканию одного и того же ребра графа, отношение порядка, а также понятие окрестности точки графа. Именно, для $x_1, x_2 \in \overline{\gamma}_i$ будем писать $x_1 < x_2$ (или $x_1 \leqslant x_2$), если $\mu(x_1) < \mu(x_2)$ (или $\mu(x_1) \leqslant \mu(x_2)$). Следует отметить, что при такой упорядоченности точки, принадлежащие разным ребрам, не сравнимы. Назовем окрестностью точки $x_0 \in \Gamma \cup \partial\Gamma$ множество всех точек графа Γ, для которых $|\mu(x) - \mu(x_0)| < \varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$. Заметим, что при нашем определении окрестность граничной вершины по сути является полуокрестностью и не содержит саму граничную вершину.

Функцию $u(x) \in C[\Gamma]$ назовем дифференцируемой на графе Γ, если для каждого ребра $\gamma_i \subset \Gamma$ ее сужение $u_i(x)$ дифференцируемо относительно $\mu_i(x)$. При этом полагаем

$$u_i'(x) = du_i(x)/d\mu_i(x) = \lim_{\Delta\mu_i(x)\to 0} \frac{\Delta u_i(x)}{\Delta \mu_i(x)}, \quad x \in \gamma_i.$$

Аналогично определяются производные высших порядков. В дальнейшем при записи условий связи с производными в вершинах графа нам будет удобно использовать производные по направлению «от вершины», которые мы будем обозначать $u_{i\nu}^{(k)}(a)$ (одномерный аналог производных по внутренней нормали). Отметим, что для четной производной ориентация не важна, и поэтому, для краткости, вместо $u_{i\nu}''(a)$ мы пишем просто $u_i''(a)$. Обозначим через $C^n[\Gamma]$ пространство функций $u(x) \in C[\Gamma]$, производные которых до порядка n включительно существуют и принадлежат пространству $C[\Gamma]$, а через $C^n(\Gamma)$ обозначаем $C^n[\Gamma] \cap C(\Gamma)$.

3. Постановка задачи. Нами будет рассматриваться однородное дифференциальное уравнение

$$Lu = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{1}$$

заданное на геометрическом графе Γ. При этом под дифференциальным уравнением (1) на графе мы подразумеваем, следуя [12], набор обыкновенных дифференциальных уравнений на ребрах графа и набор условий согласования во внутренних вершинах.

В данной работе мы рассматриваем уравнение, порождаемое совокупностью дифференциальных уравнений на ребрах графа

$$(p_i(x)u_i'')'' - r_i(x)u = 0, \quad x \in \gamma_i \subset E(\Gamma), \tag{2}$$

с коэффициентами, определяемыми функциями $p(x) \in C^2[\Gamma]$,

$$\inf_{x \in E(\Gamma)} p(x) > 0,$$

$r(x) \in C[\Gamma]$, $r(x) > 0$ на Γ, дополняемой в каждой внутренней вершине $a \in J(\Gamma)$ равенствами

$$u_i(a) = u_k(a), \quad \beta(a)u_i''(a) - \vartheta(a)u_{i\nu}'(a) = 0, \quad i, k \in I(a), \tag{3}$$

в которых коэффициенты $\beta(a)$, $\vartheta(a)$ неотрицательны и не равны одновременно нулю[1], и условием с третьими производными

$$\sum_{i \in I(a)} (p_i(a)u_i(a)'')_\nu' - r(a)u(a) = 0, \quad a \in J(\Gamma). \tag{4}$$

Решением дифференциального уравнения (1) будем называть всякую функцию $u(x) \in C^4(\Gamma)$, удовлетворяющую на каждом ребре графа соответствующему обыкновенному дифференциальному уравнению (2), а в каждой внутренней вершине — условиям (3), (4).

[1]Всюду далее в условиях на производные вида (3) мы будем считать выполненными аналогичные условия на коэффициенты, не оговаривая этого.

Если в соотношениях (2), (4) коэффициент $r(x) \equiv 0$, то рассматриваемое уравнение описывает малые упругие деформации плоской стержневой системы, узлы которой образованы в результате упруго-шарнирного соединения двух и более стержней. Такое уравнение изучалось в работах [1, 10, 11, 14]. В указанных работах были рассмотрены вопросы разрешимости некоторых краевых задач для этого уравнения и установлен принцип максимума, на основе которого удалось доказать положительную обратимость краевой задачи и положительность ее функции Грина.

Во всех дальнейших рассмотрениях мы полагаем $r(x) > 0$ на Γ. По этому поводу стоит отметить, что даже в классическом случае — на отрезке — свойства решений уравнения (2) существенно разнятся. Для нас изучение качественных свойств решений уравнения (1) представляет интерес в контексте изучения спектральных (и, в частности, осцилляционных) свойств соответствующего дифференциального оператора, моделирующего колебания стержневой системы. Поэтому первостепенный интерес представляет случай с положительным коэффициентом $r(x)$.

4. Теоремы о перемежаемости нулей.

Лемма 1 (см. [19]). *Пусть $u(x)$ — нетривиальное решение уравнения*

$$(p(x)u'')'' - r(x)u = 0, \quad x \in [a,b] \subset \mathbb{R}, \tag{5}$$

в котором $p(x) \in C^2[a,b]$ и $p(x), r(x) > 0$ на $[a,b]$. Если u, u', u'' и $(pu'')'$ неотрицательны в точке a, то все эти функции положительны на $(a,b]$.

Следствие 1 (см. [19]). *Если функция $u(x)$ та же, что и в лемме 1, а значения функций u, $-u'$, u'' и $-(pu'')'$ неотрицательны в точке b, то все эти функции положительны на $[a,b)$.*

Следствие 2. *Пусть $u(x)$ — нетривиальное решение уравнения (5), удовлетворяющее условию $u(b)(\beta u_i''(b) + \vartheta u_i'(b)) = 0$, где $\beta, \vartheta \geqslant 0$, $\beta + \vartheta > 0$. Тогда среди значений $u(a)$, $u'(a)$, $u''(a)$ и $(pu'')'(a)$ по крайней мере два отличны от нуля.*

Следствие 3. *Пусть $u(x)$ — нетривиальное решение уравнения (5), удовлетворяющее граничным условиям*

$$u(a)(\beta(a)u_i''(a) - \vartheta(a)u_i'(a)) = 0, \quad u(b)(\beta(b)u_i''(b) + \vartheta(b)u_i'(b)) = 0. \tag{6}$$

Тогда в любой точке $x^* \in [a,b]$ среди значений $u(x^*)$, $u'(x^*)$, $u''(x^*)$, $(pu'')'(x^*)$ по крайней мере два имеют различные знаки.

Следствие 4. *Пусть $u(x)$ — решение уравнения (5), удовлетворяющее условиям (6). Если $u(a) = 0$, то $u'(a)(pu'')'(a) \leqslant 0$ и $u''(a)(pu'')'(a) \leqslant 0$, причем одновременное выполнение равенств влечет тождество $u(x) \equiv 0$.*

Следствие 5. *Пусть уравнение (5) имеет положительное на $[a,b]$ решение, удовлетворяющее условиям (6). Тогда любое решение уравнения (5), удовлетворяющее тем же краевым условиям, имеет не более одного (с учетом кратности) нуля на $[a,b]$.*

Лемма 2. *Пусть $u(x)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее в каждой граничной вершине графа условию*

$$u(a)\left(\beta(a)u_i''(a) - \vartheta(a)u_{i\nu}'(a)\right) = 0, \quad a \in \partial\Gamma. \tag{7}$$

Если в некоторой точке $x^* \in \gamma_i \subset \Gamma$ выполнены равенства $u_i(x^*) = u_i'(x^*) = 0$, то $u_i(x) \equiv 0$.

Доказательство следует из условий (3) для вторых производных, леммы 1 и её следствий.

Лемма 3. *Пусть $u(x)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (7). Если функция $u(x)$ равна нулю в вершине $b \in J(\Gamma)$ и знакопостоянна в некоторой окрестности этой вершины. Тогда $u(x) \equiv 0$ на всех ребрах, примыкающих к b.*

Доказательство. Пусть $u(x) \geqslant 0$ в некоторой окрестности вершины $b \in J(\Gamma)$. Тогда, учитывая (3), неравенства $u_{i\nu}'(b) \geqslant 0$, $u_i''(b) \geqslant 0$ для всех $i \in I(b)$ и следствие 4 получаем неравенство

$$(p_i u_i'')_\nu'(b) \leqslant 0 \tag{8}$$

для любого индекса $i \in I(b)$. Поскольку $u(x)$ — решение уравнения (1), то во внутренней вершине b выполнено условие согласования третьих квазипроизводных (4), которое вместе с (8) даёт равенства $(p_i u_i'')'(b) = 0$ для всех $i \in I(b)$. Тогда из того же следствия 4 получаем, что $u_i(x) \equiv 0$ для любого индекса $i \in I(b)$. □

Лемма 4. *Для любой граничной вершины $a \in \partial\Gamma$ существует такое решение $z_a(x)$ уравнения* (1), *что $z_a(x) \equiv 0$ на $\Gamma \setminus \gamma_a$, $z_a(x)$, $z_a'(x)$, $z_a''(x)$ и $(pz_a'')'(x)$ строго положительны на $\gamma_a \cup a$.*

Доказательство. Пусть b — внутренняя вершина графа смежная с $a \in \partial\Gamma$. Рассмотрим условие (3) для производных в вершине b, соответствующее граничному ребру $\gamma_a = (a, b)$. Без ограничения общности можно считать, что $\beta(b) > 0$. Пусть $z_a(x)$ — решение уравнения (5) на ребре γ_a, удовлетворяющее начальным условиям

$$z_a(b) = 0, \quad z_{a\nu}'(b) = 1, \quad z_a''(b) = \frac{\vartheta(b)}{\beta(b)}, \quad (pz_a'')'(b) = 0.$$

Доопределяя функцию $z_a(x)$ нулем на $\Gamma \setminus \gamma_a$ и привлекая лемму 1, получим решение уравнения (1) на Γ, обладающее всеми необходимыми свойствами. □

Из лемм 3, 4 вытекает следующее утверждение.

Следствие 6. *Пусть $u(x)$ — неотрицательное решение уравнения* (1), *имеющее нуль на внутреннем ребре графа Γ. Тогда*

$$u(x) = \sum c_a z_a(x),$$

где сумма берется по всем $a \in \partial\Gamma$, в которых $u_\nu'(a)u''(a) < 0$, а константы $c_a \geqslant 0$.

Следующая лемма и её следствия являются аналогами свойств уравнения второго порядка на графе [9, теорема 2.2.1, следствия 2.2.2 и 2.2.3].

Лемма 5. *Всякое знакопостоянное решение уравнения* (1), *удовлетворяющее в каждой вершине $a \in \partial\Gamma$ условию* (7), *либо равно тождественно нулю, либо не имеет нулей в Γ.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное решение $u(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию $u(x) \geqslant 0$ на Γ. Обозначим через $\mathfrak{S}$ множество нулей функции $u(x)$ в Γ. Если $\mathfrak{S} = \varnothing$, то $u(x) > 0$ на Γ и теорема верна.

Предположим, что $\mathfrak{S} \neq \varnothing$. Покажем, что множество $\mathfrak{S}$ является одновременно и открытым и замкнутым в Γ, откуда будет следовать, что $\mathfrak{S} = \Gamma$, т.е. $u(x) \equiv 0$ на Γ. Замкнутость $\mathfrak{S}$ следует из непрерывности функции $u(x)$ на $\overline{\Gamma}$. Покажем, что $\mathfrak{S}$ — открытое множество в Γ. Рассмотрим произвольную точку $\xi \in \mathfrak{S}$. Если $\xi \notin J(\Gamma)$, то из леммы 2 получаем, что $u(x) \equiv 0$ на всем ребре, содержащем ξ. Если же $\xi \in J(\Gamma)$, то из леммы 3 вытекает, что $u(x) \equiv 0$ на всех ребрах, примыкающих к ξ. Стало быть, ξ — внутренняя точка множества $\mathfrak{S}$, а $\mathfrak{S}$ — открытое множество в Γ. □

Определение 1. Точку экстремума функции мы называем *нетривиальной*, если в любой ее окрестности функция отлична от тождественной постоянной.

Следствие 7. *Пусть $u(x)$ — знакопостоянное решение уравнения* (1), *равное нулю на $\partial\Gamma$. Тогда для любого решения $v(x)$ того же уравнения, равного нулю $\partial\Gamma$ и неколлинеарного $u(x)$, отношение $v(x)/u(x)$ не может иметь внутри Γ нетривиальных локальных экстремумов.*

Доказательство. Поскольку функции $u(x)$ и $v(x)$ не коллинеарны, из леммы 5 следует $u(x) > 0$, $x \in \Gamma$. Следовательно, отношение $v(x)/u(x)$ определено в каждой точке $x \in \Gamma$. Пусть $x_0 \in \Gamma$ является точкой экстремума отношения $v(x)/u(x)$. Тогда функция $w(x) = u(x_0)v(x) - v(x_0)u(x)$ есть решение уравнения (1), равное нулю на $\partial\Gamma$ и знакопостоянное в некоторой окрестности точки x_0. Кроме того, $w(x_0) = 0$. Если $x_0 \in J(\Gamma)$, то из леммы 3 следует, что x_0 — точка тривиального экстремума. Если же $x_0 \in \Gamma \setminus J(\Gamma)$, то $w'(x_0) = 0$ и, как показывает лемма 2, $w(x) \equiv 0$ на всем ребре, которому принадлежит точка x_0. □

Следствие 8. *Пусть $u(x)$ — знакопостоянное решение уравнения* (1)*, равное нулю на $\partial\Gamma$. Тогда для любого решения $v(x)$ того же уравнения, равного нулю на $\partial\Gamma$ и неколлинеарного $u(x)$, отношение $v(x)/u(x)$ не может иметь внутри Γ точек глобального экстремума.*

Доказательство. Если предположить, что $x_0 \in \Gamma$ является точкой глобального экстремума отношения $v(x)/u(x)$, то функция $w(x) = u(x_0)v(x) - v(x_0)u(x)$, будучи нетривиальным решением уравнения (1), знакопостоянна на Γ и равна нулю в точке $x_0 \in \Gamma$ и на $\partial\Gamma$, что противоречит утверждению леммы 5. □

Замечание 2. В формулировке следствий 7 и 8 условие равенства нулю решений уравнения (1) в граничных вершинах (не обязательно во всех) можно заменить на условие

$$\beta(a)u_i''(a) - \vartheta(a)u_{i\nu}'(a) = 0, \quad a \in \partial\Gamma. \tag{9}$$

Теорема 1. *Пусть $u(x)$ — решение уравнения* (1)*, равное нулю на $\partial\Gamma$ и имеющее внутри графа S-зону Γ_0, $\Gamma_0 \subset\subset \Gamma$. Тогда любое знакопостоянное на Γ_0 решение $v(x)$ уравнения* (1)*, равное нулю на $\partial\Gamma$, коллинеарно $u(x)$ на Γ_0.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $u(x) > 0$ и $v(x) \geqslant 0$ на Γ_0, причем $v(x) \not\equiv 0$ на Γ_0. Тогда $v(x) > 0$ на Γ_0. Действительно, если предположить, что $v(x)$ равна нулю в некоторой точке подграфа Γ_0, то из лемм 2, 3 будет следовать, что $v(x) \equiv 0$ на Γ_0. Поскольку функция $v(x)$ удовлетворяет условиям (3) для производных, то из леммы 2 и её следствия 2 следует, что во всех точках из $\partial\Gamma_0$, в которых $v(x) = 0$, хотя бы одно из значений $v'(x)$ или $v''(x)$ не равно нулю. Это свойство позволяет определить функцию $u(x)/v(x)$, непрерывную на $\overline{\Gamma}_0$. Введем обозначение

$$\lambda = \max_{x\in\overline{\Gamma}_0}\{u(x)/v(x)\}$$

и рассмотрим решение $w(x) = \lambda v(x) - u(x)$ уравнения (1) на Γ_0. Очевидно, что $w(x) \geqslant 0$ на Γ_0 и существует такая точка $x_0 \in \overline{\Gamma}_0$, что $w(x_0) = w'(x_0) = 0$. Применяя к функции $w(x)$ леммы 2 и 3, легко убедиться, что $w(x) \equiv 0$ на Γ_0. □

Теорема 2 (о перемежаемости нулей)**.** *Пусть $u(x)$ — решение уравнения* (1)*, равное нулю на $\partial\Gamma$ и имеющее внутри графа S-зону Γ_0, $\Gamma_0 \subset\subset \Gamma$. Тогда любое решение $v(x)$ уравнения* (1)*, равное нулю на $\partial\Gamma$ и неколлинеарное $u(x)$ на Γ_0, меняет знак в Γ_0.*

Теорема 2 является аналогом теоремы о перемежаемости нулей для уравнения (5) на отрезке [17, теорема 3.1]: нули любых двух линейно независимых решений уравнения (5) на отрезке $[a, b]$, равных нулю на концах отрезка, перемежаются в (a, b).

Замечание 3. В формулировке теоремы 1 условия на границе графа могут быть заменены на условия (9). Такая замена избавляет от необходимости требования компактного вложения S-зоны $\Gamma_0 \subset\subset \Gamma$. Точнее, граничные вершины S-зоны Γ_0 могут содержаться в $\partial\Gamma$, если в этих вершинах условие равенства нулю двух решений заменить на условие (9). В частности, имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $u(x)$ — решение уравнения* (1)*, удовлетворяющее на $\partial\Gamma$ условиям* (9) *и имеющее S-зону Γ_0, $\Gamma_0 \subset \Gamma$. Тогда любое знакопостоянное на Γ_0 решение $v(x)$ уравнения* (1)*, удовлетворяющее на $\partial\Gamma$ тем же условиям* (9)*, коллинеарно $u(x)$ на Γ_0.*

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 1.

Следствие 9 (перемежаемость нулей)**.** *Пусть $u(x)$ — решение уравнения* (1)*, удовлетворяющее на $\partial\Gamma$ условиям* (9) *и имеющее S-зону Γ_0, $\Gamma_0 \subset \Gamma$. Тогда любое решение $v(x)$ уравнения* (1)*, удовлетворяющее на $\partial\Gamma$ тем же условиям* (9)*, и неколлинеарное $u(x)$ на Γ_0, меняет знак в Γ_0.*

5. Теория неосцилляции уравнения четвертого порядка на графе. Всюду в данной пункте мы будем считать, что $|\partial\Gamma| \geqslant 2$. Учитывая, что уравнение (1), порождаемое соотношениями (2)—(4), является модельным и описывает деформации стержневой системы с условиями упруго-шарнирного соединения, то такое ограничение является вполне естественным.

Введем в рассмотрение для каждой граничной вершины $a \in \partial\Gamma$ графа Γ по две краевые задачи

$$Lu = 0, \quad x \in \Gamma, \quad u(a) = 1, \quad u'(a) = 0, \quad u(b) = u'(b) = 0, \quad b \in \partial\Gamma \setminus a, \tag{10}$$

$$Lv = 0, \quad x \in \Gamma, \quad v(a) = 0, \quad v'(a) = 1, \quad v(b) = v'(b) = 0, \quad b \in \partial\Gamma \setminus a. \tag{11}$$

Если задачи разрешимы, то будем обозначать их решения через $u_a(x)$ и $v_a(x)$ соответственно.

Лемма 6. *Пусть для любой вершины $a \in \partial\Gamma$ существует положительное на Γ решение $u_a(x)$ краевой задачи* (10). *Тогда краевая задача* (12) *не вырождена.*

Доказательство. Предположим, что задача (11) имеет нетривиальное решение $u(x)$ при $f(x) \equiv 0$, $x \in \Gamma$, и рассмотрим функцию

$$v(x) = \sum_{a \in \partial\Gamma} u_a(x).$$

Функция $v(x)$ является положительным решением однородного уравнения (1) и удовлетворяет граничным условиям

$$v(a) = 1, \quad v'(a) = 0, \quad a \in \partial\Gamma.$$

Пусть

$$\lambda = \max_{x \in \overline{\Gamma}} \{u(x)/v(x)\}.$$

Тогда функция $w(x) = u(x) - \lambda v(x)$, будучи нетривиальным решением уравнения (1), знакопостоянна на Γ, удовлетворяет на границе графа условиям $w'(a) = 0$, $a \in \partial\Gamma$, и имеет внутри графа Γ точку нулевого экстремума, что противоречит утверждению леммы 5. □

Лемма 7. *Пусть для любой вершины $a \in \partial\Gamma$ существует положительное на Γ решение $u_a(x)$ краевой задачи* (10). *Тогда для любой вершины $a \in \partial\Gamma$ краевая задача* (11) *однозначно разрешима, а соответствующее решение $v_a(x)$ положительно на всем графе Γ и пропорционально $u_a(x)$ на $\Gamma \setminus \gamma_a$.*

Доказательство. Однозначная разрешимость задачи (11) следует из леммы 6. Покажем, что для произвольной вершины $a \in \partial\Gamma$ соответствующее решение $v_a(x)$ положительно на Γ. Действительно, если $v_a(x)$ меняет знак на Γ, то существует такая S-зона $\Gamma_0 \subset \Gamma$ функции $v_a(x)$, что $a \notin \partial\Gamma_0$. В этом случае функция

$$u(x) = \sum_{b \in \partial\Gamma \setminus a} u_b(x)$$

положительна на $\overline{\Gamma}_0$ и выполнены равенства

$$v_a(a) = u(a) = 0, \quad v_a'(b) = u'(b) = 0, \quad b \in \partial\Gamma \setminus a,$$

что противоречит утверждению леммы 5. Следовательно, $v_a(x) > 0$ на Γ и остается показать, что решения $v_a(x)$ и $u_a(x)$ пропорциональны на $\Gamma \setminus \gamma_a$.

Обозначим через b внутреннюю вершину графа, смежную с граничной вершиной a и рассмотрим функцию $w(x) = v_a(b)u_a(x) - u_a(b)v_a(x)$. Очевидно, что $w(x) = 0$ во всех граничных вершинах подграфа $\Gamma \setminus \gamma_a$. Если $w(x) \not\equiv 0$ на $\Gamma \setminus \gamma_a$, то $w(x)$ имеет S-зону в $\Gamma \setminus \gamma_a$ (быть может, совпадающую с $\Gamma \setminus \gamma_a$). Но тогда функции $w(x)$ и

$$u(x) = \sum_{c \in \partial\Gamma} u_c(x)$$

удовлетворяют на границе $\Gamma \setminus \gamma_a$ условиям

$$\beta_i(b)u_i''(b) - \vartheta_i(b)u_{i\nu}'(b) = 0, \quad i \in I(b), \quad u'(c) = 0, \quad c \in \partial\Gamma \setminus a,$$

и согласно следствию 9 функция $u(x)$ меняет знак на Γ, что противоречит условию $u_c(x) > 0$ на Γ при всех $c \in \partial\Gamma$. Следовательно, $w(x) \equiv 0$ на $\Gamma \setminus \gamma_a$, а поскольку значения $u_a(b)$ и $v_a(b)$ не равны нулю, то $v_a(x)$ и $u_a(x)$ пропорциональны на $\Gamma \setminus \gamma_a$. □

Замечание 4. Утверждения лемм 6, 7 останутся справедливыми, если в их формулировках поменять местами задачи (10), (11). Доказательство этого факта опирается на те же идеи.

Лемма 8. *Пусть $a, b \in \partial\Gamma$ и $u_a(x)$, $u_b(x)$ — решения соответствующих краевых задач* (10). *Тогда для любой граничной вершины $c \in \partial\Gamma \setminus \{a, b\}$ функции $u_a(x)$, $u_b(x)$ пропорциональны на граничном ребре γ_c.*

Доказательство. Если обе рассматриваемые функции нетривиальны на ребре γ_c, то из граничных условий $u(c) = u'(c) = 0$ следует, что их нетривиальная линейная комбинация $w(x)$ имеет в точке c тройной нуль и при этом удовлетворяет условиям (3) для производных во внутренней вершине, смежной с вершиной $c \in \partial\Gamma$. Тогда из следствия 4 получается $w(x) \equiv 0$ на γ_c. □

Определение 2. *S-Зоной* функции $u(x) \in C(\Gamma)$ будем называть такой подграф $\Gamma_0 \subset \Gamma$, что
- (i) $u(x) \neq 0$ на Γ_0;
- (ii) $u(x) = 0$ на $\partial\Gamma_0$;
- (iii) $u(x)$ имеет нуль на любом подграфе, для которого Γ_0 является собственным подмножеством.

Определение 3. *S^2-Зоной* функции $u(x) \in C^1(\Gamma)$ будем называть такой подграф $\Gamma_0 \subset \Gamma$, что
- (i) $u(x) \neq 0$ на Γ_0;
- (ii) существует такой подграф Γ_1, что $\Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \Gamma$ и $u(x) = 0$ на $\partial\Gamma_0 \cup \partial\Gamma_1$;
- (iii) $u'(x) = 0$ на $\partial\Gamma_0 \cap \partial\Gamma_1$.

Определение 4. Дифференциальное уравнение (1) и соответствующий дифференциальный оператор L, порождаемый соотношениями (2)—(4), назовем *неосциллирующими* на графе Γ, если любое нетривиальное решение этого уравнения не может иметь S^2-зоны в Γ.

Заметим, что данное определение неосциллирующего дифференциального уравнения на графе является полным аналогом неосцилляции в одномерном случае. Отсутствие S^2-зон у решения уравнения на $(a, b) \subset \mathbb{R}$ как раз означает, что решение на может иметь более трех нулей в (a, b).

Отметим также, что в определении 4 не допускается, чтобы сам граф Γ был S^2-зоной, когда однородное уравнение (1) имеет решение $u(x) \neq 0$ на Γ, удовлетворяющее граничным условиям $u(a) = u'(a) = 0$, $a \in \partial\Gamma$. Кроме того, из определения 4 следует, что для неосциллирующего на Γ оператора краевая задача

$$Lu = f(x), \quad x \in \Gamma, \quad u(a) = u'(a) = 0, \quad a \in \partial\Gamma, \tag{12}$$

невырожденна для любой правой части $f(x) \in C[\Gamma]$.

Теорема 4. *Следующие свойства эквивалентны*:
- (a) *каждая из задач* (10) *имеет положительное на Γ решение*;
- (b) *существует такое решение уравнения* (1) *$w(x)$, что $w'(a) = 0$, $a \in \partial\Gamma$, $\inf\limits_{x \in \overline{\Gamma}} w(x) > 0$*;
- (c) *существует положительное на Γ решение уравнения* (1), *удовлетворяющее граничным условиям $u'(a) = 0$, $a \in \partial\Gamma$, и не равное нулю хотя бы в одной вершине из $\partial\Gamma$*;
- (d) *каждая из задач* (11) *имеет положительное на Γ решение*;
- (e) *уравнение* (1) *не осциллирует на Γ.*

Доказательство. Импликации (a)⇒(b)⇒(c) очевидны. Соотношение (c)⇒(a) тоже почти очевидно. Действительно, из (c), теоремы 3 и следствия 9 вытекает невырожденность задачи (12). Следовательно, каждая из задач (10) однозначно разрешима. Положительность соответствующего решения опять же следует из (c) и следствия 9.

Эквивалентность (a)⇔(d) вытекает из леммы 7 и замечания 4. Импликация (c)⇒(d) следует из определения неосциллирующего уравнения. Действительно, если для некоторой вершины $a \in \partial\Gamma$

соответствующая функция $v_a(x)$ меняет знак на Γ, то любая ее S-зона, в которой $v_a(x) < 0$, является S^2-зоной.

Таким образом, для завершения доказательства теоремы остается установить импликацию (d)$\Rightarrow$(e). Доказательство этого факта проведем в предположении, что импликация неверна. Сначала мы построим решение уравнения (1), обладающее следующим свойством на Γ.

Свойство (A). Решение имеет S-зону на некотором подграфе $\Gamma^* \subset \Gamma$, удовлетворяя при этом в каждой вершине $b \in \partial\Gamma^*$ хотя бы одному из условий $u(b) = 0$ или $\beta(b)u''(b) - \vartheta(b)u'_\nu(b) = 0$ с коэффициентами $\beta(b), \vartheta(b) \geqslant 0$, $\beta(b) + \vartheta(b) \neq 0$.

Затем построим решение уравнения (1), положительное на Γ и удовлетворяющее в каждой вершине $b \in \partial\Gamma^*$ тому же условию, что и первое. Далее, привлекая теоремы 2 и 3 (см. также замечание 3), придем к противоречию.

Итак, предположим, что при выполнении условия (d) существует решение $u(x)$, имеющее в Γ S^2-зону, которую обозначим через Γ_0. Согласно лемме 6 задача (12) невырожденна. Поэтому $\Gamma_0 \neq \Gamma$. Если функция $u(x)$ обладает свойством (A) на Γ, то нужное нам решение уравнения (1) построено.

Рассмотрим ситуацию, когда $u(x)$ не обладает необходимым нам свойством. Такая ситуация возникает в двух случаях:

(1) $\Gamma_0 \subset \gamma_a$ для некоторой вершины $a \in \partial\Gamma$ и $u(a)u'(a) \neq 0$;

(2) найдется такое граничное ребро $\gamma_a = (a, a_1)$, $a \in \partial\Gamma$, $a_1 \in J(\Gamma)$, что $a_1 \in \Gamma_0$ и $u(a)u'(a) \neq 0$.

Рассмотрим первый случай. Введем в рассмотрение решение $z_a(x)$ уравнения (1), определенное в лемме 4. Из определения S^2-зоны Γ_0 следует, что функция $u(x)$ имеет на ребре γ_a не менее трех нулей. Сужение функции $w(x) = u(x) - u(a)z_a(a)/z_a(x)$ равно нулю в точке a, удовлетворяет условию $\beta(a_1)u''(a_1) - \vartheta(a_1)u'_\nu(a_1) = 0$ и имеет S-зону внутри $\Gamma_0 \subset \gamma_a$. Свойства на границе ребра γ_a очевидны, а вот наличие S-зоны внутри γ_a требует пояснений. Если, например, $w(x) < 0$ на γ_a, то существует такое число $\mu < u(a)/z_a(a)$, что функция $y(x) = u(x) - \mu z_a(x)$ имеет двойной нуль, скажем, $x_0 \in \gamma_a$, и еще хотя бы один нуль x_1 между a и x_0. Тогда $y(x_1) = y(x_0) = y'(x_0) = 0$ и $\beta(a_1)y''(a_1) - \vartheta(a_1)y'_\nu(a_1) = 0$, что противоречит следствию 5. Следовательно, $w(x)$ нужное нам решение с двумя нулями в Γ_0, а $\Gamma^* = \gamma_a$.

Перейдем к рассмотрению второго случая. Из определения S^2-зоны Γ_0 следует, что функция $u(x)$ имеет на полуинтервале $[a, a_1)$ по крайней мере два нуля x_1, x_2 (быть может, совпадающие). При этом $u(x) \neq 0$ на $[a, x_1)$, $x_2 \in \partial\Gamma_0$, а значит, $u(x) \neq 0$ на $(x_2, a_1]$. Если $u(x)$ имеет третий нуль на γ_a, то получается случай, рассмотренный выше. Поэтому будем считать, что других нулей на γ_a функция $u(x)$ не имеет. Как и выше, рассмотрим решение $z_a(x)$ уравнения (1), определенное в лемме 4 и построим новое решение $w(x) = u(x) - u(a)z_a(a)/z_a(x)$ уравнения (1). Функция $w(x)$ равна нулю в вершине a, имеет нуль $x^* \in (x_2, a_1] \subset \gamma_a$ и совпадает с $u(x)$ на $\Gamma \setminus \gamma_a$. Стало быть, $w(x)$ имеет S^2-зону в Γ_0 и $w(a) = 0$. Поэтому мы можем начать наши рассуждения с начала, но применительно к решению $w(x)$. Поскольку граф Γ имеет конечное число ребер, то через конечное число итераций мы построим решение, для которого выполнено свойство (A).

Пусть $u(x)$ — найденное нами решение и Γ^* — соответствующий подграф, содержащий S^2-зону Γ_0. Представим границу подграфа Γ^* в виде дизъюнктного объединения $\partial\Gamma^* = \partial\Gamma_1^* \sqcup \partial\Gamma_2^*$, в котором $\partial\Gamma_1^*$ — множество простых нулей функции $u(x)$, принадлежащих $\partial\Gamma \cap \partial\Gamma^*$. Рассмотрим функцию

$$v(x) = \sum_{a \in \partial\Gamma \cap \partial\Gamma_1^*} v_a(x) + \sum_{a \in \partial\Gamma \cap \partial\Gamma_2^*} u_a(x) + \sum_{a \in \partial\Gamma \setminus \partial\Gamma^*} u_a(x).$$

В каждой вершине $b \in \partial\Gamma^* \cap J(\Gamma)$ обе функции $u(x)$ и $v(x)$ удовлетворяют одному и тому же условию

$$\beta_i(b)u_i''(b) - \vartheta_i(b)u'_{i\nu}(b) = 0, \quad \gamma_i \subset \Gamma^*, \quad i \in I(b),$$

а в точках $\partial\Gamma^* \cap \partial\Gamma$ обе функции либо обращаются в нуль, либо имеют нулевую производную. Поэтому к сужениям этих функций на Γ^* применимы теоремы 2 и 3 (см. также замечание 3). Согласно этим утверждениям $v(x)$ меняет знак в S^2-зоне Γ_0 функции $u(x)$. Но этого не может быть ввиду (d)$\Rightarrow$(a). Противоречие. Теорема доказана. $\square$

Как показывают выкладки в доказательстве теоремы 4, имеет место следующее утверждение.

Следствие 10. *Пусть уравнение* (1) *осциллирует на* Γ *и* Γ_0 — *это* S^2*-зона некоторого его решения. Тогда существует решение уравнения* (1)*, имеющее* S^2*-зону* $\widetilde{\Gamma}_0 \subset \Gamma_0$*, для которого на* Γ *выполнено свойство* (A).

Следствие 11. *Решения краевых задач* (10) *либо одновременно положительны на* Γ*, либо одновременно знакопеременны.*

Следствие 12. *Соответствие между решениями неосциллирующего дифференциального уравнения* (1) *и упорядоченными парами значений решений и их первой производной на границе является взаимно однозначным.*

Доказательство. Для неосциллирующего оператора L краевые задачи (10) и (11) невырожденные. Поэтому всякое решение уравнения $Lw = 0$ единственным образом представляется в виде

$$w(x) = \sum_{a\in\partial\Gamma} w(a)u_a(x) + \sum_{a\in\partial\Gamma} w'_\nu(a)v_a(x). \qquad \square$$

6. Положительность функции Грина краевой задачи Дирихле. В данном пункте мы рассматриваем свойства краевой задачи (12). Устанавливается связь между неосцилляцией дифференциального оператора L, порождаемого соотношениями (2)—(4) с краевыми условиями (12), и положительностью его функции Грина.

Определение 5. *Функцией Грина* невырожденной краевой задачи (12) назовем такую функцию $G(x, s)\colon \Gamma\times\Gamma \to \mathbb{R}$, что решение задачи может быть представлено в виде

$$u(x) = \int_\Gamma G(x,s)f(s)ds + \sum_{a\in J(\Gamma)} f(a)G(x,a).$$

Из результатов монографии [12, Гл. 6] следует, что функция Грина существует и обладает следующими свойствами:

(I) функция $G(x, s)$ вместе со своими производными по x до четвертого порядка непрерывна по совокупности переменных вплоть до границы на каждом из прямоугольников $\gamma_i \times \gamma_j$ $(i \neq j)$ и на каждом из треугольников, на которые диагональю $x = s$ разбивается квадрат $\gamma_i \times \gamma_i$;

(II) при каждом фиксированном s, являющемся внутренней точкой некоторого ребра $\gamma \in \Gamma$, функция $g_s(x) = G(x, s)$ является решением однородного уравнения (1) на $\Gamma \setminus s$;

(III) при каждом фиксированном s, являющемся внутренней точкой некоторого ребра $\gamma \in \Gamma$, функция $g_s(x)$ удовлетворяет однородным краевым условиям

$$u(a) = u'(a) = 0, \quad a \in \partial\Gamma; \tag{13}$$

(IV) на диагонали $x = s$, $x \in \Gamma\setminus J(\Gamma)$, функция $G(x, s)$ удовлетворяет условиям непрерывности вместе со своими производными

$$\frac{\partial G(x,s)}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 G(x,s)}{\partial x^2}$$

и условию скачка третьей производной по x

$$\frac{\partial^3 G(s+0,s)}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 G(s-0,s)}{\partial x^3} = \frac{1}{p(s)}, \tag{14}$$

где ориентация предельного перехода $s \pm 0$ и направление дифференцирования определяются заданной на графе метрической функцией;

(V) при $s = a \in J(\Gamma)$ функция $g_a(x)$ является решением однородного уравнения (1) на $\Gamma \setminus a$, удовлетворяющим краевым условиям (13), а в вершине a удовлетворяет соотношениям (3) и условию

$$\sum_{i\in I(a)} (p_i g''_{ai})'_\nu(a) - r(a)g_a(a) = 1; \tag{15}$$

(VI) функция $G(x, s)$ условиями (I)–(IV) определяется однозначно.

В наших дальнейших рассуждениях нам потребуются формулы, описывающие поведение функции Грина $G(x, s)$ задачи (12) в тех случаях, когда переменная $s \in \Gamma$ принимает значения близкие к граничным вершинам (см. [3]).

Пусть $a \in \partial\Gamma$. Тогда при $s \in \gamma_a$ и $x \in \Gamma \setminus (s, a)$ для функции Грина краевой задачи (12) имеет место следующее представление (см. [3]):

$$G(x, s) = u_a(x)\psi_1(s) + v_a(x)\psi_2(s), \tag{16}$$

где $\psi_1(s)$ и $\psi_2(s)$ непрерывны на γ_a, а при $\gamma_a \ni s \to a$ имеют место соотношения

$$\psi_2(s) \to +0, \quad \psi_1(s) = o(\psi_2(s)). \tag{17}$$

Теорема 5. *Уравнение* (1) *не осциллирует на* Γ *тогда и только тогда, когда функция Грина краевой задачи* (12) *положительна на* $\Gamma \times \Gamma$.

Доказательство. Необходимость. Из неосцилляции уравнения (1) следует невырожденность краевой задачи (12), а следовательно, и существование её функции Грина $G(x, s)$. Уравнение (1) не осциллирует. Поэтому $u_a(x) > 0$, $v_a(x) > 0$ на Γ для всех $a \in \partial\Gamma$. Из следствия 2 получаем соотношения

$$u_a(b) = u'_a(b) = v_a(b) = v'_a(b) = 0, \quad u''_a(b) \neq 0, \quad v''_a(b) \neq 0, \quad b \in \partial\Gamma \setminus a.$$

Следовательно, с учетом (17) формулу (16) можно переписать в виде

$$G(x, s) = v_a(x)\psi_2(s) + o(v_a(x)\psi_2(s)) \text{ при } gamma_a \ni s \to a. \tag{18}$$

Из формулы (18) следует, что функция Грина $G(x, s)$ положительна в некоторой окрестности границы множества $\Gamma \times \Gamma$. Из свойств (I)–(V) следует, что функция Грина непрерывна на $\Gamma \times \Gamma$. Поэтому, если предположить, что $G(x, s)$ не строго положительна всюду на $\Gamma \times \Gamma$, то найдется такая точка $(x_0, s_0) \in \Gamma \times \Gamma$, что $g_{s_0}(x) \geqslant 0$ на Γ и $g_{s_0}(x_0) = 0$. Поскольку $g_{s_0}(x)$ — решение уравнения (1) на $\Gamma \setminus s_0$, удовлетворяющее граничным условиям (13) и положительное вблизи границы $\partial\Gamma$, то из леммы 2 и следствия 6 следует, что найдется такое ребро $\gamma_{i_0} \subset \Gamma$, что $x_0 \in \gamma_{i_0}$, $s_0 \in \overline{\gamma}_{i_0}$ и $g_{s_0}(x) > 0$ на $\Gamma \setminus \gamma_{i_0}$. Более того, $x_0 \neq s_0$. Действительно, для $s_0 \in J(\Gamma)$, привлекая свойство (V) функции Грина и рассуждения, аналогичные проведенным при доказательстве леммы 3, получим $(p_i g''_{s_0 i})'_\nu(s_0) \leqslant 0$ для любого индекса $i \in I(s_0)$, что противоречит (15). Аналогично, с привлечением свойства (IV), рассматривается случай $s_0 \in \Gamma \setminus J(\Gamma)$.

Рассмотрим функцию $g_{s_0}(x)$ на ребре $\gamma_{i_0} = (a, b)$. Для упрощения записи будем считать, что ребро γ_{i_0} ориентированно от a к b. Функция $g_{s_0}(x)$ является нетривиальным решением уравнения (5) на $\gamma_{i_0} \setminus s_0$, удовлетворяет краевым условиям вида (6) и имеет точку нулевого минимума $x_0 \in (a, s_0)$. Из леммы 2 следует, что $s_0 \neq b$, а из леммы 1 и её следствий следует, что

$$g_{s_0}(s_0) > 0, \quad g'_{s_0}(s_0) > 0, \quad g''_{s_0}(s_0) > 0, \quad (pg''_{s_0})'(s_0 - 0) > 0.$$

Привлекая сюда свойство (IV) функции Грина и краевое условие в вершине b, получим неравенство $(pg''_{s_0})'(s_0 + 0) < 0$. Следовательно,

$$(pg''_{s_0})'(s_0 + 0) - (pg''_{s_0})'(s_0 - 0) = p(s_0)(g'''_{s_0}(s_0 + 0) - g'''_{s_0}(s_0 - 0)) < 0,$$

что противоречит (14).

Достаточность следует из формул (16)—(14) и теоремы 4. □

Следствие 13. *Пусть уравнение* (1) *не осциллирует на* Γ. *Тогда любое нетривиальное решение неравенства* $Lu \geqslant 0$, *удовлетворяющее на границе* $\partial\Gamma$ *условиям*

$$u(a) \geqslant 0, \quad u'_\nu(a) \geqslant 0, \quad a \in \partial\Gamma, \tag{19}$$

строго положительно на Γ.

Доказательство. Пусть $w(x)$ — решение неравенства и $Lw = f(x) \geqslant 0$. Тогда из определения 5 и следствия 12 получаем однозначное представление

$$w(x) = \int\limits_{\Gamma} G(x,s)f(s)ds + \sum_{a\in J(\Gamma)} f(a)G(x,a) + \sum_{a\in\partial\Gamma} w(a)u_a(x) + \sum_{a\in\partial\Gamma} w'(a)v_a(x). \qquad \square$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боровских А. В., Мустафокулов Р., Лазарев К. П., Покорный Ю. В.* Об одном классе дифференциальных уравнений четвертого порядка на пространственной сети// Докл. РАН. — 1995. — *345*, № 6. — С. 730–732.
2. *Дерр В. Я.* Неосцилляция решений линейных дифференциальных уравнений// Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Комп. науки. — 2009. — № 1. — С. 46–89.
3. *Кулаев Р. Ч.* Необходимое и достаточное условия положительности функции Грина для уравнения четвертого порядка на графе// Диффер. уравн. — 2015. — *51*, № 3. — С. 302–316.
4. *Кулаев Р. Ч.* О функции Грина краевой задачи на графе-пучке// Изв. вузов. Мат. — 2013. — № 2. — С. 56–66.
5. *Кулаев Р. Ч.* Неосцилляция уравнения четвертого порядка на графе// Мат. сб. — 2015. — *206*, № 12. — С. 79–118.
6. *Кулаев Р. Ч.* О свойстве неосцилляции уравнения на графе// Сиб. мат. ж. — 2016. — *57*, № 1. — С. 85–97.
7. *Кулаев Р. Ч.* Принцип сравнения для функции Грина краевой задачи четвертого порядка на графе// Уфим. мат. ж. — 2015. — *7*, № 4. — С. 99–108.
8. *Левин А. Ю.* Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdot + p_n(t)x = 0$// Усп. мат. наук. * — 1969. — *24*, № 2 (146). — С. 43–96.
9. *Покорный Ю. В., Бахтина Ж. И., Зверева М. Б., Шабров С. А.* Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах. — М.: Физматлит, 2009.
10. *Покорный Ю. В., Мустафокулов Р.* О позитивной обратимости некоторых краевых задач для уравнения четвертого порядка// Диффер. уравн. — 1997. — *33*, № 10. — С. 1358–1365.
11. *Покорный Ю. В., Мустафокулов Р.* О положительности функции Грина линейных краевых задач для уравнений четвертого порядка на графе// Изв. вузов. Мат. — 1999. — № 2. — С. 75–82.
12. *Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. — М.: Физматлит, 2007.
13. *M. Bohner, O. Došlý* Disconjugacy and transformation for symplectic systems// Rocky Mount. J. Math. — 1997. — *27*, № 3. — P. 707–743.
14. *Borovskikh A. V., Lazarev K. P.* Fourth-order differential equations on geometric graphs// J. Math. Sci. — 2004. — *119*, № 6. — P. 719–738.
15. *Cabada A., Saavedra L.,* Disconjugacy characterization by means of spectral $(k, n-k)$ problems// Appl. Math. Lett. — 2016. — *52*. — P. 21–29.
16. *Elias U.* Oscillation Theory of Two-Term Differential Equations. — Springer-Verlag, 1997.
17. *Leighton W., Nehari Z.* On the oscillation of solutions of self-adjoint linear differential equations of the fourth order// Trans. Am. Math. Soc. — 1958. — *89*. — P. 325–377.
18. *Mercier D., Régnier V.* Control of a network of Euler–Bernoulli beams// J. Math. Anal. Appl. — 2008. — *342*, № 2. — P. 874–894.
19. *Swanson C. A.* Comparison Theorems and Oscillation Theory of Linear Differential Equations. — New York–London: Academic Press, 1968.

Кулаев Руслан Черменович
Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН, Владикавказ
E-mail: `kulaevrch@mail.ru`

Уртаева Александра Артуровна
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова, Владикавказ
E-mail: `urtaeva-96@mail.ru`