ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 208 (2022). С. 49–62
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-208-49-62

УДК 517.984, 517.927

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ С ЗАМОРОЖЕННЫМ АРГУМЕНТОМ НА ВРЕМЕННОЙ ШКАЛЕ

© 2022 г. М. А. КУЗНЕЦОВА

Аннотация. В статье изучается задача восстановления потенциала в уравнении Штурма—Лиувилля с замороженным аргументом на временной шкале по спектру краевой задачи Дирихле. Рассматривается случай временной шкалы, состоящей из двух отрезков, и замороженного аргумента в конце первого отрезка. Получена теорема единственности и алгоритм решения обратной задачи вместе с необходимыми и достаточными условиями ее разрешимости. Рассмотренный случай существенно отличается от случая классического оператора Штурма—Лиувилля с замороженным аргументом.

Ключевые слова: обратная спектральная задача, замороженный аргумент, оператор Штурма—Лиувилля, временная шкала, замкнутое множество.

INVERSE PROBLEM FOR THE STURM–LIOUVILLE OPERATOR WITH A FROZEN ARGUMENT ON THE TIME SCALE

© 2022 M. A. KUZNETSOVA

Abstract. In this paper, we consider the problem of constructing the potential of the Sturm–Liouville equation with a frozen argument on the time scale by the spectrum of the Dirichlet boundary-value problem, where the time scale consists of two segments and the argument is frozen at the end of the first segment. We obtain the uniqueness theorem and construct an algorithm for solving the inverse problem together with necessary and sufficient conditions for its solvability. The case considered substantially differs from the case of the classical Sturm– Liouville operator with a frozen argument.

Keywords and phrases: inverse spectral problem, frozen argument, Sturm—Liouville operator, time scale, closed set.

AMS Subject Classification: 34K29, 34B24, 34N05

1. Введение. Целью статьи является исследование обратной спектральной задачи для оператора Штурма—Лиувилля с замороженным аргументом на временной шкале. Под временными шкалами обычно подразумеваются произвольные замкнутые множества $T \subseteq \mathbb{R}$. Дифференциальные операторы на временных шкалах обобщают классические дифференциальные и разностные операторы, поскольку содержат Δ-производную (см. [9, 10, 17]).

В последнее время возник интерес к обратным спектральным задачам для дифференциальных операторов на временных шкалах (см. [1, 6, 19, 20, 23, 24, 26]). Подобные задачи заключаются в восстановлении операторов по их спектральным характеристикам. Наиболее полные результаты в этом направлении получены для классического оператора Штурма—Лиувилля на отрезке (см. [2, 3, 15]). Постановка и изучение обратных задач существенно зависят от структуры рассматриваемой временной шкалы, что приводит к необходимости тех или иных ограничений. Наиболее

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00102).

 © ВИНИТИ РАН, 2022

общий вид временных шкал, на которых к настоящему моменту получено решение обратной задачи, представляет собой объединение конечного числа отрезков и изолированных точек (см. [1,19]).

Обратные задачи для оператора Штурма—Лиувилля с замороженным аргументом на отрезке изучались в ряде работ [7,11,13,14,18,21,25]. Данный оператор определяется дифференциальным выражением Штурма—Лиувилля с замороженным аргументом

$$\ell y(x) := -y''(x) + q(x)y(\gamma), \quad 0 < x < r,$$

где $\gamma \in [0, r]$ фиксировано. В отличие от классического оператора Штурма—Лиувилля, операторы с замороженным аргументом являются нелокальными. По этой причине методы классической теории обратных задач [2, 3, 15] для них неприменимы. В то же время, нелокальные операторы имеют приложения во многих областях математики и естествознания (см. [4, 5, 16]).

Задача восстановления потенциала q по спектру краевой задачи

$$\ell y = \lambda y, \quad y^{(\alpha)}(0) = y^{(\beta)}(r) = 0, \quad \alpha, \beta \in \{0, 1\},$$

исследовалась в работах [11, 13, 14, 25]. В [13] изучался случай произвольного $\gamma/r \in \mathbb{Q}$, и было дано полное описание так называемых невырожденных и вырожденных случаев в зависимости от значений тройки параметров γ/r, α и β. В частности, краевые условия Дирихле ($\alpha = \beta = 0$) соответствуют вырожденному случаю при любых $\gamma/r \in \mathbb{Q}$. В невырожденном случае потенциал однозначно восстанавливается по спектру, а в вырожденном для единственности восстановления требуется дополнительная информация (например, задание q на части интервала). Также были получены необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи. В невырожденном случае последние включают лишь асимптотику спектра

$$\lambda_n = \frac{\pi^2}{r^2}\left(n - \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\kappa_n}{n}\right)^2, \quad n \geqslant 1, \quad \{\kappa_n\}_{n \geqslant 1} \in l_2.$$

В вырожденном случае добавляется условие совпадения некоторой бесконечной части собственных значений с собственными значениями соответствующего оператора с нулевым потенциалом. Для иррационального случая $\gamma/r \notin \mathbb{Q}$ в работе [25] была доказана единственность восстановления потенциала по спектру при любых α и β. Что касается обратных спектральных задач для операторов с замороженным аргументом на временных шкалах, ранее они не рассматривались.

В настоящей работе рассматривается краевая задача для уравнения Штурма—Лиувилля с замороженным аргументом на временной шкале T специального вида:

$$-y^{\Delta\Delta}(t) + y(\gamma)q(t) = \lambda y(\sigma(t)), \quad t \in T, \tag{1}$$

$$y(0) = y(b) = 0, \tag{2}$$

где

$$T = [0, \gamma] \cup [a, b], \quad d := a - \gamma, \quad l := b - a. \tag{3}$$

Структура (3) является одной из простейших, которые позволяют выявить существенные отличия от случая отрезка.

В работе исследуется восстановление потенциала $q \in C(T)$ по спектру краевой задачи (1)—(2). Установлены условия на величины d, γ и l, при которых выполняется теорема единственности решения обратной задачи (теорема 1). В частности, единственность восстановления будет иметь место, если $l = k\gamma$, $k \in \mathbb{N}$. Здесь наблюдается отличие от случая уравнения с замороженным аргументом на отрезке, т.е. при $\gamma = a$ и $r = a + l$, в котором потенциал не восстанавливается однозначно по спектру краевой задачи Дирихле ни при каком рациональном k. Также получены алгоритм восстановления потенциала (алгоритм 1), необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи (теорема 5). Особый вид характеристической функции (18) значительно усложняет исследование в сравнении со случаем отрезка. В частности, характеризация спектра не исчерпывается одной лишь асимптотикой, как в невырожденном случае оператора на отрезке.

2. Постановка обратной задачи. Теорема единственности. Рассмотрим уравнение (1) на временной шкале (3) с непрерывным потенциалом $q \in C(T)$. Пусть $C^n_\Delta(T)$, $n \in \mathbb{N}$, обозначает класс функций, имеющих n-ю Δ-производную, непрерывную на T. Определим решения как функции $y \in C^2_\Delta(T)$, для которых выполняется тождество (1). Те λ, при которых существуют ненулевые решения y, удовлетворяющие условиям Дирихле (2), называются собственными значениями.

Так как временная шкала T имеет вид (3), для любой $f \in C^1_\Delta(T)$ имеем (см. [20, 26])

$$f^\Delta(t) = \begin{cases} \dfrac{f(a) - f(\gamma)}{d}, & t = \gamma, \\ f'(t), & t \in [0, \gamma] \cup [a, b], \end{cases} \tag{4}$$

где классическая производная $f'(t)$ существует, а равенство $f'(\gamma) = f^\Delta(\gamma)$ выполнено в силу непрерывности. Применяя данную формулу к решению y уравнения (1) и его Δ-производной, получим, что уравнение (1) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} -y''(x_1) + q(x_1)y(\gamma) = \lambda y(x_1), & x_1 \in [0, \gamma]; \\ -y''(x_2) + q(x_2)y(\gamma) = \lambda y(x_2), & x_2 \in [a, b], \end{cases} \tag{5}$$

с условиями скачков

$$\begin{pmatrix} y(a) \\ y'(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ d(q(\gamma) - \lambda) & 1 - \lambda d^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(\gamma) \\ y'(\gamma) \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Также из (4) получается, что условие $y \in C^2_\Delta(T)$ эквивалентно условию $y \in C^2[0, \gamma] \cap C^2[a, b]$, где $C^2(B)$ — класс дважды непрерывно дифференцируемых функций на B в обычном смысле.

Введем решения $S(x, \lambda)$ и $C(x, \lambda)$ первого уравнения в (5) при начальных условиях

$$S(\gamma, \lambda) = 0, \quad S'(\gamma, \lambda) = 1; \quad C(\gamma, \lambda) = 1, \quad C'(\gamma, \lambda) = 0.$$

Для этих функций известны следующие формулы (см. [11]):

$$S(x, \lambda) = \frac{\sin \rho(x - \gamma)}{\rho}, \quad C(x, \lambda) = \cos \rho(x - \gamma) + \int_\gamma^x \frac{\sin \rho(x - t)}{\rho} q(t)\,dt, \quad x \in [0, \gamma]; \tag{7}$$

здесь и далее $\lambda = \rho^2$. Любое решение системы (5)—(6) на $[0, \gamma]$ может быть представлено в виде

$$y(x) = AS(x, \lambda) + BC(x, \lambda). \tag{8}$$

С учетом (6) при $x \in [a, b]$ имеем

$$y(x) = (y(\gamma) + dy'(\gamma)) \cos \rho(x - a) + \\ + ((1 - d^2\lambda)y'(\gamma) - d\lambda y(\gamma) + dy(\gamma)q(\gamma)) \frac{\sin \rho(x - a)}{\rho} + B \int_a^x \frac{\sin \rho(x - t)}{\rho} q(t)\,dt. \tag{9}$$

Подставив представления (8) и (9) в краевые условия (2), получим следующую систему линейных уравнений относительно A и B:

$$\begin{cases} AS(0, \lambda) + BC(0, \lambda) = 0, \\ A\left(d \cos \rho l + [1 - d^2\lambda] \dfrac{\sin \rho l}{\rho}\right) + B\left(\cos \rho l + [dq(\gamma) - d\lambda] \dfrac{\sin \rho l}{\rho} + \displaystyle\int_a^b \frac{\sin \rho(b - t)}{\rho} q(t)\,dt\right) = 0. \end{cases}$$

Число λ является собственным значением краевой задачи (1)—(2) тогда и только тогда, когда существует ненулевое решение этой системы. Определитель системы $\Delta(\lambda)$ называется характеристической функцией краевой задачи (1)—(2). Он является целой функцией порядка 1/2. Спектром краевой задачи (1)—(2) называется последовательность нулей $\{\lambda_n\}_{n \geqslant 0}$ характеристической функции (с учетом кратности).

Используя формулы (7), получим

$$\Delta(\lambda) = -c_1(\lambda)\frac{\sin\rho\gamma}{\rho} - c_2(\lambda)\cos\rho\gamma -$$
$$- \frac{\sin\rho\gamma}{\rho}\int\limits_a^b \frac{\sin\rho(b-t)}{\rho}q(t)dt - c_2(\lambda)\int\limits_0^\gamma \frac{\sin\rho t}{\rho}q(t)dt - dq(\gamma)\frac{\sin^2\rho\gamma}{\rho^2}, \quad (10)$$

где
$$c_1(\lambda) := \cos\rho l - d\rho\sin\rho l, \quad c_2(\lambda) := d\cos\rho l + \frac{1-d^2\lambda}{\rho}\sin\rho l.$$

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Из положительных нулей функции $c_2(z^2)$ можно составить такую последовательность $\{z_n\}_{n\geqslant 1}$, что системы $\{\sin z_n t\}_{n\geqslant 1}$ и $\{1\}\cup\{\cos z_n t\}_{n\geqslant 1}$ являются базисами Рисса в $L_2(0,l)$.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение
$$g(z) := \frac{dz}{d^2z^2-1} - \operatorname{tg} zl = 0.$$
Если z — ненулевой корень данного уравнения, то число z является нулем $c_2(z^2)$. Заметим, что функция $g(z)$ непрерывна и монотонна на любом интервале, не содержащем точек $\pm 1/d$, $\pm\pi(n+1/2)/l$, $n\in\mathbb{Z}$. С помощью теоремы о промежуточном значении можно показать, что каждому интервалу
$$I_n = \left(\frac{\pi n}{l} - \frac{\pi}{2l}, \frac{\pi n}{l} + \frac{\pi}{2l}\right), \quad n\in\mathbb{N},$$
принадлежит не менее одного нуля $g(z)$. Выберем в качестве z_n любой нуль из I_n, $n\in\mathbb{N}$, тогда все $z_n>0$ и различны.

Используя стандартную технику с применением теоремы Руше (см. [15]), можно доказать, что последовательность нулей $c_2(z^2)$ имеет вид $\{-z_n\}_{n\geqslant 0}\cup\{z_n\}_{n\geqslant 0}$ и выполнены асимптотические формулы
$$z_n = \frac{\pi n}{l} + \frac{1}{d\pi n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad n\in\mathbb{N}. \quad (11)$$
Докажем, что $\{\sin z_n t\}_{n\geqslant 1}$ является базисом Рисса; для $\{1\}\cup\{\cos z_n t\}_{n\geqslant 1}$ доказательство аналогично. Согласно [15, утверждение 1.8.5], достаточно доказать полноту системы $\{\sin z_n t\}_{n\geqslant 1}$.

Пусть $f\in L_2(0,l)$ и
$$\int\limits_0^l f(t)\sin z_n t dt = 0.$$
Тогда функция
$$F(\lambda) = \frac{\lambda - z_0^2}{\rho c_2(\lambda)}\int\limits_0^l f(t)\sin\rho t dt$$
является целой по λ. Используя стандартную оценку (см. [15])
$$|\sin\rho l| \geqslant M^{-1}e^{|\operatorname{Im}\rho|l}, \quad |\rho| = \frac{\pi(n+1/2)}{l}, \quad n\in\mathbb{N}, \quad n\geqslant N^*,$$
получим, что $|F(\lambda)|\leqslant M$ на окружностях $|\lambda| = (\pi(n+1/2)/l)^2$ при достаточно больших $n\in\mathbb{N}$. Тогда из принципа максимума модуля и теоремы Лиувилля следует, что $F(\lambda)\equiv C$. В то же время имеем
$$\int\limits_0^l f(t)\sin\rho t dt = o(1), \quad \frac{\rho c_2(\lambda)}{\lambda - z_0^2} = (-1)^{n+1}d^2(1+o(1))$$
при $\rho = \pi(n+1/2)/l$ в силу леммы Римана—Лебега. Отсюда следует, что возможно только $C=0$. Тогда $f\equiv 0$, и полнота системы $\{\sin z_n t\}_{n\geqslant 1}$ доказана. □

Рассмотрим следующую обратную задачу.

Обратная задача 1. По спектру $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$ восстановить потенциал q.

Докажем утверждение, которое позволяет свести обратную задачу к нахождению q из характеристической функции.

Утверждение 1. *Характеристическая функция $\Delta(\lambda)$ строится однозначно по спектру $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$.*

Доказательство. Обозначим $s(\lambda) = \rho^{-1}\sin\rho\gamma$. Из представления (10) легко получается асимптотика

$$\Delta(\lambda) = \begin{cases} d^2\rho\sin\rho l\cos\rho\gamma + O(e^{|\operatorname{Im}\rho|(\gamma+l)}), & \gamma\leqslant l \text{ или } q(\gamma)=0, \\ -dq(\gamma)s^2(\lambda) + O(\rho e^{|\operatorname{Im}\rho|(\gamma+l)}), & \gamma > l \text{ и } q(\gamma)\neq 0, \end{cases} \quad \lambda\to\infty. \tag{12}$$

Пусть k_0 — кратность нуля в спектре. Без потери общности можно предположить, что нуль встречается только среди первых k_0 членов спектра, т.е. $\lambda_0 = \ldots = \lambda_{k_0-2} = \lambda_{k_0-1} = 0$. По теореме Адамара, характеристическая функция определяется с точностью до некоторой постоянной $C\neq 0$:

$$\Delta(\lambda) = CG(\lambda), \quad G(\lambda) \coloneqq \lambda^{k_0}\prod_{n=k_0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n}\right). \tag{13}$$

Согласно (12), тип построенного бесконечного произведения $G(\lambda)$ может быть равен либо $\gamma + l$, либо 2γ. Если тип равен $\gamma + l$, то постоянная C в (13) определяется первой асимптотической формулой в (12). Пусть теперь тип равен 2γ, что возможно только при $\gamma > l$ и $q(\gamma)\neq 0$. Определим

$$C_1 = \lim_{\lambda\to-\infty}\frac{G(\lambda)}{s^2(\lambda)}.$$

Из (10) видно, что $C_1 = -dq(\gamma)/C$. Также из (10) и (13) следует, что

$$G(\lambda) - C_1 s^2(\lambda) = \frac{d^2\rho\sin\rho d_2\cos\rho\gamma(1+o(1))}{C}, \quad \lambda\to-\infty,$$

$$C = \lim_{\lambda\to-\infty}\frac{d^2\rho\sin\rho l\cos\rho\gamma}{G(\lambda)-C_1 s^2(\lambda)}.$$

Таким образом, C определяется однозначно, и лемма доказана. □

Докажем теорему единственности решения обратной задачи 1. Доказательство основано на вычислении коэффициентов разложений функции q по базисам $\{\sin\pi nt/\gamma\}_{n\geqslant 1}$ и $\{\sin z_n t\}_{n\geqslant 1}$ на отрезках $[0,\gamma]$ и $[a,b]$. Эти коэффициенты вычисляются путем подстановки значений $\lambda = (\pi n/\gamma)^2$ и $\lambda = z_n^2$ в представление (10), если $c_2((\pi n/\gamma)^2)\neq 0$, $n\in\mathbb{N}$. Данный подход аналогичен тому, который был использован в [25] для доказательства теоремы единственности.

Теорема 1. *Обозначим через $\{\tilde\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$ спектр краевой задачи (1)—(2) с некоторым потенциалом $\tilde q\in C(T)$. Если функции $c_2(\lambda)$ и $s(\lambda)\coloneqq\rho^{-1}\sin\rho\gamma$ не имеют общих нулей, то из равенства $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 0} = \{\tilde\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$ следует $q=\tilde q$.*

Доказательство. Согласно утверждению 1, функция $\Delta(\lambda)$ однозначно определяется заданием своих нулей $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$. Обозначим через $\tilde\Delta(\lambda)$ характеристическую функцию краевой задачи (1)—(2) с потенциалом $\tilde q$. Таким образом, если $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 0} = \{\tilde\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$, то $\Delta(\lambda) = \tilde\Delta(\lambda)$. Подставив в представление (10) значения $\lambda = (\pi n/\gamma)^2$, получим соотношения

$$\Delta\left(\left(\frac{\pi n}{\gamma}\right)^2\right) = k_n\left((-1)^{n+1} - \frac{\gamma}{\pi n}\varkappa_n\right), \quad k_n \coloneqq c_2\left(\left(\frac{\pi n}{\gamma}\right)^2\right), \quad \varkappa_n \coloneqq \int_0^\gamma \sin\frac{\pi n}{\gamma}tq(t)\,dt,$$

откуда приходим к формуле

$$\varkappa_n = -\frac{\pi n}{k_n\gamma}\left(\Delta\left(\left(\frac{\pi n}{\gamma}\right)^2\right) + (-1)^n k_n\right), \quad n\geqslant 1. \tag{14}$$

Аналогично получается равенство

$$\int\limits_0^\gamma \sin\frac{\pi n}{\gamma}t\tilde q(t)dt = \varkappa_n, \quad n \geqslant 1,$$

с теми же $\varkappa_n$. Тогда

$$\int\limits_0^\gamma \sin\frac{\pi n}{\gamma}t(q(t)-\tilde q(t))dt = 0, \quad n \geqslant 1,$$

и из полноты системы $\{\sin \pi nt/\gamma\}_{n\geqslant 1}$ в $L_2(0,\gamma)$ следует, что $q = \tilde q$ на $[0,\gamma]$.

Подставим в характеристическую функцию $\lambda = z_n^2$. Полнота системы $\{\sin z_n t\}_{n\geqslant 1}$ в $L_2(0,l)$ была доказана в лемме 1. Действуя так же, как в первой части доказательства, получаем для коэффициентов

$$\xi_n := \int\limits_0^l \sin z_n t q(b-t)dt$$

формулы

$$\xi_n = -\frac{z_n^2}{\sin z_n\gamma}\left(\Delta(z_n^2) + c_1(z_n^2)\frac{\sin z_n\gamma}{z_n} + dq(\gamma)\frac{\sin^2 z_n\gamma}{z_n^2}\right), \quad n \geqslant 1, \tag{15}$$

и равенство $q = \tilde q$ на $[a,b]$. □

Основываясь на формулах (14) и (15), получим следующий алгоритм восстановления.

Алгоритм 1. Пусть функции $c_2(\lambda)$ и $s(\lambda)$ не имеют общих нулей. Восстановление потенциала по $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$ производится в следующей последовательности:

1. Построить $\Delta(\lambda)$ (см. утверждение 1);.
2. Вычислить коэффициенты $\varkappa_n$ по формуле (14) и найти

$$q(t) = \frac{2}{\gamma}\sum_{n=1}^\infty \varkappa_n \sin\frac{\pi n}{\gamma}t, \quad t \in (0,\gamma).$$

3. Вычислить коэффициенты ξ_n по формуле (15) и построить

$$q(b-t) = \sum_{n=1}^\infty \xi_n\chi_n(t), \quad t \in (0,l),$$

где система $\{\chi_n(t)\}_{n\geqslant 1}$ является биортогональной к базису $\{\sin z_n t\}_{n\geqslant 1}$ в $L_2(0,l)$.

Утверждение 2. *Можно гарантировать, что $c_2(\lambda)$ и $s(\lambda)$ не имеют общих нулей, наложив одно из трех ограничений на d, γ и l:*

(i) *имеет место равенство $l = k\gamma$ при некотором $k \in \mathbb{N}$;*
(ii) *числа $\pi l/\gamma$ и $\pi d/\gamma$ рациональны;*
(iii) *числа l/γ, $\pi d/\gamma$ рациональны и $\cos l/d \neq 0$.*

Доказательство. Если выполнено (i), то $c_2((\pi n/\gamma)^2) = (-1)^{nk}d$. Пусть выполнено (ii) или (iii) и $c_2((\pi n/\gamma)^2) = 0$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\cos \pi nl/\gamma \neq 0$ и

$$\left(1 - \left(\frac{\pi n}{\gamma}d\right)^2\right)\operatorname{tg}\frac{\pi nl}{\gamma} = \frac{\pi n}{\gamma}d. \tag{16}$$

Если выполнено (ii), то $\pi nl/\gamma \in \mathbb{Q}$, и $\operatorname{tg}\pi nl/\gamma$ является иррациональным числом (см. [22]). Тогда в (16) слева имеем либо нуль, либо иррациональное число, а справа — ненулевое рациональное число; противоречие.

Если выполнено (iii), то $\pi nl/\gamma$ обозначает рациональное число градусов, и согласно [22]

$$\operatorname{tg}\frac{\pi nl}{\gamma} \in (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \cup \{0\} \cup \{\pm 1\}.$$

Случаи иррационального и нулевого $\operatorname{tg}\pi nl/\gamma$ аналогичны (ii). Если же $\operatorname{tg}\pi nl/\gamma = \pm 1$, то (16) приводит к противоречию потому, что рациональное число $\pi nd/\gamma$ не может быть корнем ни одного из квадратных уравнений $1 - x^2 = \pm x$. $\square$

3. Необходимые и достаточные условия. Далее получим необходимые и достаточные условия на спектр в случае

$$l = \gamma, \quad q \in W_2^1[0,\gamma] \cap W_2^1[a,b]. \tag{17}$$

При выполнении данных условий формулу (10) можно переписать в виде

$$\Delta(\lambda) = \frac{d^2\rho}{2}\sin 2\rho l - d\cos 2\rho l - \frac{\sin 2\rho l}{\rho} - dq(\gamma)\frac{\sin^2\rho l}{\rho^2} + \\ + \left[\frac{\rho^2 d^2 - 1}{\rho^2}\sin\rho l - \frac{d}{\rho}\cos\rho l\right]\int\limits_0^l q(t)\sin\rho t dt - \frac{\sin\rho l}{\rho^2}\int\limits_0^l \sin\rho t q(b-t)dt. \tag{18}$$

Выполнив подстановки $\lambda = (\pi n/l)^2$ и $\lambda = z_n^2$ в (18), с помощью интегрирования по частям получим следующее утверждение.

Утверждение 3. *При $n \in \mathbb{N}$ имеют место формулы*

$$\Delta\left(\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\right) = -d + d\left(\frac{l}{\pi n}\right)^2[q(l) - (-1)^n q(0) + \kappa_n],$$

$$\Delta(z_n^2) = (-1)^n\frac{\sin z_n l}{z_n^3}\left[\frac{1}{d^2} + q(a) - q(l) - (-1)^n q(b) + \eta_n\right]$$

с некоторыми последовательностями $\{\kappa_n\}_{n\geqslant 1}, \{\eta_n\}_{n\geqslant 1} \in l_2$.

Введем обозначения

$$Q_1(z) = \int\limits_z^b q(t)dt, \quad Q_2(z) = \int\limits_0^{l-z} q(a+t)dt.$$

Интегрируя по частям, получаем представление

$$\Delta(\lambda) = \frac{d^2\rho}{2}\sin 2\rho l - d\cos 2\rho l - \frac{\sin 2\rho l}{\rho} + d^2 q(0)\frac{\sin\rho l}{\rho} - d^2\frac{\sin 2\rho l}{2\rho}q(l) + \frac{1}{2\rho}\int\limits_0^{2l}\sin\rho t W(t)dt, \tag{19}$$

где функция $W \in L_2[0, 2l]$ имеет вид

$$W(t) = \begin{cases} dq(l-t) - dq(l) - Q_1(l-t) + d^2 q'(l-t) - Q_2(t), & t \in [0,l), \\ -dq(t-l) - dq(l) - Q_1(t-l) + d^2 q'(t-l) - Q_2(2l-t), & t \in [l, 2l]. \end{cases}$$

Используя формулу (19), с помощью стандартной техники [15] можно получить асимптотику спектра.

Теорема 2. *Справедливы следующие асимптотические формулы*:

$$\lambda_n = \rho_n^2, \quad \rho_n = \frac{\pi n}{2l} + \frac{2}{d\pi n} + \frac{4l\delta_n q(0)}{\pi^2 n^2} + \frac{\mu_n}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{20}$$

где $\delta_n = \sin\pi n/2$, $\{\mu_n\}_{n\geqslant 1} \in l_2$.

С помощью этих асимптотик формула (13) может быть уточнена следующим образом:

$$\Delta(\lambda) = ld^2(\lambda - \lambda_0)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n - \lambda}{(\frac{\pi n}{2l})^2} \tag{21}$$

(доказательство аналогично доказательству теоремы 1.1.4 в [15] для классического оператора Штурма—Лиувилля).

Пусть теперь задана произвольная последовательность $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$, члены которой удовлетворяют асимптотическим формулам

$$\lambda_n=\rho_n^2,\quad \rho_n=\frac{\pi n}{2l}+\frac{2}{d\pi n}+\frac{4l\delta_n u}{\pi^2 n^2}+\frac{\mu_n}{n^2},\quad n\in\mathbb{N}, \tag{22}$$

где $u\in\mathbb{C}$, $\{\mu_n\}_{n\geqslant 1}\in l_2$. Наша следующая цель — получить условия, которые нужно наложить на данную последовательность, чтобы она являлась спектром некоторой краевой задачи (1)—(2) в частном случае (17).

Теорема 3. *Пусть функция* $\Delta(\lambda)$ *построена по формуле* (21) *с произвольными числами* λ_n *вида* (22). *Имеет место представление*

$$\Delta(\lambda)=\tilde\Delta(\lambda)+C_0\frac{\sin 2\rho l}{\rho}+\int_0^{2l}W(t)\frac{\sin\rho t}{2\rho}dt,\quad W\in L_2(0,2l), \tag{23}$$

где

$$\tilde\Delta(\lambda)=\frac{d^2\rho}{2}\sin 2\rho l-d\cos 2\rho l+d^2u\frac{\sin\rho l}{\rho}.$$

Доказательство. Доказательство теоремы основано на технике, примененной в [12], где представление для другой характеристической функции было получено с меньшим числом слагаемых.

1. Обозначим через $\tilde\lambda_n=\tilde\rho_n^2$, $n\geqslant 0$, нули функции $\tilde\Delta(\lambda)$; при этом $\tilde\rho_n$ имеют ту же асимптотику, что и ρ_n в формулах (20). Заметим, что $\tilde\Delta(\lambda)$ восстанавливается по формуле (21), если в ней заменить λ_n на $\tilde\lambda_n$. Рассмотрим числа

$$\theta_k=\frac{\pi k}{2l}[\Delta(\lambda)-\tilde\Delta(\lambda)]\Big|_{\lambda=(\frac{\pi k}{2l})^2},\quad k\in\mathbb{N}.$$

Введем функцию $\Delta^*(\lambda)=d^2\rho/2\sin 2\rho l$. Используя (21), запишем представление

$$\Delta(\lambda)=\Delta^*(\lambda)F(\lambda),\quad F(\lambda):=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_n-\lambda}{(\frac{\pi n}{2l})^2-\lambda},$$

и, аналогично,

$$\tilde\Delta(\lambda)=\Delta^*(\lambda)\tilde F(\lambda),\quad \tilde F(\lambda):=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{\tilde\lambda_n-\lambda}{(\frac{\pi n}{2l})^2-\lambda}.$$

С учетом этих представлений имеем

$$\theta_k=\frac{\pi k}{2l}[\Delta^*(\lambda)]'\Big|_{\lambda=(\frac{\pi k}{2l})^2}\left[\left(\tilde\lambda_k-\left(\frac{\pi k}{2l}\right)^2\right)\tilde d_k-\left(\lambda_k-\left(\frac{\pi k}{2l}\right)^2\right)d_k\right],\quad k\in\mathbb{N}, \tag{24}$$

где

$$d_k=\prod_{n\neq k}\frac{\lambda_n-(\frac{\pi k}{2l})^2}{(\frac{\pi n}{2l})^2-(\frac{\pi k}{2l})^2},\quad \tilde d_k=\prod_{n\neq k}\frac{\tilde\lambda_n-(\frac{\pi k}{2l})^2}{(\frac{\pi n}{2l})^2-(\frac{\pi k}{2l})^2}.$$

Далее оценим d_k (для $\tilde d_k$ вычисления аналогичны) и $\tilde d_k-d_k$. Перепишем первый коэффициент в виде

$$d_k=\prod_{\substack{n\leqslant N,\\ n\neq k}}(1+x_{n,k})\exp H_k,\quad H_k:=\sum_{\substack{n>N,\\ n\neq k}}\ln(1+x_{n,k}),\quad x_{n,k}:=\frac{\lambda_n-(\frac{\pi n}{2l})^2}{(\frac{\pi n}{2l})^2-(\frac{\pi k}{2l})^2}, \tag{25}$$

с некоторым фиксированным N. В силу (22) имеем $\lambda_n-[\pi n/(2l)]^2=O(1)$, и можно выбрать такое N, не зависящее от k, что $|x_{n,k}|<1/2$ при $n>N$. Используя разложение Тейлора для $\ln(1+x_{n,k})$, можно оценить

$$|H_k|\leqslant 2\sum_{\substack{n>N,\\ n\neq k}}|x_{n,k}|\leqslant 2C\sum_{n>k}\frac{1}{(n-k)^2}=O(1). \tag{26}$$

Тогда из (25) мы получим, что $d_k = O(1)$. Покажем, что $d_k - \tilde{d}_k = O(1/k^2)$. Для этого запишем

$$d_k - \tilde{d}_k = \left(\prod_{\substack{n \leqslant N, \\ n \neq k}} (1 + x_{n,k}) - \prod_{\substack{n \leqslant N, \\ n \neq k}} (1 + \tilde{x}_{n,k}) \right) \exp H_k + \prod_{\substack{n \leqslant N, \\ n \neq k}} (1 + \tilde{x}_{n,k}) (\exp H_k - \exp \tilde{H}_k),$$

где $\tilde{H}_k$ и $\tilde{x}_{n,k}$ вводятся аналогично H_k и $x_{n,k}$. Первое слагаемое в данном равенстве оценивается как $O(1/k^2)$, поскольку $x_{n,k} = O(1/k^2)$ и $\tilde{x}_{n,k} = O(1/k^2)$ при $n < N$, а также выполнено (26). Для оценки второго слагаемого заметим, что из разложения Тейлора для $\ln(1 + x_{n,k})$, $k > N$, можно получить формулу

$$H_k = \sum_{\substack{n > N, \\ n \neq k}} (x_{n,k} + O(x_{n,k}^2));$$

формула такого же вида имеет место для $\tilde{H}_k$. Используя их и формулу оценки разности значений функции через ее производную, получим

$$|\exp H_k - \exp \tilde{H}_k| \leqslant \max_{z \in [H_k, \tilde{H}_k]} |\exp z| |H_k - \tilde{H}_k| \leqslant$$
$$\leqslant C \sum_{\substack{n > N, \\ n \neq k}} |x_{n,k} - \tilde{x}_{n,k}| + C \sum_{\substack{n > N, \\ n \neq k}} \frac{1}{k^2 (n-k)^2} \leqslant C \sum_{\substack{n > N, \\ n \neq k}} \frac{\hat{\mu}_n}{n(n^2 - k^2)} + \frac{C}{k^2},$$

где $\{\hat{\mu}_n\}_{n \geqslant 0} \in l_2$ в силу асимптотических формул (22). При этом

$$\sum_{\substack{n \geqslant 1, \\ n \neq k}} \frac{\hat{\mu}_n}{n(n^2 - k^2)} \leqslant \frac{1}{k} \sum_{\substack{n \geqslant 1, \\ n \neq k}} \frac{\hat{\mu}_n}{n(n-k)} \leqslant \frac{1}{k} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \hat{\mu}_n^2} \sqrt{\sum_{\substack{n \geqslant 1, \\ n \neq k}} \frac{1}{n^2 (n-k)^2}} \leqslant \frac{C}{k^2},$$

следовательно, $|\exp H_k - \exp \tilde{H}_k| = O(1/k^2)$ и $d_k - \tilde{d}_k = O(1/k^2)$.

Из асимптотик (22) следует, что

$$\lambda_k - \tilde{\lambda}_k = \frac{\nu_k}{k}, \quad \lambda_k - \left(\frac{\pi k}{2l}\right)^2 = O(1), \quad \tilde{\lambda}_k - \left(\frac{\pi k}{2l}\right)^2 = O(1),$$

где последовательность $\{\nu_k\}_{k \geqslant 1} \in l_2$. Тогда

$$k \left[\left(\lambda_k - \left(\frac{\pi k}{2l}\right)^2 \right) d_k - \left(\tilde{\lambda}_k - \left(\frac{\pi k}{2l}\right)^2 \right) \tilde{d}_k \right] = k \left[d_k (\lambda_k - \tilde{\lambda}_k) + \left(\tilde{\lambda}_k - \left(\frac{\pi k}{2l}\right)^2 \right) (d_k - \tilde{d}_k) \right] \in l_2,$$

и из (24) мы получаем, что $\{\theta_k\}_{k \geqslant 1} \in l_2$.

2. Так как система $\{\sin \pi k t/(2l)\}_{k \geqslant 1}$ является ортогональным базисом в пространстве $L_2(0, 2l)$, существует функция $W \in L_2(0, 2l)$, для которой

$$\int_0^{2l} W(t) \sin \frac{\pi k}{2l} t dt = 2\theta_k.$$

Введем в рассмотрение функции

$$\theta(\rho) = \int_0^{2l} W(t) \sin \rho t dt, \quad P(\lambda) = \lambda \frac{\theta(\rho)/(2\rho) - \Delta(\lambda) + \tilde{\Delta}(\lambda)}{\Delta^*(\lambda)} = \frac{\theta(\rho)}{d^2 \sin 2\rho l} + \lambda (\tilde{F}(\lambda) - F(\lambda)).$$

Функция $P(\lambda)$ является целой. Действуя аналогично доказательству в части 1, можно показать, что $|\tilde{F}(\lambda) - F(\lambda)| \leqslant M/k^2$ на каждой окружности $|\lambda| = [\pi k/(2l) + \pi/(4l)]^2$, $k > N$. Отсюда следует, что функция $P(\lambda)$ ограничена по модулю во всей плоскости, и по теореме Лиувилля $P(\lambda) \equiv C_0$. Таким образом, представление (23) доказано. □

Построим $\Delta(\lambda)$ по формуле (21) с заданными λ_n с асимптотикой (22). Мы доказали, что данная функция имеет вид (23) с некоторыми $W \in L_2(0, 2l)$ и $C_0 \in \mathbb{C}$. Легко заметить, что функция W определяется единственным образом:

$$W(t) = \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n \sin\frac{\pi n}{2l}t, \quad \beta_n := \frac{\pi n}{l}\Delta\left(\left(\frac{\pi n}{2l}\right)^2\right) + \frac{\pi n}{l}(-1)^n d - 2d^2 u\delta_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{27}$$

Согласно формуле (19), построенная $\Delta(\lambda)$ является характеристической функцией некоторой краевой задачи только в случае, когда для W выполнено представление

$$W(t) = \begin{cases} dg(l-t) - dg(l) - G_1(l-t) + d^2 g'(l-t) - G_2(t), & t \in [0, l), \\ -dg(t-l) - dg(l) - G_1(t-l) + d^2 g'(t-l) - G_2(2l-t), & t \in [l, 2l], \end{cases} \tag{28}$$

с функциями g, G_1 и G_2, удовлетворяющими следующим условиям:

(a) $g \in W_2^1[0, l]$, $G_2 \in W_2^2[0, l]$ и

$$G_1(z) = \int_z^l g(t)dt, \quad z \in [0, l];$$

(b) $g(l) = -2(C_0 + 1)/d^2$ и $g(0) = u$;

(c) $G_2(l) = 0$.

Легко заметить, что в случае представления (28) можно восстановить последовательно g, G_1 и G_2 по формулам

$$\begin{gathered} g(t) = \frac{1}{2d}\{W(l-t) - W(l+t)\}, \quad G_1(t) = \int_t^l g(w)dw, \\ G_2(t) = -dg(l-t) - dg(l) - G_1(l-t) + d^2 g'(l-t) - W(2l-t), \end{gathered} \tag{29}$$

где $t \in [0, l]$. Обратно, пусть функция $W(t)$ из представления (23) имеет вид (28). Рассмотрим функцию

$$q(t) = \begin{cases} g(t), & t \in [0, \gamma], \\ G_2'(l - t + a), & t \in [a, b]. \end{cases}$$

Из условия (a) следует, что $q \in W_2^1[0, \gamma] \cap W_2^1[a, b]$. Сравнивая формулу (19) с (23) при условиях (b)—(c), получим, что характеристическая функция краевой задачи (1)—(2) с построенным q равна $\Delta(\lambda)$, и $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$ является спектром данной краевой задачи.

Далее получим условия, из которых следует вид (28) функции W. Для этого понадобятся две следующие леммы.

Лемма 2 (см. [12]). *Пусть $\{\gamma_k\}_{k\geqslant 1} \in l_2$ и $f \in L_2(0, l)$. Функция f принадлежит классу $W_2^1[0, l]$ тогда и только тогда, когда имеет место асимптотика*

$$\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{\pi k}{l} + \gamma_k\right)xdx = \frac{l}{\pi k}(w_1 - (-1)^k w_2) + \frac{\tilde{\gamma}_k}{k}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \{\tilde{\gamma}_k\}_{k\geqslant 1} \in l_2;$$

при этом $w_1 = f(0)$, $w_2 = f(l)$.

Лемма 3. *Пусть $f \in L_2(0, l)$. Функция f принадлежит классу $W_2^2[0, l]$ тогда и только тогда, когда*

$$\int_0^l f(x)\cos z_k x dx = \frac{1}{z_k^2}((-1)^k v_2 - v_1 + \tilde{\gamma}_k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad \{\tilde{\gamma}_k\}_{k\geqslant 1} \in l_2; \tag{30}$$

при этом $v_1 = f'(0)$ и $v_2 = f'(l) + f(l)/d$.

Доказательство. Необходимость. Если $f \in W_2^2[0,l]$, то формула (30), в которой
$$v_1 = f'(0), \quad v_2 = f'(l) + \frac{f(l)}{d}$$
получается двукратным интегрированием по частям.

Достаточность. Пусть выполнена формула (30). Построим такую функцию $g \in W_2^2[0,l]$, что её коэффициенты по системе $\{1\} \cup \{\cos z_n t\}_{n \geqslant 1}$ совпадают с коэффициентами f. Найдем g в виде
$$g(x) = \int\limits_x^l \tilde{g}(t)dt + C.$$
Вычисляя коэффициент при $\cos z_k t$, с помощью интегрирования по частям получим
$$\frac{C \sin z_k l}{z_k} + \frac{1}{z_k}\int\limits_0^l \tilde{g}(t)\sin z_k t dt = \frac{1}{z_k^2}((-1)^k v_2 - v_1 + \tilde{\gamma}_k).$$
Тогда $\tilde{g}(x) = h(x) - CF_s(x)$, где функции h и F_s определяются единственным образом равенствами
$$\int\limits_0^l h(t)\sin z_k t dt = \frac{1}{z_k}((-1)^k v_2 - v_1 + \tilde{\gamma}_k), \qquad \int\limits_0^l F_s(t)\sin z_k t dt = \sin z_k l, \quad k \geqslant 1. \tag{31}$$
Из формулы (11) следует, что $k(\sin z_k l - (-1)^k l/(d\pi k)) \in l_2$. Согласно лемме 2 выполнены включения $h, F_s \in W_2^1[0,l]$. Для построения искомой $g \in W_2^2[0,l]$ остается выбрать C таким образом, чтобы
$$\int\limits_0^l f(t)dt = \int\limits_0^l g(t)dt = \int\limits_0^l \int\limits_x^b h(t)dt - C\int\limits_0^l tF_s(t)dt + Cl.$$
Эта постоянная C существует, если
$$\int\limits_0^l tF_s(t)dt \neq l. \tag{32}$$
Докажем от противного, что неравенство (32) выполняется. Построим целую функцию
$$F(\lambda) = \frac{\lambda - z_0^2}{\rho c_2(\lambda)}\left(\sin \rho l - \int\limits_0^l F_s(t)\sin\rho t dt\right),$$
где $\{z_n^2\}_{n \geqslant 0}$ — последовательность нулей $c_2(\lambda)$. Действуя так же, как в доказательстве леммы 1, получим $F(\lambda) \equiv C$, откуда следует
$$\sin\rho l - \int\limits_0^l F_s(t)\sin\rho t dt \equiv \frac{C\rho c_2(\lambda)}{\lambda - z_0^2}.$$
Подставляя в последнее равенство $\rho = \pi n/l + \pi/(2l)$, применяя лемму Римана—Лебега, находим $C = -1/d^2$. Тогда
$$\int\limits_0^l F_s(t)\sin\rho t dt \equiv \frac{1}{d^2(\lambda - z_0^2)}\Big[(1 - z_0^2)\sin\rho l + d\rho\cos\rho l\Big]. \tag{33}$$
Ясно, что $F_s(t)$ однозначно определяется по коэффициентам
$$\int\limits_0^l F_s(t)\sin\frac{\pi n}{l}t dt = \frac{\pi n}{dl}\frac{(-1)^n}{(\frac{\pi n}{l})^2 - z_0^2}, \quad z_0 \neq \frac{\pi n}{l}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В силу полноты системы $\{\sin \pi nt/l\}_{n\geqslant 1}$ имеем $F_s(t) = -\sin z_0 t/(d \sin z_0 l)$. Подставив данную функцию в (33), приходим к противоречию. Следовательно, неравенство (32) выполняется.

Мы доказали, что существует функция $g \in W_2^2[0, l]$ с такими же коэффициентами по системе $\{1\} \cup \{\cos z_n t\}_{n\geqslant 1}$, что и у f. В силу полноты этой системы получим $f = g$. Сравнивая (30) с формулой, записанной по необходимости, приходим к $v_1 = f'(0)$ и $v_2 = f'(l) + f(l)/d$. □

Теорема 4. *Для того чтобы функция* $W(t)$ *из представления* (23) *имела вид* (28) *с условиями* (a)—(b), *достаточно выполнения следующих асимптотик*:

$$\Delta\left(\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\right) = -d + d\left(\frac{l}{\pi n}\right)^2 \big[c - (-1)^n u + \kappa_n\big], \quad c := -\frac{2(C_0+1)}{d^2}, \tag{34}$$

$$\Delta(z_n^2) = \frac{\sin z_n l}{z_n^3}\big[h_2 - (-1)^n h_1 + \eta_n\big] \tag{35}$$

с некоторыми $h_1, h_2 \in \mathbb{C}$ *и последовательностями* $\{\kappa_n\}_{n\geqslant 1}, \{\eta_n\}_{n\geqslant 1} \in l_2$.

Доказательство. Достаточно доказать, что для построенных по формуле (29) функций выполняются включения $g \in W_2^1[0, l]$ и $G_2 \in W_2^2[0, l]$, при этом $g(0) = u$, $g(l) = c$. Подставив в (23) $\rho = \pi n/l$, получаем

$$\Delta\left(\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\right) = -d + \frac{l}{2\pi n}\int_0^{2l} W(t) \sin \frac{\pi n}{l} t\,dt.$$

Разбивая последний интеграл на два, имеем

$$\int_0^l W(l-t) \sin \frac{\pi n}{l}(l-t)dt + \int_0^l W(l+t) \sin \frac{\pi n}{l}(l+t)dt = (-1)^{n+1}\int_0^l 2dg(t) \sin \frac{\pi n}{l} t\,dt.$$

Таким образом, из (35) следует асимптотика

$$\int_0^l g(t) \sin \frac{\pi n}{l} t\,dt = \frac{l}{\pi n}\big[u - (-1)^n c - (-1)^n \kappa_n\big].$$

Согласно лемме 2 имеем $g \in W_2^1[0, l]$, а также $g(0) = u$, $g(l) = c$. Подставив в (23) $\rho = z_n$, находим

$$\Delta(z_n^2) = \frac{(C_0+1)\sin 2z_n l}{z_n} + d^2 u \frac{\sin z_n l}{z_n} + \frac{\sin^2 z_n l}{d z_n^2} + \frac{1}{2z_n}\int_0^{2l} W(t) \sin z_n t\,dt.$$

Преобразуем интеграл следующим образом:

$$\frac{1}{2}\int_0^{2l} W(t) \sin z_n t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^l W(t) \sin z_n t\,dt + \frac{1}{2}\int_0^l W(2l-t) \sin z_n(2l-t)dt =$$

$$= \int_0^l dg(l-t) \sin z_n t\,dt + \sin z_n l \int_0^l W(2l-t) \cos z_n(l-t)dt =$$

$$= \sin z_n l \int_0^l W(l+t) \cos z_n t\,dt + d\int_0^l g(t) \sin z_n(l-t)dt =$$

$$= \sin z_n l \int_0^l W(l+t) \cos z_n t\,dt + d \sin z_n l \int_0^l g(t) \cos z_n t\,dt - d \cos z_n l \int_0^l g(t) \sin z_n t\,dt.$$

Выполняя подстановку $\cos z_n l = [dz_n - 1/(dz_n)] \sin z_n l$ в последнем слагаемом и интегрируя по частям, получаем

$$\left(d^2 z_n - \frac{1}{z_n}\right) \int_0^l g(t) \sin z_n t dt = d^2 \left[u - c \cos z_n l + \int_0^l g'(t) \cos z_n t dt\right] + \int_0^l G_1(t) \cos z_n t dt.$$

В итоге с учетом (29) и $c = -2(C_0 + 1)/d^2$ имеем

$$\Delta(z_n^2) = \frac{\sin^2 z_n l}{dz_n^2} + \frac{\sin z_n l}{z_n} \int_0^l f(t) \cos z_n t dt, \quad f(t) = -G_2(l-t) - 2G_1(t) - dg(l).$$

Приравнивая полученное выражение к правой части (35) и деля на $z_n^{-1} \sin z_n l$, приходим к формуле

$$\int_0^l f(t) \cos z_n t dt = \frac{1}{z_n^2}\left[h_2 - (-1)^n h_1 + \eta_n\right] - \frac{\sin z_n l}{z_n d} = \frac{1}{z_n^2}\left[h_2 - (-1)^n \left(h_1 + \frac{1}{d^2}\right) + \tilde{\eta}_n\right], \quad n \geqslant 1,$$

где $\{\tilde{\eta}_n\}_{n\geqslant 1} \in l_2$. Применив лемму 3, получим $f \in W_2^2[0, l]$ и $G_2 \in W_2^2[0, l]$. □

Из утверждения 3 следует, что асимптотики (34) и (35) являются необходимыми для того, чтобы $\Delta(\lambda)$ была характеристической функцией. Основываясь на вышесказанном, сформулируем следующий результат.

Теорема 5. *Для того чтобы последовательность $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$ являлась спектром некоторой краевой задачи* (1)—(2) *в случае* (17)*, необходимыми и достаточными являются следующие условия*:

(i) *выполнены асимптотические формулы* (22);
(ii) *построенная по формуле* (21) *функция $\Delta(\lambda)$ удовлетворяет условиям* (34), (35);
(iii) *функция G_2, построенная с помощью последовательного применения формул* (21), (27) *и* (29)*, обращается в нуль в точке b.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кузнецова М. А.* О восстановлении дифференциальных операторов Штурма—Лиувилля на временных шкалах// Мат. заметки. — 2021. — *109*, № 1. — С. 82–100.
2. *Левитан Б. М.* Обратные задачи Штурма—Лиувилля. — М.: Наука, 1984.
3. *Марченко В. А.* Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения. — Киев: Наукова думка, 1977.
4. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — М.: Наука, 1972.
5. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их применение. — М.: Наука, 2012.
6. *Adalar İ., Ozkan A. S.* An interior inverse Sturm–Liouville problem on a time scale// Anal. Math. Phys. — 2020. — *10*. — 58.
7. *Albeverio S., Hryniv R. O., Nizhnik L. P.* Inverse spectral problems for nonlocal Sturm–Liouville operators// Inverse Probl. — 2007. — *23*, № 2. — P. 523–535.
8. *Ambarzumyan V. A.* Über eine Frage der Eigenwerttheorie// 53 — 1929. — P. 690–695.
9. *Bohner M., Peterson A.* Advances in Dynamic Equations on Time Scales. — Boston: Birkhäuser, 2003.
10. *Bohner M., Peterson A.* Dynamic Equations on Time Scales. — Boston: Birkhäuser, 2001.
11. *Bondarenko N. P., Buterin S. A., Vasiliev S. V.* An inverse spectral problem for Sturm–Liouville operators with frozen argument// J. Math. Anal. Appl. — 2019. — *472*, № 1. — P. 1028–1041.
12. *Buterin S. A.* On an inverse spectral problem for a convolution integro-differential operator// Res. Math. — 2007. — *50*, № 3. — P. 173–181.
13. *Buterin S., Kuznetsova M.* On the inverse problem for Sturm–Liouville-type operators with frozen argument: rational case// Comp. Appl. Math. — 2020. — *39*, № 1. — P. 1–15.

14. *Buterin S. A., Vasiliev S. V.* On recovering a Sturm–Liouville-type operator with the frozen argument rationally proportioned to the interval length// J. Inverse and Ill-Posed Probl. — 2019. — *27*, № 3. — P. 429–438.
15. *Freiling G., Yurko V. A.* Inverse Sturm–Liouville Problems and Their Applications. — New York: NOVA Science, 2001.
16. *Hale J.* Theory of Functional-Differential Equations. — New York: Springer-Verlag, 1977.
17. *Hilger S.* Analysis on measure chains—a unified approach to continuous and discrete calculus// Res. Math. — 1990. — *18*, № 1. — P. 18–56.
18. *Hu Y.-T., Bondarenko N. P., Yang C.-F.* Traces and inverse nodal problem for Sturm–Liouville operators with frozen argument// Appl. Math. Lett. — 2020. — *102*. — 106096.
19. *Kuznetsova M. A.* A uniqueness theorem on inverse spectral problems for the Sturm–Liouville differential operators on time scales// Res. Math — 2020. — *75*. — 44.
20. *Kuznetsova M. A., Buterin S. A., Yurko V. A.* On inverse spectral problems for Sturm–Liouville differential operators on closed sets// Lobachevskii J. Math. — 2021. — *42*, № 6. — P. 1201–1209.
21. *Nizhnik L. P.* Inverse nonlocal Sturm–Liouville problem// Inverse Probl. — 2010. — *26*, № 12. — 125006.
22. *Niven I.* Irrational Numbers. — New Jersey: Mathematical Association of America, 1956.
23. *Ozkan S.* Ambarzumyan-type theorems on a time scale// J. Inverse Ill-Posed Probl. — 2018. — *26*, № 5. — P. 633–637.
24. *Ozkan A. S., Adalar İ.* Half-inverse Sturm–Liouville problem on a time scale// Inverse Probl. — 2020. — *36*, № 2. — 025015.
25. *Wang Yu P., Zhang M., Zhao W., Wei X.* Reconstruction for Sturm–Liouville operators with frozen argument for irrational cases// Appl. Math. Lett. — 2021. — *111*. — 106590.
26. *Yurko V.* Inverse problems for Sturm–Liouville differential operators on closed sets// Tamkang J. Math. — 2019. — *50*, № 3. — P. 199–206.

Кузнецова Мария Андреевна
Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: `kuznetsovama@info.sgu.ru`