ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 208 (2022). С. 63–78
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-208-63-78

УДК 517.9

ПРИНЦИП ЛАГРАНЖА И ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА В НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

© 2022 г. **М. И. СУМИН**

Аннотация. Рассматривается регуляризация классических условий оптимальности — принципа Лагранжа и принципа максимума Понтрягина — в выпуклой задаче оптимального управления для параболического уравнения с распределенным и граничным управлениями, а также с конечным числом функциональных ограничений-равенств, задаваемых недифференцируемыми по Фреше «точечными» функционалами, представляющими собою значения решения третьей начально-краевой задачи для указанного уравнения в заранее выбранных фиксированных, возможно граничных, точках цилиндрической области изменения независимых переменных.

***Ключевые слова*:** выпуклое оптимальное управление, параболическое уравнение, граничное управление, недифференцируемый по Фреше функционал, усреднение по Стеклову, минимизирующая последовательность, двойственная регуляризация, регуляризирующий алгоритм, принцип Лагранжа, принцип максимума Понтрягина.

THE LAGRANGE PRINCIPLE AND THE PONTRYAGIN MAXIMUM PRINCIPLE IN ILL-POSED OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

© 2022 **M. I. SUMIN**

Abstract. We consider the regularization of the classical optimality conditions—the Lagrange principle and the Pontryagin maximum principle—in a convex optimal control problem for a parabolic equation with distributed and boundary controls, and also with a finite number functional equality constraints given by “point’ functionals nondifferentiable in the Fréchet sense, which are the values of the solution of the third initial-boundary-value problem for the specified equation at preselected fixed (possibly boundary) points of the cylindrical domain of the independent variables.

***Keywords and phrases*:** convex optimal control, parabolic equation, boundary control, Fréchet nondifferentiable functional, Steklov averaging, minimizing sequence, dual regularization, regularizing algorithm, Lagrange principle, Pontryagin maximum principle.

***AMS Subject Classification*:** 49K20, 49N15, 47A52

1. Введение. Статья продолжает линию работы [11] и посвящена вопросу регуляризации классических условий оптимальности (КУО) — принципа Лагранжа (ПЛ) и принципа максимума Понтрягина (ПМП) — в задачах оптимального граничного управления для линейного параболического уравнения, однако в отличие от [11], где рассматривалась задача с операторным (бесконечномерным, т.е. задаваемым оператором с бесконечномерным образом) ограничением-равенством, здесь, во-первых, задача содержит конечное число функциональных ограничений-равенств, и, во-вторых, это конечномерное ограничение-равенство задается недифференцируемыми по Фреше «точечными» функционалами, представляющими собою значения решения третьей начально-

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-01-00199_a).

краевой задачи для указанного уравнения в заранее выбранных фиксированных, возможно граничных, точках цилиндрической области изменения независимых переменных.

Хорошо известно, что для задач оптимального управления и, более общо, задач условной оптимизации характерны различные проявления некорректности, к которым относятся несуществование их решений, решений двойственных к ним задач, неустойчивость решений как по аргументу, так и по функции (см., например, [4, гл. 9]) при возмущении исходных данных задач. Подобные свойства некорректности однозначно говорят в пользу того, что на задачи условной оптимизации и оптимального управления, в целом, следует смотреть как на совокупность составляющих типичный для некорректных задач [4, 18] раздел математической теории. Безусловно, свойства некорректности оптимизационных задач в полной мере наследуют и соответствующие КУО [12], составляющие основу всей теории задач на условный экстремум, теории оптимального управления [1, 4].

Одним из главных при доказательстве КУО является предположение точного задания исходных данных оптимизационной задачи. Без этого предположения невозможно представить, например, вычисление первых вариаций составляющих ее функционалов (функционала качества, задающих ограничения задачи функционалов), т.е. основную «процедуру» при получении ПЛ в дифференциальной форме, ПМП. В то же время, как известно, сама теория КУО обязана своим происхождением, прежде всего, потребностям решения чисто практических задач [1,6]. Таким образом, два этих важных обстоятельства находятся во взаимном противоречии: с одной стороны, при доказательстве КУО необходимо знать точно исходные данные оптимизационных задач, с другой же, такое требование точности плохо согласуется с естественным желанием воспользоваться КУО, несмотря на свойства их некорректности, как инструментом для непосредственного решения различных оптимизационных задач. Представляется, что естественный выход из указанного противоречия состоит в целенаправленном отношении к КУО как к математическим объектам, составляющим специфический раздел теории некорректных задач и требующим соответствующего адекватного подхода к их регуляризации.

Регуляризацию КУО впервые было предложено проводить в работе [13]. Аргументация в пользу необходимости такой регуляризации для преодоления свойств некорректности КУО, соответствующие определения и понятия, а также обсуждение истории вопроса приведены в [11, 12] (см. также библиографию этих работ), достаточно подробное обсуждение различных иллюстративных примеров некорректности ПЛ и ПМП можно найти в [12]. Подчеркнем, одновременно, что, как и в [11, 12, 14], центральными понятиями здесь являются понятие обобщенной минимизирующей последовательности — минимизирущего приближенного решения (МПР) в смысле Дж. Варги [3] и жестко с ним связанное понятие МПР-образующего (регуляризирующего) алгоритма [11, 14]. Последнее, так же, как и в [11, 14], «встраивается» в получаемые регуляризованные ПЛ и ПМП, превращая их в соответствующие регуляризирующие алгоритмы. Другими словами, несмотря на свою некорректность, ПЛ и ПМП могут служить инструментами для устойчивого решения задач оптимального управления, но после соответствующей регуляризации, которая, как важно заметить, не меняет структурного устройства этих КУО. Базовой для регуляризованных ПЛ и ПМП является задача минимизации регулярной функции Лагранжа. «Сложность» ее решения характеризует их эффективность, возможность практической реализации. МПР, генерируемые регуляризованными КУО, представляют собою последовательности минималей функции Лагранжа, взятых при значениях двойственной переменной, которые, в свою очередь, определяются в соответствии с алгоритмом двойственной регуляризации [16, 17].

Приведем далее важные на наш взгляд аргументы, связанные с постановкой задачи настоящей работы, подчеркнув, прежде всего, что эта постановка в целях более компактного изложения существенно упрощена.

1. Так как ограничение-равенство рассматриваемой задачи оптимального управления (ОС) (см. ниже раздел 2) является конечномерным, то некорректность КУО проявляется здесь лишь в виде их возможной неустойчивости по возмущению исходных данных и нет смысла говорить об их возможной невыполнимости [12].

2. Рассматриваемую здесь задачу (ОС) в частном случае, когда ее целевой функционал f имеет простейший квадратичный вид $f(\pi) \equiv \|\pi\|^2 \equiv \|u\|^2 + \|w\|^2$ ($A_{0,1} = 0$, $A_{0,2} = 0$, $A_{0,3} = 0$, $B_1 = 1$, $B_2 = 1$), а матрица A_1 в векторном ограничении-равенстве является единичной, можно трактовать как обратную задачу дискретного наблюдения, в том числе и граничного, в которой решение параболического уравнения наблюдается (измеряется) в конечном наборе фиксированных точек, возможно на боковой поверхности цилиндрической области изменения независимых переменных, и требуется найти по этим наблюдениям (измерениям) вызывающее их воздействие-управление, в том числе граничное. Данное обстоятельство подчеркивает возможность применения получаемых в работе регуляризованных КУО для непосредственного решения актуальных с точки зрения приложений обратных задач (в данном случае, для параболических уравнений), в которых погрешности исходных данных неразрывно связаны с физической сутью их постановок.
3. Специфическая сложность задачи (ОС) состоит в недифференцируемости по Фреше задающих ограничение-равенство «точечных» функционалов, и, как следствие, в аналогичной недифференцируемости ее функционала Лагранжа. С помощью операции усреднения (сглаживания) по Стеклову эти функционалы аппроксимируются (см. раздел 3) дифференцируемыми по Фреше функционалами и, как следствие, формулируемые в разделе 4 регуляризованные КУО конструктивно порождают сходящиеся к решению исходной задачи МПР, состоящие из минималей «сглаженного» и, как следствие, дифференцируемого по Фреше, функционала Лагранжа. Помимо того, в разделе 5 показывается, как эти «сглаженные» регуляризованные КУО могут быть применены для приближенного решения задач с бесконечномерными фазовыми ограничениями-равенствами, «сосредоточенными» в точках произвольного замкнутого (возможно, с пустой внутренностью) множества, принадлежащего цилиндрической области изменения независимых переменных.
4. Дополнительную сложность задаче (ОС) добавляет наличие регулярных борелевских мер (мер Радона, в данном случае — атомических) в правых частях уравнения и краевого условия, а также в «концевом» условии сопряженной краевой задачи классического ПМП (см., например, [15]). Формулируемый и обсуждаемый в разделе 4 регуляризованный ПМП на основе сглаживания по Стеклову, «преодолевая» неустойчивость ПМП, позволяет также «обойтись» при формулировании без «абстрактных мер», которые заменяются соответствующими аппроксимирующими последовательностями обычных функций. В то же время, предельный переход в регуляризованном ПМП, подобно [15], ведет к получению «привычного» в таких задачах ПМП для оптимального управления с указанными атомическими мерами в коэффициентах сопряженной краевой задачи.

2. Постановка задачи оптимального управления с недифференцируемыми функционалами. Пусть $U \subset \mathbb{R}^1$, $W \subset \mathbb{R}^1$ — выпуклые компакты, $Q_T \equiv \Omega \times (0,T)$, $S \equiv \partial\Omega$, $S_T \equiv \{(x,t) : x \in S, t \in (0,T)\}$, Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_1 \equiv \{u \in L_2(Q_T) : u(x,t) \in U \text{ п. в. на } Q_T\}$, $\mathcal{D}_2 \equiv \{w \in L_2(S_T) : w(x,t) \in W \text{ п. в. на } S_T\}$, $\mathcal{D} \subset L_2(Q_T) \times L_2(S_T) \equiv \mathcal{H}$. Для нормы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ с элементами $\pi \equiv (u,w)$ будем использовать обозначение $\|\cdot\| \equiv \|\cdot\|_{\mathcal{H}}$.

Рассмотрим выпуклую задачу условной минимизации сильно выпуклого функционала с конечным числом функциональных ограничений-равенств

$$f(\pi) \to \min, \quad g(\pi) = 0, \quad \pi \in \mathcal{D} \subset \mathcal{H}. \tag{ОС}$$

Здесь сильно выпуклый функционал $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}^1$ и векторный функционал $g\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}^l$ задаются равенствами

$$\begin{aligned} f(\pi) \equiv{}& \langle A_{0,1}(\cdot,\cdot)z[\pi](\cdot,\cdot), z[\pi](\cdot,\cdot)\rangle_{L_2(Q_T)} \langle A_{0,2}(\cdot)z[\pi](\cdot,T), z[\pi](\cdot,T)\rangle_{L_2(\Omega)} + \\ &+ \langle A_{0,3}(\cdot,\cdot)z[\pi](\cdot,\cdot), z[\pi](\cdot,\cdot)\rangle_{L_2(S_T)} \langle B_1(\cdot,\cdot)u(\cdot,\cdot), u(\cdot,\cdot)\rangle_{L_2(Q_T)} + \langle B_2(\cdot,\cdot)w(\cdot,\cdot), w(\cdot,\cdot)\rangle_{L_2(S_T)}, \end{aligned}$$

$$g(\pi) \equiv A_1 z_m[\pi] + A_2,$$

$$z_m[\pi] \equiv (z[\pi](x_1,t_1), \ldots, z[\pi](x_m,t_m))^*(x_i,t_i) \in \overline{Q}_{\iota,T}, \quad i = 1,\ldots,m, \quad \iota \in (0,T),$$

где $z[\pi]$ — решение класса $V_2^{1,0}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ [8, гл. III] третьей начально-краевой задачи для параболического уравнения

$$z_t - \sum_{i=1}^{n} z_{x_i x_i} + a(x,t)z + u(x,t) = 0,$$
$$z(x,0) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial z}{\partial \mathcal{N}} + \sigma(x,t)z = w(x,t), \quad (x,t) \in S_T. \tag{1}$$

Здесь и ниже мы используем обозначения функциональных пространств и норм их элементов, принятые в монографии [8]; символ $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ означает скалярное произведение в гильбертовом пространстве H, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в соответствующем конечномерном евклидовом пространстве.

Ниже будут нужны следующие условия на исходные данные оптимизационной задачи (ОС):

(i) функции $A_{0,1}\colon Q_T \to \mathbb{R}^1$, $A_{0,3}\colon S_T \to \mathbb{R}^1$, $B_1\colon Q_T \to \mathbb{R}^1$, $B_2\colon S_T \to \mathbb{R}^1$ являются измеримыми по Лебегу, $A_{0,2} \in C(\overline{\Omega})$;

(ii) справедливы неравенства

$$0 \leqslant A_{0,1}(x,t) \leqslant L \text{ при п. в. } (x,t) \in Q_T, \quad 0 \leqslant A_{0,2}(x) \leqslant L \text{ при п. в. } x \in \Omega,$$
$$0 \leqslant A_{0,3}(x,t) \leqslant L \text{ при п. в. } (x,t) \in S_T, \quad \kappa < B_1(x,t) \leqslant L, \text{ при п. в. } (x,t) \in Q_T,$$
$$\kappa < B_2(x,t) \leqslant L \text{ при п. в. } (x,t) \in S_T,$$

где κ, L — некоторые положительные постоянные;

(iii) функции $a\colon Q_T \to \mathbb{R}^1$, $\sigma\colon S_T \to \mathbb{R}^1$ измеримы в смысле Лебега, $v_0 \in C(\overline{\Omega})$, A_1 — заданная $(l \times m)$-матрица, A_2 — заданный вектор из $\mathbb{R}^l$;

(iv) справедливы оценки

$$|a(x,t)| \leqslant K_1 \text{ п. в. на } Q_T, \quad |\sigma(s,t)| \leqslant K_1 \text{ п. в. на } S_T,$$

где $K_1 > 0$ — некоторая постоянная;

(v) граница S является границей класса $C^{2,\gamma}$, $\gamma \in (0,1]$, т.е. S — такая $(n-1)$-мерная поверхность класса $C^{2,\gamma}$, что область Ω лежит локально по одну сторону от S. При этом функция принадлежит классу $C^{2,\gamma}$, если она дважды гладкая и ее вторые производные принадлежат гельдеровскому классу H^γ.

Пусть F — множество всевозможных наборов исходных данных

$$\mathsf{f} \equiv \bigl\{A_{0,i},\ i = 1,2,3,\ A_i,\ i = 1,2,\ B_i,\ i = 1,2,\ a, v_0, \sigma\bigr\},$$

для каждого из которых выполняются условия (i)—(v) с постоянными L, κ, K_1, C_0, не зависящими от набора. Определим наборы невозмущенных f^0 и возмущенных f^δ исходных данных, соответственно:

$$\mathsf{f}^0 \equiv \bigl\{A_{0,i}^0,\ i = 1,2,3,\ A_i^0,\ i = 1,2,\ B_i^0,\ i = 1,2,\ a^0,\ v_0^0,\ \sigma^0\bigr\},$$
$$\mathsf{f}^\delta \equiv \bigl\{A_{0,i}^\delta,\ i = 1,2,3,\ A_i^\delta,\ i = 1,2,\ B_i^\delta,\ i = 1,2,\ a^\delta,\ v_0^\delta,\ \sigma^\delta\bigr\},$$

где $\delta \in (0, \delta_0]$, $\delta_0 > 0$ — некоторое число. Будем считать, что выполняются следующие оценки:

$$\|A_{0,1}^\delta - A_{0,1}^0\|_{\infty,Q_T}, |A_{0,2}^\delta - A_{0,2}^0|_{\Omega}^{(0)}, \|A_{0,3}^\delta - A_{0,3}^0\|_{\infty,S_T}, |A_i^\delta - A_i^0| \leqslant \delta, \quad i = 1,2,$$
$$\|B_1^\delta - B_1^0\|_{\infty,Q_T}, \|B_2^\delta - B_2^0\|_{\infty,S_T}, \|a^\delta - a^0\|_{\infty,Q_T}, |v_0^\delta - v_0^0|_{\Omega}^{(0)}, \|\sigma^\delta - \sigma^0\|_{\infty,S_T} \leqslant \delta. \tag{2}$$

Обозначим задачу (ОС), функционал f, оператор g, решение $z[\pi]$ начально-краевой задачи (1), соответствующие набору исходных данных f^δ, $\delta \in [0, \delta_0]$, через (ОС$^\delta$), f^δ, g^δ, $z^\delta[\pi]$, соответственно. Единственное решение (так как $\kappa > 0$, то функционал $f^0\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}^1$ сильно выпуклый) задачи (ОС^0), если оно существует, обозначим через π^0. Определим обобщенное значение β задачи (ОС^0):

$$\beta \equiv \beta_{+0} \equiv \lim_{\epsilon \to +0} \beta_\epsilon, \quad \beta_\epsilon \equiv \inf_{\pi \in \mathcal{D}^{0,\epsilon}} f^0(\pi), \quad \beta_\epsilon \equiv +\infty, \quad \text{если} \quad \mathcal{D}^{0,\epsilon} = \emptyset,$$

где $\mathcal{D}^{\delta,\epsilon} \equiv \{\pi \in \mathcal{D} : |g^\delta(\pi)| \leqslant \epsilon\}$, $\epsilon \geqslant 0$, $\mathcal{D}^{0,0} \equiv \mathcal{D}^0$. Очевидно, в общей ситуации $\beta \leqslant \beta_0$, где

$$\beta_0 \equiv \inf_{\pi \in \mathcal{D}^0} f^0(\pi)$$

— классическое значение в задаче (OC^0). В задаче (OC^0) ввиду сильной выпуклости f^0 имеет место равенство $\beta = \beta_0$.

Как уже отмечалось выше, центральным для нас в данной работе является понятие минимизирующего приближенного решения (МПР) в смысле Дж. Варги (см. [3]). Напомним, что МПР в задаче (OC^0) — это такая последовательность элементов $\pi^i \in \mathcal{D}$, $i = 1, 2, \ldots$, что $f^0(\pi^i) \leqslant \beta + \delta^i$, $\pi^i \in \mathcal{D}^{\epsilon^i}$ для некоторых последовательностей сходящихся к нулю неотрицательных чисел δ^i, ϵ^i, $i = 1, 2, \ldots$.

В соответствии с общим определением МПР-образующего оператора (см. [14]) введем соответствующее определение для задачи (OC^0).

Определение 1. Пусть $\delta^k \in (0, \delta_0)$, $k = 1, 2, \ldots,$ — сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Зависящий от δ^k, $k = 1, 2, \ldots$, оператор $R(\cdot, \delta^k)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных f^{δ^k}, удовлетворяющих оценкам (2) при $\delta = \delta^k$, элемент $\pi^{\delta^k} \in \mathcal{D}$ называется МПР-образующим в задаче (OC^0), если $f^0(\pi^{\delta^k}) \to \beta$, $|g^0(\pi^{\delta^k})| \to 0$, $\delta^k \to 0$, $k \to \infty$.

Определим, наконец, функционал Лагранжа задачи (OC$^\delta$):

$$L^\delta(\pi, \lambda) \equiv f^\delta(\pi) + \langle \lambda, g^\delta(\pi) \rangle, \quad \pi \in \mathcal{D}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^l,$$

и поставим двойственную задачу:

$$V^\delta(\lambda) \to \sup, \quad \lambda \in \mathbb{R}^l, \quad V^\delta(\lambda) \equiv \min_{\pi \in \mathcal{D}} L^\delta(\pi, \lambda).$$

3. Задача оптимального управления как задача выпуклого программирования, усреднение по Стеклову недифференцируемых функционалов.

3.1. Разрешимость начально-краевой задачи (1). Сформулируем прежде всего необходимые утверждения, связанные с разрешимостью начально-краевой задачи (1).

Во-первых, из условий (iii)–(v) и [8, гл. III, § 5, теорема 5.1] (см. также [10]), следует разрешимость краевых задач (прямой и сопряженной) в классе $V_2^{1,0}(Q_T)$.

Утверждение 1. *Для любой пары $\pi \equiv (u, w) \in L_2(Q_T) \times L_2(S_T) \equiv \mathcal{H}$ при любом $T > 0$ и любом наборе исходных данных $\mathsf{f} \in \mathsf{F}$ исходная (прямая) задача* (1) *однозначно разрешима в $V_2^{1,0}(Q_T)$ и справедлива оценка*[1]

$$|z[\pi]|_{Q_T} + \|z[\pi]\|_{2,S_T} \leqslant C_T(\|u\|_{2,Q_T} + \|v_0\|_{2,\Omega} + \|w\|_{2,S_T}), \tag{3}$$

в которой постоянная C_T не зависит от набора исходных данных f и пары управляющих параметров $\pi \equiv (u, w) \in \mathcal{H}$. Кроме того, однозначно разрешима в $V_2^{1,0}(Q_T)$ для любых функций $\chi \in L_2(Q_T)$, $\psi \in L_2(\Omega)$, $\omega \in L_2(S_T)$ при любом $T > 0$ и сопряженная задача

$$\begin{gathered} -\eta_t - \sum_{i=1}^n \eta_{x_i x_i} + a(x,t)\eta = \chi(x,t), \\ \eta(x,T) = \psi(x), \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \mathcal{N}} + \sigma(x,t)\eta = \omega(x,t), \quad (x,t) \in S_T. \end{gathered} \tag{4}$$

Для ее решения $\eta[\chi, \psi, \omega]$ так же, как в случае прямой задачи, справедлива оценка

$$|\eta[\chi, \psi, \omega]|_{Q_T} + \|\eta[\chi, \psi, \omega]\|_{2,S_T} \leqslant C_T^1(\|\chi\|_{2,Q_T} + \|\psi\|_{2,\Omega} + \|\omega\|_{2,S_T}), \tag{5}$$

в которой постоянная C_T^1 не зависит от набора исходных данных f и тройки $(\chi, \psi, \omega) \in L_2(Q_T) \times L_2(\Omega) \times L_2(S_T)$.

---

[1]Как и в [8], $|z|_{Q_T} \equiv \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} \|z(\cdot, t)\|_{2,\Omega} + \|z_x\|_{2,Q_T}$ — норма в банаховом пространстве $V_2^{1,0}(Q_T)$.

Во-вторых, одновременно, из условий (iii)–(v) и теорем существования обобщенного решения класса $V_2^{1,0}(Q_T)$, традиционно обозначаемого еще как $C([0,T];L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$, третьей краевой задачи для линейного параболического уравнения дивергентного вида [20, теорема 3.2] (см. также [21, утверждения 3.3, 3.4]) следует разрешимость краевых задач (прямой (1) и сопряженной (4)) в классе $V_2^{1,0}(Q_T)\cap C(\overline{Q}_T)$. Можно утверждать, что справедливо следующее утверждение, которое аналогично утверждению 1, но речь в нем идет о несколько иных свойствах решений и коэффициентов краевых задач.

Утверждение 2. *Для любой пары $\pi\equiv(u,w)\in L_p(Q_T)\times L_r(S_T)$ при любом $T>0$ и любом наборе исходных данных $\mathsf{f}\in\mathsf{F}$ однозначно разрешима в $V_2^{1,0}(Q_T)\cap C(\overline{Q}_T)$ прямая задача* (1) *и справедлива при $p>n/2+1$, $r>n+1$ оценка*[1]

$$|z[\pi]|^{(0)}_{\overline{Q}_T}\leqslant C_T(\|u\|_{p,Q_T}+|v_0|^{(0)}_{\overline{\Omega}}+\|w\|_{r,S_T}), \tag{6}$$

в которой постоянная C_T не зависит от набора исходных данных f и пары управляющих параметров $\pi\equiv(u,w)\in\mathcal{D}$. Помимо того, одновременно однозначно разрешима в $V_2^{1,0}(Q_T)\cap C(\overline{Q}_T)$ для любой тройки (χ,ψ,ω), $\chi\in L_p(Q_T)$, $\psi\in C(\overline{\Omega})$, $\omega\in L_r(S_T)$, и сопряженная задача (4). *Для ее решения также справедлива оценка*

$$|\eta[\chi,\psi,\omega]|^{(0)}_{\overline{Q}_T}\leqslant C_T(\|\chi\|_{p,Q_T}+|\psi|^{(0)}_{\overline{\Omega}}+\|\omega\|_{r,S_T}), \tag{7}$$

в которой постоянная C_T также не зависит от набора исходных данных f и тройки (χ,ψ,ω).

3.2. Задача оптимального управления как задача выпуклого программирования. В силу линейности начально-краевой задачи (1) и оценок утверждений 1, 2 при любом наборе исходных данных f значения непрерывного функционала $f\colon\mathcal{D}\to\mathbb{R}^1$ и непрерывного векторного функционала $g\colon\mathcal{D}\to\mathbb{R}^l$ определены на каждой паре управлений $\pi\in\mathcal{D}$ (функционал $f\colon\mathcal{D}\to\mathbb{R}^1$ определен на самом деле на всем пространстве $\mathcal{H}$). Одновременно функционал $f\colon\mathcal{D}\to\mathbb{R}^1$ является сильно выпуклым и его постоянная сильной выпуклости κ благодаря условиям на исходные данные не зависит от набора f.

С формальной точки зрения мы имеем задачу выпуклого программирования, невозмущенную при $\delta=0$ и возмущенную при $\delta>0$, с непрерывным сильно выпуклым функционалом качества и с векторным ограничением-равенством (с конечным числом функциональных ограничений-равенств),

$$f^\delta(\pi)\to\min,\quad g^\delta(\pi)=0,\quad \pi\in\mathcal{D}\subset\mathcal{H}. \tag{P^δ}$$

Мы не можем утверждать, что непрерывный векторный функционал $g^\delta\colon\mathcal{D}\to\mathbb{R}^l$ является аффинным непрерывным векторным функционалом на всем гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ (точнее говоря, мы не можем утверждать, что непрерывный векторный функционал $A_1^\delta z_m^\delta[\pi],\pi\in\mathcal{D}$ является линейным непрерывным на всем $\mathcal{H}$), так как предложения 1, 2, строго говоря, не обеспечивают его определенность для элементов $\pi\in\mathcal{H}\setminus L_p(Q_T)\times L_r(S_T)$. В этом состоит важная особенность задачи (P^δ). При этом векторный функционал g^δ таков, что

$$g^\delta(\alpha\pi_1+(1-\alpha)\pi_2)=\alpha g^\delta(\pi_1)+(1-\alpha)g^\delta(\pi_2)\quad\forall\pi_1,\pi_2\in\mathcal{D},\quad\alpha\in[0,1].$$

Получим в силу оценок (2) оценки отклонения возмущенных исходных данных $\{f^\delta,g^\delta\}$ от невозмущенных $\{f^0,g^0\}$ в задаче выпуклого программирования (P^0). С этой целью нам потребуются прежде всего оценки отклонения решений начально-краевой задачи (1) при возмущении управлений и исходных данных. Следствием априорных оценок утверждений 1, 2 с учетом неравенств $p>n/2+1\geqslant2$, $r>n+1\geqslant2$ является

Лемма 1. *Справедлива оценка*

$$|z[\pi]|_{Q_T}+|z[\pi]|^{(0)}_{\overline{Q}_T}\leqslant C_T,$$

[1] Как и в [8], $|z|^{(0)}_X\equiv\max_{x\in X}|z(x)|$ — норма в банаховом пространстве $C(X)$.

в которой постоянная C_T не зависит от набора исходных данных f *и пары* $\pi \in \mathcal{D}$. *Пусть* $\mathsf{f}, \mathsf{f}^\dagger \in \mathsf{F}$ *— два произвольных набора исходных данных. Для любых двух пар управлений* $\pi^1, \pi \in \mathcal{D}$ *имеет место оценка*

$$|z^\dagger[\pi^1] - z[\pi]|_{Q_T} + |z^\dagger[\pi^1] - z[\pi]|_{Q_T}^{(0)} \leqslant C_T\Big(|z[\pi]|_{Q_T}^{(0)}\|a^\dagger - a\|_{p,Q_T} + \\ + \|u^1 - u\|_{p,Q_T} + |v_0^\dagger - v_0|_\Omega^{(0)} + \|w^1 - w\|_{r,S_T} + |z[\pi]|_{Q_T}^{(0)}\|\sigma^\dagger - \sigma\|_{r,S_T}\Big), \quad (8)$$

в которой, как и выше, постоянная C_T не зависит от наборов исходных данных f, $\mathsf{f}^\dagger$ *и пар управлений* $\pi, \pi^1 \in \mathcal{D}$.

В силу непрерывности сильно выпуклого функционала $f^0\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}^1$ и классических свойств слабой компактности ограниченного выпуклого замкнутого множества и слабой полунепрерывности снизу непрерывного выпуклого функционала на выпуклом множестве в гильбертовом пространстве, а также с учетом дифференцируемости по Фреше функционала $f^0\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}^1$ в точках множества $\mathcal{D}$ (последнее устанавливается на основе оценки (3) утверждения 1 подобно тому как это сделано для функционала Лагранжа в лемме 3 ниже) можно утверждать, что справедлива

Лемма 2. *Если $\beta < +\infty$, то для любого МПР π^i, $i = 1, 2, \ldots$, в задаче (P^0) справедливы предельные соотношения*

$$f^0(\pi^i) \to \beta = \beta_0 = f^0(\pi^0), \quad \|\pi^i - \pi^0\|_{\mathcal{H}}, \quad i \to \infty.$$

В силу ограниченности множеств U, W, оценок (2), (3) и оценки (8) можем записать

$$|z^\delta[\pi] - z^0[\pi]|_{Q_T}^{(0)} \leqslant C\delta, \quad (9)$$

где постоянная C не зависит от набора исходных данных f и управления $\pi \in \mathcal{D}$. Из оценок (2), (9), в свою очередь, следуют оценки для отклонения целевого функционала

$$|f^\delta(\pi) - f^0(\pi)| \leqslant C_1\delta, \quad (10)$$

а также векторного функционала, задающего ограничение-равенство

$$|A_1^\delta z_m^\delta[\pi] + A_2^\delta - A_1^0 z_m^0[\pi] - A_2^0| = |g^\delta(\pi) - g^0(\pi)| \leqslant C_2\delta,$$

в которых постоянные $C_1, C_2 > 0$ следует считать не зависящими от δ и управления $\pi \in \mathcal{D}$. Таким образом, оценки отклонения возмущенных исходных данных $\{f^\delta, g^\delta\}$ от невозмущенных $\{f^0, g^0\}$ в задаче (P^0) получены. Кроме того, можно утверждать, что для функционалов $f^\delta, \delta \in [0, \delta_0]$ в силу предложений 1, 2 выполняется неравенство

$$|f^\delta(\pi^1) - f^\delta(\pi^2)| \leqslant L_1\|\pi^1 - \pi^2\|_{\mathcal{H}},$$

с независящей от $\pi^1, \pi^2 \in \mathcal{D}$, $\delta \in [0, \delta_0]$ постоянной $L_1 > 0$, а функционал g^δ, $\delta \in [0, \delta_0]$ благодаря тем же предложениям и компактности множеств U, W является непрерывным (и ограниченным) на $\mathcal{D}$.

3.3. Усреднение по Стеклову недифференцируемых функционалов, задающих ограничения-равенства. Мы получили формальную возмущенную задачу (P^δ) и одновременно оценки отклонения ее исходных данных от исходных данных «точной» задачи (P^0).

Эти оценки дают формальную возможность получения, по аналогии с [14], регуляризованных ПЛ в задаче (P^0), а затем, как следствие, регуляризованных ПЛ и ПМП и в исходной задаче (OC^0). При этом основную роль, как и в [14], играют точки минимума функционала Лагранжа. Однако, если мы в данный момент будем получать условия оптимальности этой точки, как точки доставляющей минимум функционалу Лагранжа в задаче его минимизации, как простейшей задачи оптимального управления, мы неизбежно получим принцип максимума, сопряженная задача в котором будет содержать атомические меры Радона в «правых» частях уравнения и краевого условия, а также в «начальном» условии на правом конце временного интервала $[0, T]$. Такая ситуация была рассмотрена ранее в работе [15]. Здесь мы поступим несколько иначе. Для того чтобы избежать в конечном итоге использования мер Радона при формулировке регуляризованных

ПМП, мы организуем еще одно возмущение в задаче (ОС$^\delta$), а именно организуем «сглаживание» функционала g^δ и будем использовать вместо «точечных» функционалов $z[\cdot](x_i,t_i)$, $i=1,\ldots,m$, более «привычные» интегральные функционалы. Это «сглаживание» гарантирует нам, кроме того, такое важное с практической точки зрения свойство как дифференцируемость по Фреше функционала Лагранжа в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ (см. ниже первое утверждение леммы 3).

Для реализации этой схемы нам потребуется ниже следующее условие:

(vi) для решения $z[\pi]$, $\pi\equiv(u,w)\in\mathcal{D}$, начально-краевой задачи (1) при $0<\iota<T$ для некоторой постоянной $\gamma\in(0,1)$ справедлива оценка

$$|z[\pi]|^{(\gamma,\gamma/2)}_{\overline{\Omega}\times[\iota,T]}\leqslant C_T^2, \tag{11}$$

в которой постоянная C_T^2 зависит лишь от T, Ω, n, p, r, C_0, ι, но не зависит, как и показатель γ, от набора исходных данных f и пары управляющих параметров $\pi\equiv(u,w)\in\mathcal{D}$.

Существуют разные группы условий на исходные данные задач оптимального управления, подобных задаче (ОС$^\delta$), которые обеспечивают выполнимость условия (vi). В частности, можно заметить, что его выполнимость вытекает из [22, следствие 3.2] (в случае полулинейного параболического уравнения дивергентного вида) с учетом того, что решение $z[\pi]$ класса $V_2^{1,0}(Q_T)$ является одновременно, в силу [21, предложение 3.3], и решением класса $W(0,T)$[1].

Введем далее «сглаженные» с помощью усреднения по Стеклову функционалы

$$z^{\delta,h,i}[\pi]\equiv\frac{1}{\operatorname{meas}(S_h(x_i,t_i)\cap Q_T)}\int\limits_{S_h(x_i,t_i)\cap Q_T}z^\delta[\pi](x,t)\,dxdt,\quad i=1,\ldots,m$$

где $S_h(x_i,t_i)$ — шар достаточно малого радиуса h с центром в $(x_i,t_i)\in\overline{Q}_{\iota,T}$ и определим формально новую возмущенную задачу

$$f^\delta(\pi)\to\inf,\quad g^{\delta,h}(\pi)=0,\quad \pi\in\mathcal{D}, \tag{$P^{\delta,h}$}$$

где

$$g^{\delta,h}(\pi)\equiv A_1^\delta z_m^{\delta,h}[\pi]+A_2^\delta,\quad z_m^{\delta,h}[\pi]\equiv(z^{\delta,h,1}[\pi],\ldots,z^{\delta,h,m}[\pi]).$$

Оценим отклонение $g^{\delta,h}(\pi)-g^0(\pi)$. Можем записать

$$\begin{aligned}\left|z^{\delta,h,i}[\pi]-z^0[\pi](x_i,t_i)\right|&=\left|\frac{1}{\operatorname{meas}(S_h(x_i,t_i)\cap Q_T)}\int\limits_{S_h(x_i,t_i)\cap Q_T}(z^\delta[\pi](x,t)-z^0[\pi](x_i,t_i))\,dxdt\right|\leqslant\\&\leqslant\frac{1}{\operatorname{meas}(S_h(x_i,t_i)\cap Q_T)}\int\limits_{S_h(x_i,t_i)\cap Q_T}|z^\delta[\pi](x,t)-z^0[\pi](x,t)|\,dxdt+\\&\quad+\frac{1}{\operatorname{meas}(S_h(x_i,t_i)\cap Q_T)}\int\limits_{S_h(x_i,t_i)\cap Q_T}|z^0[\pi](x,t)-z^0[\pi](x_i,t_i)|\,dxdt,\end{aligned}$$

откуда в силу оценки (9) и оценки (11), считая, что параметр сглаживания h достаточно мал, получаем

$$|z^{\delta,h,i}[\pi]-z^0[\pi](x_i,t_i)|\leqslant L_2(\delta+h^\gamma),$$

где постоянная $L_2>0$ не зависит от δ, h, а также от $\pi\in\mathcal{D}$. Таким образом, учитывая равномерную ограниченность решений $z^\delta[\pi]$ (см. оценки леммы 1) и оценки (2) для отклонений $|A_1^\delta-A_1^0|$, $|A_2^\delta-A_2^0|$ можем записать искомую оценку

$$|g^{\delta,h}(\pi)-g^0(\pi)|\leqslant L_3(\delta+h^\gamma), \tag{12}$$

[1] Подробности, связанные с пространством решений $W(0,T;H^1(\Omega),(H^1(\Omega))')=\Big\{y\in L_2(0,T;H^1(\Omega)):\ \dfrac{dy}{dt}\in L_2(0,T;(H^1(\Omega))')\Big\}$, обозначаемого также через $W(0,T)$, можно найти в [5, 9].

где постоянная $L_3 > 0$ не зависит от δ, h, а также от $\pi \in \mathcal{D}$. Итак, вместо задачи (P^δ) мы имеем теперь сглаженную задачу $(P^{\delta,h})$ и соответствующие оценки (10) и (12) для отклонений ее исходных данных от исходных данных задачи (P^0). Кроме того, непрерывный векторный функционал $g^{\delta,h}\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}^l$ является теперь при $\delta \geqslant 0$, $h > 0$ аффинным непрерывным векторным функционалом и на всем гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, так как предложение 1 теперь обеспечивает его определенность и для элементов $\pi \in \mathcal{H} \setminus L_p(Q_T) \times L_r(S_T)$, а также дифференцируемость по Фреше на $\mathcal{H}$ при $h > 0$.

4. Регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в задаче оптимального управления с конечным числом «точечных» ограничений-равенств. Задача $(P^{\delta,h})$ представляет собою частный случай задачи выпуклого программирования, рассматривавшейся ранее в [13,14,17]. Это задача $(P^\delta_{p,r})$ в [13], задача (P^δ) в [14, с. 256], задача (P^δ) в [17, с. 608]. Здесь в качестве гильбертова пространства допустимых элементов Z выступает пространство $\mathcal{H}$, в качестве пространства H — пространство $\mathbb{R}^l$ и отсутствуют ограничения-неравенства. Поэтому для получения анонсированных регуляризованных КУО в задаче(ОС^0) необходимо далее «расшифровать» касающиеся регуляризации КУО соответствующие утверждения этих работ в терминах исходной задачи (ОС^0).

Переходим к формулировкам регуляризованных ПЛ и ПМП в задаче (ОС^0). Определим, прежде всего, функционал Лагранжа задачи $(P^{\delta,h}) = (\text{ОС}^{\delta,h})$

$$L^{\delta,h}(\pi,\lambda) \equiv f^\delta(\pi) + \langle \lambda, g^{\delta,h}(\pi)\rangle, \quad \pi \in \mathcal{D}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^l,$$

его точку минимума $\pi^{\delta,h}[\lambda] \equiv \operatorname{argmin}\{L^{\delta,h}(\pi,\lambda) : \pi \in \mathcal{D}\}$ и двойственную задачу

$$V^{\delta,h}(\lambda) \to \sup, \quad \lambda \in \mathbb{R}^l, \quad V^{\delta,h}(\lambda) \equiv \min_{\pi \in \mathcal{D}} L^{\delta,h}(\pi,\lambda).$$

Отметим при этом, что операция min в определении целевой функции двойственной задачи законна, так как функционал $L^{\delta,h}(\cdot,\lambda)$ при каждом $\lambda \in \mathbb{R}^l$, благодаря условиям на исходные данные задачи $(P^{\delta,h})$ при $\delta \in [0,\delta_0]$, $h > 0$ является сильно выпуклым на выпуклом замкнутом множестве $\mathcal{D}$ гильбертова пространства $\mathcal{H}$. При этом минимум достигается для каждых $\delta \in [0,\delta_0]$, $\lambda \in \mathbb{R}^l$ в единственной точке $\pi^{\delta,h}[\lambda] \in \mathcal{D}$. Функция $V^{\delta,h}$ является определенной для любой точки $\lambda \in \mathbb{R}^l$ и вогнутой на $\mathbb{R}^l$, $V^{\delta,0}(\lambda) \equiv V^\delta(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}^l$, $\delta \in [0,\delta_0]$.

В отличие от функционала $L^\delta(\cdot,\lambda) \equiv L^{\delta,0}(\cdot,\lambda)$ мы можем гарантировать дифференцируемость по Фреше функционала $L^{\delta,h}(\cdot,\lambda)$ при $h > 0$. Обоснование этого факта см. ниже в лемме 3. Это обстоятельство важно с точки зрения практического нахождения минимали функционала $L^{\delta,h}(\cdot,\lambda)$.

4.1. Теорема сходимости алгоритма двойственной регуляризации. Прежде всего, сформулируем теорему сходимости алгоритма двойственной регуляризации для задачи (ОС^0). Обозначим через $\lambda^{\delta,h,\alpha(\delta,h)}$ точку максимума в задаче

$$V^{\delta,h}(\lambda) - \alpha(\delta,h)\|\lambda\|^2 \to \sup, \quad \lambda \in \mathbb{R}^l.$$

Пусть выполняется условие согласования

$$\frac{\delta + h^\gamma}{\alpha(\delta,h)} \to 0, \quad \alpha(\delta,h) \to 0, \quad \delta \to 0, \quad h \to 0. \tag{13}$$

Следствием утверждений [14, теорема 1] и [17, теорема 1] является следующая теорема.

Теорема 1 (алгоритм двойственной регуляризации в задаче оптимального управления). *Пусть выполняются условия* (i)–(vi) *и задача* (ОС^0) *разрешима. Пусть также δ^k, h^k, $k = 1,2,\ldots$ — произвольные сходящиеся к нулю последовательности положительных чисел. Тогда вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к* (ОС^0) *задача, при условии согласования* (13) *справедливы предельные соотношения*

$$(\delta^k + (h^k)^\gamma)|\lambda^{\delta^k,h^k,\alpha(\delta^k,h^k)}| \to 0, \quad f^0(\pi^{\delta^k,h^k}[\lambda^{\delta^k,h^k,\alpha(\delta^k,h^k)}]) \to f^0(\pi^0),$$
$$g^0(\pi^{\delta^k,h^k}[\lambda^{\delta^k,h^k,\alpha(\delta^k,h^k)}]) \to 0, \quad \delta^k \to 0, \quad h^k \to 0, \quad k \to \infty.$$

Таким образом, алгоритм $R(\cdot,\delta^k)$, *ставящий элемент* $R(\mathsf{f}^{\delta^k},\delta^k)\equiv\pi^{\delta^k,h^k}[\lambda^{\delta^k,h^k,\alpha(\delta^k,h^k)}]\in\mathcal{D}$ *в соответствие каждому набору исходных данных* f^{δ^k}, *удовлетворяющих оценкам* (2) *при* $\delta=\delta^k$, *является МПР-образующим в смысле определения* 1 *в задаче* (OC^0). *Одновременно, так как сильно выпуклый функционал* f^0 *является и субдифференцируемым (в смысле выпуклого анализа) в точках* $\mathcal{D}$, *то справедливо и предельное соотношение*

$$\|\pi^{\delta^k,h^k}[\lambda^{\delta^k,h^k,\alpha(\delta^k,h^k)}]-\pi^0\|\to 0,\quad \delta^k\to 0,\quad h^k\to 0,\quad k\to\infty.$$

4.2. Регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина. Переходим далее непосредственно к формулировкам регуляризованных ПЛ и ПМП. Следствием теоремы 3 из [14], в которой ввиду сильной выпуклости функционала f^δ следует регуляризирующий параметр ε^k равным нулю, является следующее утверждение.

Теорема 2 (регуляризованный ПЛ в задаче оптимального управления)**.** *Пусть выполняются условия* (i)–(vi) *и* $\delta^k\in(0,\delta_0)$, $\delta^k\to 0$, $k\to\infty$, $h^k>0$, $h^k\to 0$, $k\to\infty$ — *произвольные фиксированные последовательности.*

Для того, чтобы в задаче (OC^0) *существовало МПР, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность* $\lambda^k\in\mathbb{R}^l$, $k=1,2,\ldots$, *такая, что* $\delta^k|\lambda^k|\to 0$, $k\to\infty$, *и выполняются включения*

$$\pi^{\delta^k,h^k}[\lambda^k]\in\mathcal{D}^{\delta^k,\gamma^k},\quad \gamma^k\to 0,\quad k\to\infty, \tag{14}$$

и предельное соотношение

$$\left\langle\lambda^k, g^{\delta^k,h^k}(\pi^{\delta^k,h^k}[\lambda^k])\right\rangle\to 0,\quad k\to\infty. \tag{15}$$

Указанная последовательность $\pi^{\delta^k,h^k}[\lambda^k]$, $k=1,2,\ldots$, *является искомым МПР и*

$$\|\pi^{\delta^k,h^k}[\lambda^k]-\pi^0\|\to 0,\quad k\to\infty.$$

Другими словами, оператор, задаваемый равенством $R(\mathsf{f}^{\delta^k},\delta^k)=\pi^{\delta^k,h^k}[\lambda^k]$, *является МПР-образующим (см. определение* 1*) в задаче* (OC^0). *Одновременно с предельным соотношением* $\delta^k|\lambda^k|\to 0$, $k\to\infty$ *и соотношениями* (14), (15) *выполняется и предельное соотношение*

$$V^0(\lambda^k)\to\sup_{\lambda\in\mathbb{R}^l}V^0(\lambda)=\min_{\pi\in\mathcal{D}^0}f^0(\pi).$$

В качестве конкретной последовательности $\lambda^k\in\mathbb{R}^l$, $k=1,2,\ldots$, *может быть взята, например, последовательность* $\lambda^{\delta^k,h^k,\alpha(\delta^k,h^k)}$, $k=1,2,\ldots$, *вырабатываемая МПР-образующим алгоритмом теоремы* 1.

Получим теперь регуляризованный ПМП для задачи (OC^0) на основе теоремы 2. Рассмотрим для этого «простейшую» задачу оптимального управления

$$L^{\delta,h}(\pi,\lambda)\equiv f^\delta(\pi)+\langle\lambda,g^{\delta,h}(\pi)\rangle\to\min,\quad \pi\in\mathcal{D}, \tag{16}$$

где $\lambda\in\mathbb{R}^l$ — фиксированный вектор. Единственным решением этой задачи является управление $\pi^{\delta,h}[\lambda]$. Получим ПМП для него в задаче (16).

Введем предварительно стандартные обозначения:

$$H_1^\delta(x,t,u,\eta)\equiv -u\eta-B_1^\delta(x,t)u^2,\quad H_2^\delta(s,t,w,\eta)\equiv w\eta-B_2^\delta(s,t)w^2.$$

Лемма 3. *Пусть выполняются условия* (i)–(vi). *Справедливы следующие два утверждения*:

1. *Функционал* $L^{\delta,h}(\pi,\lambda)$, $\pi\in L_2(Q_T)\times L_2(S_T)$ *непрерывно дифференцируем по Фреше.*
2. *Пара* $\pi^{\delta,h}[\lambda]$ *при* $\lambda\in\mathbb{R}^l$, *доставляющая минимальное значение в задаче* (16), *удовлетворяет ПМП, т.е. удовлетворяет при* $\pi\equiv(u,w)=\pi^{\delta,h}[\lambda]\equiv(u^{\delta,h}[\lambda],w^{\delta,h}[\lambda])$ *соотношениям максимума*

$$\begin{aligned}H_1^\delta(x,t,u(x,t),\eta^{\delta,h}[\pi](x,t))&=\max_{u\in U}H_1^\delta(x,t,u,\eta^{\delta,h}[\pi](x,t))\ \textit{п. в. на } Q_T,\\ H_2^\delta(s,t,w(s,t),\eta^{\delta,h}[\pi](s,t))&=\max_{w\in W}H_2^\delta(s,t,w,\eta^{\delta,h}[\pi](s,t))\ \textit{п. в. на } S_T,\end{aligned} \tag{17}$$

где $\eta^{\delta,h}[\pi]$ — *решение сопряженной задачи*

$$-\eta_t - \sum_{i=1}^{n} \eta_{x_i x_i} + a^\delta(x,t)\eta + 2A_{0,1}^\delta(x,t) z^\delta[\pi](x,t) + \\ + \sum_{i=1}^{l} (A_1^{\delta *}\lambda)_i \frac{1}{\operatorname{meas}(S_h(x_i,t_i)\cap Q_T)} \chi_i^h(x,t) = 0, \qquad (18)$$

$$\eta(x,T) = -2A_{0,2}^\delta(x) z^\delta[\pi](x,T), \quad x\in\Omega,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \mathcal{N}} + \sigma^\delta(x,t)\eta = -2A_{0,3}^\delta(s,t) z^\delta[\pi](s,t), \quad (x,t)\in S_T,$$

$\chi_i^h(x,t) \equiv \{1, (x,t)\in S_h(x_i,t_i)\cap Q_T; 0, (x,t)\in Q_T\setminus S_h(x_i,t_i)\cap Q_T\}$ — *характеристическая функция множества* $S_h(x_i,t_i)\cap Q_T$*, а через* $(A_1^{\delta *}\lambda)_i$ *обозначена* i*-я компонента вектора* $A_1^{\delta *}\lambda$.

Обратно, в силу выпуклости задачи любой элемент $\pi\in\mathcal{D}$*, удовлетворяющий вместе с некоторой* $\lambda\in\mathbb{R}^l$ *соотношениям* (17), (18) *доставляет минимум в задаче* (16)*, т.е.* $\pi = \pi^{\delta,h}[\lambda]$.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Как можно заметить, для приращения функционала $L^{\delta,h}$ справедливо следующее равенство для любых двух пар $\pi^1,\pi\in\mathcal{H}$:

$$L^{\delta,h}(\pi^1,\lambda) - L^{\delta,h}(\pi,\lambda) = \\ = \left\langle A_{0,1}^\delta(\cdot,\cdot)(z^\delta[\pi^1](\cdot,\cdot) + z^\delta[\pi](\cdot,\cdot)), z^\delta[\pi^1](\cdot,\cdot) - z^\delta[\pi](\cdot,\cdot)\right\rangle_{L_2(Q_T)} + \\ + \left\langle A_{0,2}^\delta(\cdot)(z^\delta[\pi^1](\cdot,T) + z^\delta[\pi](\cdot,T)), z^\delta[\pi^1](\cdot,T) - z^\delta[\pi](\cdot,T)\right\rangle_{L_2(\Omega)} + \\ + \left\langle A_{0,3}^\delta(\cdot,\cdot)(z^\delta[\pi^1](\cdot,\cdot) + z^\delta[\pi](\cdot,\cdot)), z^\delta[\pi^1](\cdot,\cdot) - z^\delta[\pi](\cdot,\cdot)\right\rangle_{L_2(S_T)} + \\ + \left\langle B_1^\delta(\cdot,\cdot)u^1(\cdot,\cdot), u^1(\cdot,\cdot)\right\rangle_{L_2(Q_T)} - \left\langle B_1^\delta(\cdot,\cdot)u(\cdot,\cdot), u(\cdot,\cdot)\right\rangle_{L_2(Q_T)} + \\ + \left\langle B_2^\delta(\cdot,\cdot)w^1(\cdot,\cdot), w^1(\cdot,\cdot)\right\rangle_{L_2(S_T)} - \left\langle B_2^\delta(\cdot,\cdot)w(\cdot,\cdot), w(\cdot,\cdot)\right\rangle_{L_2(S_T)} + \\ + \sum_{i=1}^{m} (A_1^{\delta *}\lambda)_i \frac{1}{\operatorname{meas}(S_h(x_i,t_i)\cap Q_T)} \int_{Q_T} \chi_i^h(x,t)\big(z^\delta[\pi^1](x,t) - z^\delta[\pi](x,t)\big)\,dx\,dt.$$

Можем записать также начально-краевую задачу для приращения $\Delta z^\delta \equiv z^\delta[\pi^1] - z^\delta[\pi]$:

$$\Delta z_t^\delta - \sum_{i=1}^{n} \Delta z_{x_i x_i}^\delta + a^\delta(x,t)\Delta z^\delta + (u^1(x,t) - u(x,t)) = 0,$$

$$\Delta z^\delta(x,0) = 0, \quad x\in\Omega, \quad \frac{\partial \Delta z^\delta}{\partial \mathcal{N}} + \sigma^\delta(x,t)\Delta z^\delta = (w^1(x,t) - w(x,t)), \quad (x,t)\in S_T.$$

Преобразуя выражение для приращения функционала $L^{\delta,h}$ с учетом этой начально-краевой задачи в силу [11, лемма 3.3] (см. также [16, лемма 3]), получаем

$$L^{\delta,h}(\pi^1,\lambda) - L^{\delta,h}(\pi,\lambda) = \\ = \int_{S_T} (u^1(x,t) - u(x,t))\eta^{\delta,h}[\pi^1,\pi](x,t)\,dx\,dt - \int_{S_T} (w^1(s,t) - w(s,t))\eta^{\delta,h}[\pi^1,\pi](s,t)\,ds\,dt + \\ + \left\langle B_1^\delta(\cdot,\cdot)u^1(\cdot,\cdot), u^1(\cdot,\cdot)\right\rangle_{L_2(Q_T)} - \left\langle B_1^\delta(\cdot,\cdot)u(\cdot,\cdot), u(\cdot,\cdot)\right\rangle_{L_2(Q_T)} + \\ + \left\langle B_2^\delta(\cdot,\cdot)w^1(\cdot,\cdot), w^1(\cdot,\cdot)\right\rangle_{L_2(S_T)} - \left\langle B_2^\delta(\cdot,\cdot)w(\cdot,\cdot), w(\cdot,\cdot)\right\rangle_{L_2(S_T)}, \qquad (19)$$

где $\eta^{\delta,h}[\pi^1,\pi] \equiv \eta^{\delta,h}[\pi^1,\pi,\lambda] \in V_2^{1,0}(Q_T)$, $\eta^{\delta,h}[\pi,\pi] \equiv \eta^{\delta,h}[\pi,\pi,\lambda] \equiv \eta^{\delta,h}[\pi]$, — решение вспомогательной (промежуточной) сопряженной задачи

$$-\eta_t - \sum_{i=1}^n \eta_{x_ix_i} + a^\delta(x,t)\eta + A^\delta_{0,1}(x,t)(z^\delta[\pi^1](x,t) + z^\delta[\pi](x,t)) + \\ + \sum_{i=1}^l (A_1^{\delta*}\lambda)_i \frac{1}{\mathrm{meas}(S_h(x_i,t_i)\cap Q_T)}\chi_i^h(x,t) = 0,$$

$$\eta(x,T) = -A^\delta_{0,2}(x)(z^\delta[\pi^1](x,T) + z^\delta[\pi](x,T)), \quad x\in\Omega,$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial\mathcal{N}} + \sigma^\delta(x,t)\eta = -A^\delta_{0,3}(s,t)(z^\delta[\pi^1](s,t) + z^\delta[\pi](s,t)), \quad (x,t)\in S_T.$$

Замечая теперь, что в силу оценки (3) утверждения 1 для любого фиксированного $\pi\in\mathcal{H}$

$$\left|z^\delta[\pi^1] - z^\delta[\pi]\right|_{Q_T} + \left\|z^\delta[\pi^1] - z^\delta[\pi]\right\|_{2,S_T} \to 0 \text{ при } \|\pi^1-\pi\|_{\mathcal{H}} \to 0,$$

и, как следствие, с учетом оценки (5) того же утверждения

$$\left|\eta^{\delta,h}[\pi^1,\pi] - \eta^{\delta,h}[\pi]\right|_{Q_T} + \left\|\eta^{\delta,h}[\pi^1,\pi] - \eta^{\delta,h}[\pi]\right\|_{2,S_T} \to 0 \text{ при } \|\pi^1-\pi\|_{\mathcal{H}} \to 0,$$

можем заключить, опустив некоторые элементарные преобразования, что первое утверждение доказываемой леммы является верным.

Докажем второе утверждение. Необходимость. Пусть теперь в (19) $\pi^1,\pi\in\mathcal{D}$. В качестве π возьмем пару $\pi^{\delta,h}[\lambda] \equiv (u^{\delta,h}[\lambda], w^{\delta,h}[\lambda])$, в качестве π^1 — ее вариацию $\pi^{\delta,h}_\epsilon[\lambda] \equiv (u^{\delta,h}_\epsilon[\lambda], w^{\delta,h}_\epsilon[\lambda])$, которую определим ниже. При получении ПМП в задаче (16) нам потребуется, как и в [11], игольчатое варьирование граничного управления $w^{\delta,h}[\lambda]$ и одновременно понятие точки Лебега суммируемой функции, задаваемой на боковой поверхности S_T. Используем ниже достаточно подробное описание такого варьирования и соответствующую лемму 3.6 в [11] (см. также [19, лемма 7.2]).

Пусть далее $(\bar{x},\bar{t})$ — точка Лебега (см., например, [2, гл. I, § 1, п. 1.7]) функций

$$(u' - u^{\delta,h}[\lambda](x,t))\eta^{\delta,h}[\pi^{\delta,h}[\lambda]](x,t), \quad B_1^\delta(s,t)[(u')^2 - (u^{\delta,h}[\lambda](x,t))^2], \quad (x,t)\in Q_T, \quad u'\in U^*,$$

$(\bar{s},\bar{\tau})$ — точка Лебега функций (см. определение точки Лебега для заданной на боковой поверхности S_T функции и лемму 3.6 в [11])

$$(w' - w^{\delta,h}[\lambda](s,t))\eta^{\delta,h}[\pi^{\delta,h}[\lambda]](s,t), \quad B_2^\delta(s,t)[(w')^2 - (w^{\delta,h}[\lambda](s,t))^2], \quad (s,t)\in S_T, \quad w'\in W^*,$$

а U^*, W^* — счетные всюду плотные множества в U и W соответственно.

Благодаря классическим свойствам точек Лебега (см., в частности, [2, гл. I, § 1, п. 1.7] и лемму 3.6 в [11]), такой выбор точек $(\bar{x},\bar{t})$, $(\bar{s},\bar{\tau})$ возможен, причем лебегова мера множеств всех таких точек $(\bar{x},\bar{t})$, $(\bar{s},\bar{\tau})$ совпадает с лебеговыми мерами цилиндра Q_T и его боковой поверхности S_T соответственно.

Определим вариации управлений $u^{\delta,h}[\lambda]$, $w^{\delta,h}[\lambda]$ следующим образом:

$$u^{\delta,h}_\epsilon[\lambda](x,t) \equiv \begin{cases} u\in U^*, & \text{если } (x,t)\in P^\epsilon_{\bar{x},\bar{t}} \equiv \{\bar{x}_i - \epsilon \leqslant x_i \leqslant \bar{x}_i,\ i=1,\dots,n,\ \bar{t}-\epsilon\leqslant t\leqslant \bar{t}\}; \\ u^{\delta,h}[\lambda](x,t), & \text{если } (x,t)\in Q_T\setminus P^\epsilon_{\bar{x},\bar{t}}; \end{cases} \tag{20}$$

$$w^{\delta,h}_\epsilon[\lambda](s,t) \equiv \begin{cases} w\in W^*, & \text{если } (s,t)\in S^\epsilon_T(\bar{s},\bar{\tau}); \\ w^{\delta,h}[\lambda](s,t), & \text{если } (s,t)\in S_T\setminus S^\epsilon_T(\bar{s},\bar{\tau}); \end{cases} \tag{21}$$

где множество $S^\epsilon_T(\bar{s},\bar{\tau})$ определяется равенством 3.26 в [11]. Так как в силу оценки (6)

$$\left|z^\delta\left[\pi^{\delta,h}_\epsilon[\lambda]\right] - z^\delta\left[\pi^{\delta,h}[\lambda]\right]\right|^{(0)}_{\overline{Q}_T} \to 0, \quad \epsilon\to 0,$$

то, учитывая оценку (7), можем утверждать, что справедливо предельное соотношение

$$\left|\eta^{\delta,h}\left[\pi_\epsilon^{\delta,h}[\lambda],\pi^{\delta,h}[\lambda]\right]-\eta^{\delta,h}\left[\pi^{\delta,h}[\lambda]\right]\right|^{(0)}_{\overline{Q}_T}\to 0,\quad \epsilon\to 0.$$

Последнее предельное соотношение с учетом классических свойств точек Лебега (см., в частности, [2, гл. I, § 1, п. 1.7] и лемму 3.6 в [11]) позволяет нам для получения ПМП использовать выражение для приращения (19) функционала Лагранжа $L^{\delta,h}(\cdot,\lambda)$ и сначала вычислить первую вариацию для этого функционала в случае $\pi_\epsilon^{\delta,h}[\lambda]=(u_\epsilon^{\delta,h}[\lambda],w^{\delta,h}[\lambda])$ как предел (см. формулу (20))

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon^{n+1}}\Big(L^{\delta,h}(\pi_\epsilon^{\delta,h}[\lambda],\lambda)-L^{\delta,h}(\pi^{\delta,h}[\lambda],\lambda)\Big),$$

а затем — в случае $\pi_\epsilon^{\delta,h}[\lambda]=(u^{\delta,h}[\lambda],w_\epsilon^{\delta,h}[\lambda])$ — как предел (см. формулу (21))

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\mu_T(S_T^\epsilon(\bar s,\bar\tau))}\Big(L^{\delta,h}(\pi_\epsilon^{\delta,h}[\lambda],\lambda)-L^{\delta,h}(\pi^{\delta,h}[\lambda],\lambda)\Big).$$

В результате этих двух предельных переходов получаем неравенства

$$(u'-u^{\delta,h}[\lambda](\bar x,\bar t))\eta^{\delta,h}[\pi^{\delta,h}[\lambda]](\bar x,\bar t)+(B_1^\delta(\bar x,\bar t)(u')^2-B_1^\delta(\bar x,\bar t)(u^{\delta,h}[\lambda](\bar x,\bar t))^2)\geqslant 0\quad \forall u'\in U^*,$$
$$(w'-w^{\delta,h}[\lambda](\bar s,\bar\tau))\eta^{\delta,h}[\pi^{\delta,h}[\lambda]](\bar s,\bar\tau)+(B_2^\delta(\bar s,\bar\tau)(w')^2-B_2^\delta(\bar s,\bar\tau)(w^{\delta,h}[\lambda](\bar s,\bar\tau))^2)\geqslant 0\quad \forall w'\in W^*.$$

Так как лебегова мера множеств всех таких точек $(\bar x,\bar t)$, $(\bar s,\bar\tau)$ совпадает с лебеговыми мерами цилиндра Q_T и его боковой поверхности S_T соответственно, а функции в левых частях последних двух неравенств непрерывны по u' и по w', также соответственно, то приходим к формулировке поточечного ПМП (17) доказываемой леммы 3 в задаче (16).

Как результат, получаем ПМП для управления $\pi^{\delta,h}[\lambda]$, замечая одновременно, что доказательство достаточности соотношений ПМП в этом случае проводится аналогично доказательству достаточности в случае леммы 3.4 в [11]. □

После доказательства ПМП леммы 3 для простейшей задачи оптимального управления (16) мы можем переформулировать полученный выше регуляризованный ПЛ теоремы 2, для задачи (P^0) в форме регуляризованного ПМП. С целью указанной переформулировки прежде всего обозначим через $\Pi_m^{\delta,h}[\lambda]$ множество всех управлений из $\mathcal{D}$, удовлетворяющих ПМП леммы 3 в задаче (16). Очевидно, в нашем случае, благодаря сильной выпуклости $f^\delta(\cdot)$, это множество состоит из одного элемента $\Pi_m^{\delta,h}[\lambda]\equiv\pi_m^{\delta,h}[\lambda]$ и справедливо равенство $\pi_m^{\delta,h}[\lambda]=\pi^{\delta,h}[\lambda]\equiv\operatorname{argmin}\{L^{\delta,h}(\pi,\lambda):\pi\in\mathcal{D}\}$. Тогда непосредственным следствием теоремы 2 и леммы 3 является регуляризованный ПМП для задачи оптимального управления (OC^0).

Теорема 3 (регуляризованный ПМП в задаче оптимального управления). *Предположим, что выполняются условия* (i)–(vi). *Тогда все утверждения теоремы* 2 *остаются справедливыми и в том случае, если в них* $\pi^{\delta^k,h^k}[\lambda^k]$ *заменяется везде на* $\pi_m^{\delta^k,h^k}[\lambda^k]$.

5. О приближенном решении задачи оптимального управления с бесконечномерным поточечным фазовым ограничением-равенством на основе регуляризованных принципа Лагранжа и принципа максимума Понтрягина. Выше была рассмотрена регуляризация ПЛ и ПМП в задаче оптимального управления (OC^0) с конечным числом «точечных» ограничений-равенств

$$g(\pi)\equiv A_1 z_m[\pi]+A_2=0,$$
$$z_m[\pi]\equiv(z[\pi](x_1,t_1),\dots,z[\pi](x_m,t_m))^*(x_i,t_i)\in\overline{Q}_{\iota,T},\quad i=1,\dots,m,\quad \iota\in(0,T).$$

В данном разделе мы обсудим как эти результаты можно применить для приближенного решения задачи оптимального управления с бесконечномерным поточечным фазовым ограничением-равенством

$$f^\delta(\pi)\to\min,\quad \tilde g^\delta(\pi)=0,\quad \pi\in\mathcal{D}\subset\mathcal{H},\qquad (\mathrm{OC}^\delta_{\mathrm{IDE}})$$

которая отличается от задачи (OC^δ) лишь тем, что вместо конечномерного ограничения-равенства содержит бесконечномерное (вообще говоря) поточечное фазовое ограничение-равенство

$$\tilde{g}^\delta[\pi](x,t) = 0, \quad (x,t) \in \mathcal{Q} \subseteq \overline{Q}_{\iota,T},$$

где

$$\tilde{g}^\delta[\pi](x,t) \equiv \tilde{A}_1^\delta(x,t)z[\pi](x,t) + \tilde{A}_2^\delta(x,t),$$

$\mathcal{Q}$ — произвольное замкнутое множество из $\overline{Q}_{\iota,T}$, $\tilde{A}_1^\delta, \tilde{A}_2^\delta \colon \mathcal{Q} \to \mathbb{R}^1$ — заданные непрерывные функции, $\delta \in [0,\delta_0]$. При этом «роль» матрицы A_1^δ и вектора A_2^δ задачи (OC^δ) здесь играют соответственно непрерывные функции $\tilde{A}_1^\delta$, $\tilde{A}_2^\delta$, для которых имеют место оценки для отклонений

$$|\tilde{A}_i^\delta - \tilde{A}_i^0|_{\mathcal{Q}}^{(0)} \leqslant \delta, \quad i = 1,2,$$

заменяющие оценки $|A_i^\delta - A_i^0| \leqslant \delta$, $i = 1,2$, в (2). Подчеркнем, что в отличие от задачи (OC^0), в которой множество $\mathcal{Q}$ состоит из конечного числа точек в $\overline{Q}_{\iota,T}$, в задаче (OC_{IDE}^0) оно может быть произвольным замкнутым множеством из $\overline{Q}_{\iota,T}$.

Предположим, что точная задача $\mathrm{OC}_{\mathrm{IDE}}^\delta$ разрешима. Ее (единственное) решение обозначим через π^0. Введем конечную $1/N(m)$-сеть $\{(x_1,t_1),\dots,(x_m,t_m)\}$, $m = 1,2,\dots$, множества $\mathcal{Q}$, $N(m) \to \infty$ при $m \to \infty$, и обозначим, как и в задаче (OC^δ),

$$z_m^\delta[\pi] \equiv \Big(z^\delta[\pi](x_1,t_1),\dots,z^\delta[\pi](x_m,t_m)\Big).$$

Определим вспомогательную задачу

$$f^\delta(\pi) \to \min, \quad \tilde{g}_m^\delta(\pi) = 0, \quad \pi \in \mathcal{D} \subset \mathcal{H}, \tag{OC_m^δ}$$

где

$$\tilde{g}_m^\delta(\pi) \equiv \Big\{\tilde{A}_1^\delta(x_1,t_1)z^\delta[\pi](x_1,t_1) + \tilde{A}_2^\delta(x_1,t_1),\dots,\tilde{A}_1^\delta(x_m,t_m)z^\delta[\pi](x_m,t_m) + \tilde{A}_2^\delta(x_m,t_m)\Big\}.$$

Можно утверждать, что ввиду разрешимости задачи $\mathrm{OC}_{\mathrm{IDE}}^\delta$ является разрешимой и точная задача (OC_m^0) при каждом $m = 1,2,\dots$. Ее единственное решение обозначим через π_m^0. Можно заметить, что задача (OC_m^δ) соответствует задаче (OC^δ) с $(m \times m)$-матрицей A_1^δ, у которой на главной диагонали стоят элементы $\tilde{A}_1^\delta(x_i,t_i)$, $i = 1,\dots,m$, а все остальные ее элементы равны нулю. Покажем, что справедливо предельное соотношение

$$\|\pi_m^0 - \pi^0\|_{\mathcal{H}} \to 0, \quad m \to \infty. \tag{22}$$

Заметим для этого прежде всего, что, так как π_m^0, $m = 1,2,\dots$ — последовательность равномерно ограниченных функций (U, W — выпуклые компакты), то можно без ограничения общности считать, что π_m^0 слабо в $\mathcal{H}$ сходится к некоторой паре управлений $\bar{\pi} \in \mathcal{D}$. Покажем, что $\bar{\pi} = \pi^0$, что, в конечном итоге, и обеспечит справедливость предельного соотношения (22).

Действительно, во-первых, так как $f^0 \colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}^1$ непрерывный выпуклый функционал, то он является и слабо полунепрерывным снизу. По этой причине в силу слабой сходимости π_m^0 к $\bar{\pi}$ при $m \to \infty$ получаем, что

$$f^0(\bar{\pi}) \leqslant \liminf_{m\to\infty} f^0(\pi_m^0). \tag{23}$$

Так как при этом $f^0(\pi_m^0) \leqslant f^0(\pi^0)$ (в силу равенства $\tilde{g}^0(\pi^0) = 0$), то

$$f^0(\pi_0) \geqslant \limsup_{m\to\infty} f^0(\pi_m^0), \quad f^0(\bar{\pi}) \leqslant f^0(\pi^0). \tag{24}$$

Покажем, во-вторых, что $\tilde{g}^0(\bar{\pi}) = 0$. Но это равенство является следствием следующих обстоятельств. Первое из них, благодаря оценке (6), обеспечивающей непрерывность линейного оператора

$$z[\cdot] \colon L_p(Q_T) \times L_r(S_T) \to C(\overline{Q}_T),$$

позволяет утверждать, что из слабой без ограничения общности сходимости

$$\pi_m^0 \xrightarrow[m\to\infty]{} \bar{\pi}$$

в пространстве $L_p(Q_T) \times L_r(S_T)$ вытекает и слабая сходимость

$$z^0[\pi^0_m] \xrightarrow[m\to\infty]{} z^0[\bar\pi]$$

в пространстве $C(\overline{Q}_T)$, т.е. (см. [7, гл. VIII, § 3, теорема 3]) поточечная сходимость

$$z^0[\pi^0_m] \xrightarrow[m\to\infty]{} z^0[\bar\pi]$$

всюду в $C(\overline{Q}_T)$. Так как одновременно в силу условия (vi) функции семейства $z^0[\pi^0_m]$, $m = 1, 2, \ldots$, являются равномерно ограниченными и равностепенно непрерывными и, к тому же $\tilde g^0(\pi^0_m) = 0$, то указанная поточечная сходимость приводит к доказываемому равенству $\tilde g^0(\bar\pi) = 0$. Последнее равенство и полученное выше неравенство $f^0(\bar\pi) \leqslant f^0(\pi^0)$ позволяют заключить, что $\bar\pi = \pi^0$ и, стало быть, в силу единственности решения π^0 исходной задачи, π^0_m слабо в $\mathcal{H}$ сходится при $m \to \infty$ к π^0, причем

$$f^0(\pi^0) \leqslant \liminf_{m\to\infty} f^0(\pi^0_m)$$

в силу (23). Таким образом, объединяя (23) и (24), получаем

$$\limsup_{m\to\infty} f^0(\pi^0_m) \leqslant f^0(\pi^0) \leqslant \liminf_{m\to\infty} f^0(\pi^0_m).$$

Последние неравенства означают, что

$$\lim_{m\to\infty} f^0(\pi^0_m) = f^0(\pi^0).$$

Последняя сходимость в совокупности с доказанной слабой сходимостью π^0_m к π^0 при $m \to \infty$ и тем фактом, что f^0 — сильно выпуклый и дифференцируемый по Фреше функционал (дифференцируемость по Фреше устанавливается так же, как и аналогичная дифференцируемость функционала Лагранжа из первого утверждения леммы 3), позволяют утверждать, что предельное соотношение (22) справедливо.

Благодаря предельному соотношению (22) и конечной $1/N(m)$-сети при достаточно больших m мы можем сколь угодно точно аппроксимировать оптимальное управление π^0 в задаче $\mathrm{OC}^\delta_{\mathrm{IDE}}$ посредством оптимальных управлений π^0_m задач (OC^δ_m). Наконец, каждое из управлений π^0_m можно сколь угодно точно аппроксимировать посредством элементов генерируемых регуляризованными ПЛ и ПМП теорем 2, 3 МПР с достаточно большими порядковыми номерами. Тем самым оптимальное управление π^0 в задаче $\mathrm{OC}^\delta_{\mathrm{IDE}}$ с бесконечномерным фазовым ограничением-равенством может быть сколь угодно точно аппроксимировано посредством элементов МПР с достаточно большими порядковыми номерами генерируемых регуляризованными ПЛ и ПМП указанных теорем, полученных для задач с конечномерными ограничениями-равенствами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979.
2. *Бесов О. В., Ильин В.П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1975.
3. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. — М.: Наука, 1977.
4. *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации. — М.: МЦНМО, 2011.
5. *Гаевский Г., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1978.
6. *Гамкрелидзе Р. В.* Математические работы Л. С. Понтрягина// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 1998. — *60*. — С. 5–23.
7. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1984.
8. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.
9. *Осипов Ю. С., Васильев Ф. П., Потапов М. М.* Основы метода динамической регуляризации. — М.: Изд-во МГУ, 1999.
10. *Плотников В. И.* Теоремы единственности, существования и априорные свойства обобщенных решений// Докл. АН СССР. — 1965. — *165*, № 1. — С. 33–35.

11. *Сумин М. И.* О регуляризации классических условий оптимальности в выпуклом оптимальном управлении// Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *207*. — С. 120–143.
12. *Сумин М. И.* Регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении и обратных задачах// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2019. — *25*, № 1. — С. 279–296.
13. *Сумин М. И.* Регуляризованная параметрическая теорема Куна—Таккера в гильбертовом пространстве// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2011. — *51*, № 9. — С. 1594–1615.
14. *Сумин М. И.* О регуляризации классических условий оптимальности в выпуклых задачах оптимального управления// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2020. — *26*, № 2. — С. 252–269.
15. *Сумин М. И.* Двойственная регуляризация и принцип максимума Понтрягина в задаче оптимального граничного управления для параболического уравнения с недифференцируемыми функционалами// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2011. — *17*, № 1. — С. 229–244.
16. *Сумин М. И.* Регуляризованный градиентный двойственный метод решения обратной задачи финального наблюдения для параболического уравнения// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2004. — *44*, № 11. — С. 2001–2019.
17. *Сумин М. И.* Регуляризация в линейно выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2007. — *47*, № 4. — С. 602–625.
18. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1986.
19. *Casas E.* Pontryagin's principle for state-constrained boundary control problems of semilinear parabolic equations// SIAM J. Control Optim. — 1997. — *35*. — P. 1297–1327.
20. *Casas E., Raymond J.-P., Zidani H.* Pontryagin's principle for local solutions of control problems with mixed control-state constraints// SIAM J. Control Optim. — 2000. — *39*, № 4. — P. 1182–1203.
21. *Raymond J.-P., Zidani H.* Hamiltonian Pontryagin's principles for control problems governed by semilinear parabolic equations// Appl. Math. Optim. — 1999. — *39*, № 2. — P. 143–177.
22. *Raymond J.-P., Zidani H.* Pontryagin's principle for state-constrained control problems governed by parabolic equations with unbounded controls// SIAM J. Control Optim. — 1998. — *36*, № 6. — P. 1853–1879.

Сумин Михаил Иосифович
Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина;
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: `m.sumin@mail.ru`