



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 208 (2022). С. 79–90
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-208-79-90

УДК 515.12

СЦЕПЛЕННОСТЬ СЕМЕЙСТВ МНОЖЕСТВ, СУПЕРКОМПАКТНОСТЬ И НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

© 2022 г. А. Г. ЧЕНЦОВ

Аннотация. Исследуется конструкция, имеющая смысл абстрактного аналога суперрасширения топологического пространства, а также некоторые новые типы суперкомпактных топологических пространств. Кроме того, изучаются соотношения, связывающие ультрафильтры и максимальные сцепленные системы на широко понимаемом измеримом пространстве.

Ключевые слова: сцепленность, суперкомпактность, топология, ультрафильтр.

LINKEDNESS OF FAMILIES OF SETS, SUPERCOMPACTNESS, AND SOME GENERALIZATIONS

© 2022 А. G. CHENTSOV

ABSTRACT. We examine a construction that has the meaning of an abstract analog of a superextension of a topological space and new types of supercompact topological spaces. In addition, we study relations between ultrafilters and maximal linked systems on measurable spaces.

Keywords and phrases: linkedness, supercompactness, topology, ultrafilter.

AMS Subject Classification: 54A09, 54A10, 54B05

1. Введение. Свойство компактности и свойства типа компактности играют в современной математике исключительно важную роль; см. [2]. Одним из таких свойств является суперкомпактность; см. [2, 5.11] и [12, гл. VII, § 4]. В связи с изучением данного свойства, а также вопроса о построении суперрасширения топологического пространства (ТП), особо отметим оригинальные работы [27–29] (как правило, рассматриваются суперрасширения T_1 -пространств; здесь и ниже используем терминологию [25]). Точками пространства суперрасширения являются [12, гл. VII, § 4] максимальные сцепленные системы (МСС) замкнутых множеств в ТП (обычно в T_1 -пространстве). Напомним, что сцепленным называется семейство множеств, у которого любые два множества пересекаются; сцепленными являются все фильтры (см. [4, гл. I, § 6]). Наиболее интересными свойствами обладают максимальные сцепленные подсемейства заданных априори семейств множеств. Что касается самого заданного априори семейства, то в [2, 12, 27–29] оно предполагалось совпадающим с решеткой замкнутых множеств T_1 -пространства. Можно однако поставить вопрос шире, а именно можно предполагать заданной некоторую первичную «измеримую» структуру; в качестве таковой можно принять π -систему [3, с. 14] с «нулем» и «единицей». Для данной π -системы можно рассматривать сцепленные подсемейства, выделяя среди последних максимальные; упомянутые максимальные сцепленные подсемейства исходной π -системы именуем далее МСС на данной π -системе или просто МСС, если понятно, о какой π -системе идет речь. При этом фильтры π -системы являются сцепленными подсемействами последней, а ультрафильтры (u/f), т. е.

максимальные фильтры, являются МСС. В то же время возможны МСС, не являющиеся у/ф. Такие МСС называем собственными. Отмечено, что пространство МСС в волмэновском оснащении суперкомпактно и может рассматриваться в виде абстрактной версии суперрасширения.

Семейство МСС на π -системе общего вида оснащается двумя сравнимыми топологиями волмэновского и стоуновского типов (см. [18, 19, 22] и др.), которые в совокупности реализуют битопологическое пространство (БТП). Аналогичное БТП реализуется на множестве у/ф при оснащении топологиями волмэновского и стоуновского типов. Эти топологии индуцируются, как оказалось, волмэновской и стоуновской топологиями на множестве МСС. Иными словами, БТП с точками в виде у/ф может рассматриваться как подпространство БТП с точками в виде МСС. Указаны случаи, когда оба вышеупомянутых БТП вырождаются (волмэновская и стоуновская топологии совпадают), а также условия, при которых, напротив, оба БТП не вырождены в том смысле, что волмэновская и стоуновская топологии различаются. Отдельно рассматривается вопрос о существовании и представлении собственных МСС. При отсутствии собственных МСС пространство у/ф с топологией волмэновского типа оказывается суперкомпактным (соответствующие условия на π -систему будут указаны).

Наконец, представляется важным вопрос об условиях делимости пространства МСС в волмэновском оснащении. Для классического варианта суперрасширения они указаны, например, в [12, гл. VII, предложение 4.16]; имеется в виду делимость суперрасширения T_4 -пространства. Однако в абстрактной версии суперрасширения, когда предваряющая «измеримая» структура задается π -системой, упомянутые условия [12, гл. VII, предложение 4.16] оказываются ограничительными и, в ряде случаев, неприменимыми. Так или иначе, они не охватывают ряд случаев, когда делимость топологии волмэновского типа имеет место. В этой связи предлагаются более общие достаточные условия. Указаны также некоторые следствия, касающиеся вопроса об делимости пространства у/ф с топологией волмэновского типа.

2. Общие сведения и обозначения. Используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связки; $\emptyset$ — пустое множество); через $\triangleq$ обозначаем равенство по определению. Принимаем аксиому выбора. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Если x и y — объекты, то через $\{x; y\}$ обозначаем их неупорядоченную пару (множество, содержащее x , y и не содержащее никаких других элементов). Для произвольного объекта z в виде $\{z\} \triangleq \{z; z\}$ имеем синглетон, содержащий z . Объектами являются множества, а потому для произвольных объектов u и v в виде $(u, v) \triangleq \{\{u\}; \{u; v\}\}$ имеем [10, с. 67] упорядоченную пару (УП) с первым элементом u и вторым элементом v . Если же h есть какая-либо УП, то через $\text{pr}_1(h)$ и $\text{pr}_2(h)$ обозначаем первый и второй элементы h соответственно; эти элементы однозначно определяются условием $h = (\text{pr}_1(h), \text{pr}_2(h))$. Для любых трех объектов u , v и w полагается, что $\{u; v; w\} \triangleq \{u; v\} \cup \{w\}$.

Если H — множество, то через $\mathcal{P}(H)$ обозначаем семейство всех подмножеств (п/м) H ; тогда $\mathcal{P}'(H) \triangleq \mathcal{P}(H) \setminus \{\emptyset\}$ (семейство всех непустых п/м H) и $\text{Fin}(H)$ — семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(H)$. Для любых двух множеств A и B через B^A обозначаем (см. [10, гл. II, § 6]) множество всех отображений (функций), действующих из A в B ; разумеется, выражение $f \in B^A$ тождественно тому, что $f: A \rightarrow B$. Значения отображений обозначаем традиционно: $f(x) \in B$, где $f \in B^A$ и $x \in A$. Если A, B — множества, $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то $f^1(C) \triangleq \{f(x) : x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ есть образ множества C при действии f , а $(f|C) \in B^C$ есть сужение f на C : $(f|C)(\tilde{x}) \triangleq f(\tilde{x}) \forall \tilde{x} \in C$.

2.1. Операции над семействами. Если $\mathbf{M}$ — множество и $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{M}))$ (т. е. $\mathcal{M}$ есть непустое семейство п/м $\mathbf{M}$), то

$$\mathcal{C}_{\mathbf{M}}[\mathcal{M}] \triangleq \{\mathbf{M} \setminus M : M \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{M}))$$

есть семейство п/м $\mathbf{M}$, двойственное к $\mathcal{M}$. Непустому семейству $\mathcal{A}$ и множеству B сопоставляем след

$$\mathcal{A}|_B \triangleq \{A \cap B : A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B))$$

$\mathcal{A}$ на множество B . Произвольному непустому семейству $\mathfrak{X}$ сопоставляем семейства $\{\cup\}(\mathfrak{X})$, $\{\cap\}(\mathfrak{X})$, $\{\cup\}_\#(\mathfrak{X})$ и $\{\cap\}_\#(\mathfrak{X})$, определяемые в [19, раздел 2] (имеются в виду семейство всех объединений подсемейств $\mathfrak{X}$, семейство всех пересечений непустых подсемейств $\mathfrak{X}$, семейства всех конечных объединений и конечных пересечений множеств из $\mathfrak{X}$ соответственно).

2.2. Специальные семейства. До конца настоящего раздела фиксируем непустое множество $\mathbf{I}$. В виде

$$\pi[\mathbf{I}] \triangleq \left\{ \mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) \mid (\emptyset \in \mathcal{I}) \ \& \ (\mathbf{I} \in \mathcal{I}) \ \& \ (A \cap B \in \mathcal{I} \ \forall A \in \mathcal{I} \ \forall B \in \mathcal{I}) \right\} \quad (1)$$

имеем семейство всех π -систем п/м $\mathbf{I}$ с «нулем» и «единицей»; π -системы из семейства

$$\tilde{\pi}^0[\mathbf{I}] \triangleq \left\{ \mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}] \mid \forall L \in \mathcal{I} \ \forall x \in \mathbf{I} \setminus L \ \exists \Lambda \in \mathcal{I} : (x \in \Lambda) \ \& \ (\Lambda \cap L = \emptyset) \right\} \quad (2)$$

называем отделимыми; кроме того, пусть

$$\begin{aligned} \pi_\#^*[\mathbf{I}] \triangleq \left\{ \mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}] \mid \forall I_1 \in \mathcal{I} \ \forall I_2 \in \mathcal{I} \ \forall I_3 \in \mathcal{I} \right. \\ \left. ((I_1 \cap I_2 \neq \emptyset) \ \& \ (I_2 \cap I_3 \neq \emptyset) \ \& \ (I_1 \cap I_3 \neq \emptyset)) \implies (I_1 \cap I_2 \cap I_3 \neq \emptyset) \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

В виде $(\text{alg})[\mathbf{I}] \triangleq \{ \mathcal{A} \in \pi[\mathbf{I}] \mid \mathbf{I} \setminus A \in \mathcal{A} \ \forall A \in \mathcal{A} \}$ имеем семейство всех алгебр п/м $\mathbf{I}$, а

$$(\text{top})[\mathbf{I}] \triangleq \left\{ \tau \in \pi[\mathbf{I}] : \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau \ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau) \right\}$$

есть семейство всех топологий на $\mathbf{I}$; $(\text{clos})[\mathbf{I}] \triangleq \{ \mathbf{C}_\mathbf{I}[\tau] : \tau \in (\text{top})[\mathbf{I}] \}$ — семейство всех замкнутых топологий [1, с. 98] на $\mathbf{I}$. Последние три семейства являются решетками. В этой связи введем семейство

$$(\text{LAT})_0[\mathbf{I}] \triangleq \{ \mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}] \mid A \cup B \in \mathcal{I} \ \forall A \in \mathcal{I} \ \forall B \in \mathcal{I} \}$$

всех решеток п/м $\mathbf{I}$. Итак,

$$(\text{alg})[\mathbf{I}] \subset (\text{LAT})_0[\mathbf{I}], \quad (\text{top})[\mathbf{I}] \subset (\text{LAT})_0[\mathbf{I}], \quad (\text{clos})[\mathbf{I}] \subset (\text{LAT})_0[\mathbf{I}].$$

Полуалгебры п/м $\mathbf{I}$ являются π -системами из семейства $\pi[\mathbf{I}]$, но, вообще говоря, не являются решетками п/м $\mathbf{I}$. Из вышеупомянутых построений следует, что именно π -системы (см. (1)–(3)) образуют очень общий класс подсемейств $\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I}))$, охватывающий структуры теории меры и топологии. Если $\mathcal{I}$ — семейство и H — множество, то

$$[\mathcal{I}](H) \triangleq \{ I \in \mathcal{I} \mid H \subset I \} \in \mathcal{P}(\mathcal{I}). \quad (4)$$

2.3. Базы и предбазы топологических пространств. Через $(\text{BAS})[\mathbf{I}]$ и $(\text{p-BAS})[\mathbf{I}]$ обозначаем семейства всех открытых баз и предбаз на множестве $\mathbf{I}$ соответственно; обозначения соответствуют [19, раздел 2] и [23, (1.8), (1.9)] (имеются в виду базы и предбазы некоторых топологий на $\mathbf{I}$). Если же $\tau \in (\text{top})[\mathbf{I}]$, то через $(\tau\text{-BAS})_0[\mathbf{I}]$ и $(\text{p-BAS})_0[\mathbf{I}; \tau]$ обозначаем соответственно семейства всех открытых баз и предбаз конкретного ТП $(\mathbf{I}, \tau)$; см. [19, раздел 2] и [23, раздел 1]. Ясно, что $\{\cup\}(\beta) \in (\text{top})[\mathbf{I}]$ при $\beta \in (\text{BAS})[\mathbf{I}]$; кроме того, $\{\cap\}_\#(\kappa) \in (\text{BAS})[\mathbf{I}]$ при $\kappa \in (\text{p-BAS})[\mathbf{I}]$.

2.4. Покрывтия, суперкомпактность. Если $\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I}))$, то в виде

$$(\text{COV})[\mathbf{I}|\mathcal{I}] \triangleq \left\{ \kappa \in \mathcal{P}'(\mathcal{I}) : \mathbf{I} = \bigcup_{X \in \kappa} X \right\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{I}))$$

имеем семейство всех покрытий $\mathbf{I}$ множествами из $\mathcal{I}$. Пусть

$$((\text{SC})\text{-p-BAS})[\mathbf{I}] \triangleq \left\{ \chi \in (\text{p-BAS})[\mathbf{I}] \mid \forall \mathcal{G} \in (\text{COV})[\mathbf{I}|\chi] \ \exists G_1 \in \mathcal{G} \ \exists G_2 \in \mathcal{G} : \mathbf{I} = G_1 \cup G_2 \right\}; \quad (5)$$

элементы семейства (5) называем суперкомпактными открытыми предбазами; при $\tau \in (\text{top})[\mathbf{I}]$ полагаем

$$((\text{SC})\text{-p-BAS})_0[\mathbf{I}; \tau] \triangleq ((\text{SC})\text{-p-BAS})[\mathbf{I}] \cap (\text{p-BAS})_0[\mathbf{I}; \tau],$$

получая семейство (возможно пустое) суперкомпактных открытых предбаз конкретного ТП $(\mathbf{I}, \tau)$. В виде

$$((\mathbb{S}\mathbb{C})\text{-top})[\mathbf{I}] \triangleq \{\tau \in (\text{top})[\mathbf{I}] \mid ((\mathbb{S}\mathbb{C})\text{-p-BAS})_0[\mathbf{I}; \tau] \neq \emptyset\} \quad (6)$$

имеем семейство всех топологий, превращающих $\mathbf{I}$ в суперкомпактное ТП. Итак, ТП суперкомпактно тогда и только тогда, когда оно обладает открытой предбазой, для которой из всякого покрытия «единицы» множествами данной предбазы можно извлечь бинарное подпокрытие. Если $\tau \in ((\mathbb{S}\mathbb{C})\text{-top})[\mathbf{I}]$ и при этом $(\mathbf{I}, \tau)$ есть T_2 -пространство, то $(\mathbf{I}, \tau)$ называем суперкомпактом (см. [2, 5.11]). Суперкомпактность — топологическое свойство (сохраняется при действии гомеоморфизмов). Напомним здесь же, что компактное T_2 -пространство называют компактом (см. [2, 1.1]).

3. Максимальные сцепленные системы и ультрафильтры. Всюду в дальнейшем фиксируем непустое множество E и π -систему $\mathcal{L} \in \pi[E]$; рассматриваем $(E, \mathcal{L})$ в качестве (широко понимаемого) измеримого пространства (ИП). Введем в рассмотрение семейство

$$\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle[E] \triangleq \{\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) \mid \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset \ \forall \Sigma_1 \in \mathcal{E} \ \forall \Sigma_2 \in \mathcal{E}\} \quad (7)$$

всех сцепленных подсемейств $\mathcal{L}$, а также семейство всех МСС на $\mathcal{L}$:

$$\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E] \triangleq \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle[E] \mid \forall \mathcal{S} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle[E] (\mathcal{E} \subset \mathcal{S} \implies (\mathcal{E} = \mathcal{S}))\}. \quad (8)$$

Как уже отмечалось, фильтры (на $\mathcal{L}$) являются сцепленными подсемействами $\mathcal{L}$ (см. (7)):

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \triangleq \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) \mid (\emptyset \notin \mathcal{F}) \ \& \ (A \cap B \in \mathcal{F} \ \forall A \in \mathcal{F} \ \forall B \in \mathcal{F}) \ \& \ ([\mathcal{L}](F) \subset \mathcal{F} \ \forall F \in \mathcal{F})\} \subset \subset \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle[E]. \quad (9)$$

Введем в рассмотрение центрированные подсемейства $\mathcal{L}$, полагая, что

$$(\text{Cen})[\mathcal{L}] \triangleq \left\{ \mathcal{Z} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) : \bigcap_{Z \in \mathcal{Z}} Z \neq \emptyset \ \forall \mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{Z}) \right\}.$$

Через $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ обозначим семейство всех u/ϕ на π -системе $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) &\triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \mid \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) (\mathcal{U} \subset \mathcal{F} \implies (\mathcal{U} = \mathcal{F}))\} = \\ &= \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \mid \forall L \in \mathcal{L} (L \cap \mathcal{U} \neq \emptyset \ \forall \mathcal{U} \in \mathcal{U}) \implies (L \in \mathcal{U})\} = \\ &= \{\mathcal{U} \in (\text{Cen})[\mathcal{L}] \mid \forall \mathcal{V} \in (\text{Cen})[\mathcal{L}] (\mathcal{U} \subset \mathcal{V} \implies (\mathcal{U} = \mathcal{V}))\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{F}^*(\mathcal{L})). \end{aligned} \quad (10)$$

Итак, u/ϕ — суть максимальные центрированные подсемейства π -системы $\mathcal{L}$ и только они. Поскольку, как легко видеть,

$$\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E] = \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle[E] \mid \forall L \in \mathcal{L} (L \cap \Sigma \neq \emptyset \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}) \implies (L \in \mathcal{E})\}, \quad (11)$$

имеем из (10), (11) следующее весьма очевидное равенство:

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \{\mathcal{U} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E] \mid U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U} \ \forall U_1 \in \mathcal{U} \ \forall U_2 \in \mathcal{U}\}; \quad (12)$$

при проверке (12) следует учитывать (см. (4)) очевидные свойства: $\forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E]$

$$([\mathcal{L}](\Sigma) \subset \mathcal{E} \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}) \ \& \ (E \in \mathcal{E}). \quad (13)$$

Итак, u/ϕ являются МСС; называем МСС $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ собственной. Простой пример собственной МСС имеется в [12, гл. VII, 4.18].

Пример. Напомним пример [12, гл. VII, 4.18] с несущественными изменениями, полагая, что $E = \{1; 2; 3\}$. Полагаем здесь, что $\mathcal{L} = \mathcal{P}(E)$. Пусть $\mathcal{H} \triangleq \{\{1; 2\}; \{2; 3\}; \{1; 3\}\}$ и $\mathcal{E} \triangleq \mathcal{H} \cup \{E\}$. Тогда $\mathcal{H} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle[E]$ и $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ (итак, $\mathcal{E}$ — собственная МСС).

Если $L \in \mathcal{L}$, то (см. (10)) полагаем

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid L \in \mathcal{U}\} = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid L \cap U \neq \emptyset \ \forall U \in \mathcal{U}\}. \quad (14)$$

В виде семейства всех множеств (14) реализуется, как легко видеть, π -система

$$(\mathbb{U}\mathbb{F})[E; \mathcal{L}] \triangleq \{\Phi_{\mathcal{L}}(L) : L \in \mathcal{L}\} \in \pi[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})] \quad (15)$$

и, в частности, открытая база: $(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}] \in (\text{BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$; порождаемая этой базой топология стоуновского типа

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] \triangleq \{\cup\}((\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}]) \in (\text{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})] \quad (16)$$

превращает $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ в нульмерное [25, 6.2] T_2 -пространство

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]). \quad (17)$$

Замечание. Легко видеть (см. (14)), что

$$(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}] \subset \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] \cap \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]].$$

Если $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$, то (17) — нульмерный компакт (компактное T_2 -пространство), а последнее вложение превращается в равенство.

Другая схема (по смыслу схема Волмэна) связана с множествами, имеющими вид

$$\mathbb{F}_{\mathcal{C}}^{\natural}[\mathcal{L}|H] \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \exists U \in \mathcal{U} : U \subset H\} \quad \forall H \in \mathcal{P}(E). \quad (18)$$

При этом, как легко видеть (см. (18)), имеем предбазу

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}^{\natural}[\mathcal{L}] \triangleq \{\mathbb{F}_{\mathcal{C}}^{\natural}[\mathcal{L}|\Lambda] : \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]\} = \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}]] \in (\text{p-BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})], \quad (19)$$

порождающую следующую топологию волмэновского типа:

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E \rangle \triangleq \{\cup\}(\{\cap\}_{\#}(\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}^{\natural}[\mathcal{L}])) \in (\text{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]. \quad (20)$$

При этом (см. (19), (20); [26, теорема 6.2]) в виде

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E \rangle) \quad (21)$$

имеем компактное T_1 -пространство. Итак, в виде (17) и (21) имеем два ТП с «единицей» $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Аналогичные пространства создаются для случая, когда точками являются МСС. Итак, при $L \in \mathcal{L}$ в виде

$$\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0^0[E|L] \triangleq \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E] \mid L \in \mathcal{E}\} = \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E] \mid L \cap \Sigma \neq \emptyset \forall \Sigma \in \mathcal{E}\} \quad (22)$$

имеем (см. [19, предложение 6.2], [23, (3.1)]) естественный аналог (14). Пусть, кроме того,

$$\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_{\text{op}}^0[E|H] \triangleq \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E] \mid \exists \Sigma \in \mathcal{E} : \Sigma \subset H\} \quad \forall H \in \mathcal{P}(E). \quad (23)$$

С учетом (22), (23) вводим два непустых семейства

$$(\hat{\mathcal{C}}_0^*[E; \mathcal{L}] \triangleq \{\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0^0[E|L] : L \in \mathcal{L}\}) \ \& \ (\hat{\mathcal{C}}_{\text{op}}^0[E; \mathcal{L}] \triangleq \{\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_{\text{op}}^0[E|\Lambda] : \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]\}), \quad (24)$$

обладающие свойством

$$\hat{\mathcal{C}}_0^*[E; \mathcal{L}] = \mathbf{C}_{\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E]}[\hat{\mathcal{C}}_{\text{op}}^0[E; \mathcal{L}]],$$

характеризующим (см. (24)) естественную двойственность; $\hat{\mathcal{C}}_{\text{op}}^0[E; \mathcal{L}] \in (\text{p-BAS})[\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E]]$ порождает (см. [19, раздел 5]) суперкомпактную топологию волмэновского типа:

$$\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L} \rangle \triangleq \{\cup\}(\{\cap\}_{\#}(\hat{\mathcal{C}}_{\text{op}}^0[E; \mathcal{L}])) \in ((\mathbb{SC})\text{-top})[\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E]]. \quad (25)$$

Отметим, что (см. [23, §3]) при этом в виде

$$(\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E], \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L} \rangle) \quad (26)$$

реализуется суперкомпактное T_1 -пространство, являющееся абстрактным аналогом суперрасширения [12, гл. VII, 4.12]. В то же время, как легко видеть, предбаза $\hat{\mathcal{C}}_0^*[E; \mathcal{L}] \in (\text{p-BAS})[\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E]]$ порождает топологию стоуновского типа:

$$\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L} \rangle \triangleq \{\cup\}(\{\cap\}_{\#}(\hat{\mathcal{C}}_0^*[E; \mathcal{L}])) \in (\text{top})[\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E]]; \quad (27)$$

при этом (см. [19, предложение 6.4]) в виде

$$(\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E], \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L} \rangle) \quad (28)$$

реализуется нульмерное T_2 -пространство (см., в частности, [19, предложение 6.1, (6.5)]). Отметим, что (см. [19, предложения 5.3, 6.5])

$$(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E \rangle = \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L} \rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}) \ \& \ (\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] = \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L} \rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}). \quad (29)$$

Итак, (17) есть подпространство ТП (28), а (21) — подпространство ТП (26). Согласно [19, предложение 7.1] получаем следующее предложение.

Теорема 1. *Топологии (25) и (27) сравнимы и при этом $\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L} \rangle \subset \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L} \rangle$.*

Из данной теоремы с учетом (29) получаем важное свойство сравнимости топологий (16), (20):

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E \rangle \subset \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]. \quad (30)$$

Если X — множество, $\tau_1 \in (\text{top})[X]$, $\tau_2 \in (\text{top})[X]$ и $\tau_1 \subset \tau_2$, то триплет (X, τ_1, τ_2) будем называть битопологическим пространством (БТП); если при этом $\tau_1 = \tau_2$, то БТП (X, τ_1, τ_2) называем вырожденным (в связи с теорией и применениями БТП см. [26]). Мы получили следующие два БТП:

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E \rangle, \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]), \quad (\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E], \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L} \rangle, \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L} \rangle); \quad (31)$$

свойства (29) позволяют рассматривать первое (в (31)) БТП как подпространство второго.

Отметим несколько частных случаев. Прежде всего напомним, что при $L \in \mathcal{L}$

$$[\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L) = \{\Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}] \mid L \subset \Lambda\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)). \quad (32)$$

Множества из семейства (32) называем квазиокрестностями L ; все они содержатся в $\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]$, т. е. являются «двойственно измеримыми»; свойство принадлежности к $\mathcal{L}$ рассматриваем как «измеримость». Итак, определено пересечение всех множеств семейства (32), которое, однако, может не принадлежать $\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]$, т. е. не быть «двойственно измеримым». Если же

$$\bigcap_{\Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L)} \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}] \quad \forall L \in \mathcal{L}, \quad (33)$$

то каждое множество из $\mathcal{L}$ обладает наименьшей квазиокрестностью. Согласно [20, теорема 2.2] справедливо следующее

Утверждение 1. *Если выполнено (33), то справедливо равенство*

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \left\{ \mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) : \forall L \in \mathcal{L} (L \in \mathcal{U}) \vee \left(E \setminus \left(\prod_{\Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L)} \Lambda \right) \in \mathcal{U} \right) \right\}. \quad (34)$$

В связи с (34) отметим, что при $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E] \cup (\text{top})[E]$ свойство (33) истинно; при этом

$$(\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]) \implies \left(\prod_{\Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L)} \Lambda = L \quad \forall L \in \mathcal{L} \right) \quad (35)$$

(в случае $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$ имеем равенство $\mathcal{L} = \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]$). Если же $\mathcal{L} = \tau$, где $\tau \in (\text{top})[E]$, то при $L \in \mathcal{L}$ наименьшей квазиокрестностью L является замыкание L в ТП (E, τ) . Согласно [20, теорема 5.1] имеем полезное положение.

Утверждение 2. *Если выполнено условие (33), то $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E \rangle = \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]$.*

Из предложения 1 и (35) следует, в частности, известное представление у/ф для ИП с алгеброй множеств: фильтр является у/ф тогда и только тогда, когда для каждого измеримого множества либо оно само, либо его дополнение принадлежит данному фильтру. В дополнение к предложению 2 напомним свойство, отмеченное в [19, раздел 7]: если $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E] \cup (\text{top})[E]$, то

$$\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L} \rangle = \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L} \rangle, \quad (36)$$

а получающееся при этом «единое» ТП $(\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E], \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L} \rangle) = (\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E], \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L} \rangle)$ является нульмерным суперкомпактом (нульмерным суперкомпактным T_2 -пространством). Итак, при

$$(\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]) \vee (\mathcal{L} \in (\text{top})[E]) \quad (37)$$

оба БТП (31) вырождены (действительно, в силу (36) вырождено второе в (31) БТП, а тогда в силу (29) и (36) вырождено и первое в (31) БТП). Ясно также, что при условии (33) в виде «единого» ТП (см. предложение 2) $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E \rangle) = (\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E])$ реализуется непустой нульмерный компакт (в этой связи см. [21, теорема 5]).

В связи с рассмотрением случая, когда вышеупомянутые БТП не вырождены, напомним сначала о некоторых свойствах плотности. Для этого введем тривиальные фильтры: если $x \in E$, то $(\mathcal{L}\text{-triv})[x] \triangleq \{L \in \mathcal{L} \mid x \in L\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$; при этом (см. [21, раздел 3], [15, § 8])

$$((\mathcal{L}\text{-triv})[x] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \ \forall x \in E) \iff (\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]).$$

С учетом этого полагаем, пока не оговорено противное, что $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ (условие отделимости π -системы). Тогда E погружается в $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ посредством оператора

$$\mathfrak{L} \triangleq ((\mathcal{L}\text{-triv})[x])_{x \in E} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})^E.$$

При $\tau \in (\text{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$ и $H \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}))$ через $\text{cl}(H, \tau)$ обозначим замыкание H в ТП $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \tau)$; в качестве H можно использовать $\mathfrak{L}^1(\Sigma)$, где $\Sigma \in \mathcal{P}(E)$. Согласно [15, предложение 1, (3.2)]

$$\text{cl}(\mathfrak{L}^1(\Sigma), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \Sigma \cap U \neq \emptyset \ \forall U \in \mathcal{U}\} \ \forall \Sigma \in \mathcal{P}(E). \quad (38)$$

Вместе с тем (см. [20, предложение 7.1]) имеем свойство

$$\text{cl}(\mathfrak{L}^1(L), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E \rangle) = \text{cl}(\mathfrak{L}^1(L), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) = \Phi_{\mathcal{L}}(L) \ \forall L \in \mathcal{L}. \quad (39)$$

В частности, $\text{cl}(\mathfrak{L}^1(E), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E \rangle) = \text{cl}(\mathfrak{L}^1(E), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ (свойство «универсальной» плотности).

Пусть до конца настоящего раздела $\tau \in (\text{top})[E]$, ТП (E, τ) удовлетворяет аксиоме T_1 и $\mathcal{L} = \mathbf{C}_E[\tau]$. Тогда (см. [25, 1.5]) $\{x\} \in \mathcal{L} \ \forall x \in E$. Из (2) следует, что $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ и мы можем использовать (38), (39).

Теорема 2. Пусть T_1 -пространство (E, τ) не является дискретным, т. е. $\tau \neq \mathcal{P}(E)$. Тогда при $\mathcal{L} = \mathbf{C}_E[\tau]$

$$(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E \rangle \neq \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) \ \& \ (\mathbf{T}_0\langle E|\mathcal{L} \rangle \neq \mathbf{T}_*\langle E|\mathcal{L} \rangle). \quad (40)$$

Доказательство. Итак, пусть ТП (E, τ) не является дискретным; как следствие,

$$\mathcal{L} = \mathbf{C}_E[\tau] \neq \mathcal{P}(E), \quad \mathcal{P}(E) \setminus \mathcal{L} \neq \emptyset.$$

Выберем произвольно $\mathbb{H} \in \mathcal{P}(E) \setminus \mathcal{L} \neq \emptyset$, получая, что (см. (38))

$$\text{cl}(\mathfrak{L}^1(\mathbb{H}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \mathbb{H} \cap U \neq \emptyset \ \forall U \in \mathcal{U}\}.$$

Поскольку $\mathbb{H} \notin \mathcal{L}$, то (см. [17, теорема 8.1]) имеем свойство

$$\text{cl}(\mathfrak{L}^1(\mathbb{H}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E \rangle) \neq \text{cl}(\mathfrak{L}^1(\mathbb{H}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]), \quad (41)$$

где $\mathfrak{L}^1(\mathbb{H}) \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}))$. Из (41) следует первое положение в (40). Второе положение вытекает из первого с учетом (29). $\square$

Таким образом, в случае, рассматриваемом обычно при построении суперрасширения (пространство МСС на семействе замкнутых множеств T_1 -пространства) оба БТП в (31) являются невырожденными.

4. Об условиях отождествимости ультрафильтров и максимальных сцепленных систем. Полагаем в дальнейшем, что $\mathcal{L} \in \pi[E]$, если не оговорены дополнительные условия. Напомним, что $\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ есть множество всех собственных МСС. Пример такой МСС был рассмотрен ранее. Сейчас рассмотрим одно общее представление множества всех собственных МСС (см. [20, раздел 5]).

Утверждение 3. Справедливо равенство

$$\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E] \mid \exists \Sigma_1 \in \mathcal{E} \ \exists \Sigma_2 \in \mathcal{E} \ \exists \Sigma_3 \in \mathcal{E} : \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_3 = \emptyset\}. \quad (42)$$

Доказательство. Обозначим через Ω множество в правой части (42). В силу (9), (10) каждый $u/\mathfrak{f}$ (более того, каждый фильтр) замкнут относительно конечных пересечений, а потому

$$\Omega \subset \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}). \quad (43)$$

Пусть $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Тогда $\mathcal{V} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ и в силу (12) для некоторых $V_1 \in \mathcal{V}$ и $V_2 \in \mathcal{V}$ имеет место свойство $V_1 \cap V_2 \notin \mathcal{V}$, а потому $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{V}$. С учетом (10) имеем для некоторого $V_3 \in \mathcal{V}$ свойство $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \emptyset$. В итоге $\mathcal{V} \in \Omega$, чем и завершается проверка вложения

$$\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \subset \Omega.$$

С учетом (43) получаем требуемое равенство. $\square$

Теорема 3. *Следующие два условия эквивалентны:*

- (a) $\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E] = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$;
- (b) $\mathcal{L} \in \pi_*^\sharp[E]$.

Доказательство. Учитывая (3), проверим эквивалентность отрицаний:

- (a') $\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E] \neq \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$;
- (b') $\exists I_1 \in \mathcal{L} \exists I_2 \in \mathcal{L} \exists I_3 \in \mathcal{L} : (I_1 \cap I_2 \neq \emptyset) \& (I_2 \cap I_3 \neq \emptyset) \& (I_1 \cap I_3 \neq \emptyset) \& (I_1 \cap I_2 \cap I_3 = \emptyset)$.

Пусть истинно (a'). Тогда

$$\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \neq \emptyset.$$

Выберем произвольно

$$\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}).$$

В силу предложения 3 существуют множества $\Sigma_1 \in \mathcal{E}$, $\Sigma_2 \in \mathcal{E}$ и $\Sigma_3 \in \mathcal{E}$, обладающие свойством

$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_3 = \emptyset.$$

Поскольку $\mathcal{E}$ сцеплено и $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}$, имеем (b'). Итак, (a') $\implies$ (b').

Пусть истинно (b'). Выберем и зафиксируем $M_1 \in \mathcal{L}$, $M_2 \in \mathcal{L}$ и $M_3 \in \mathcal{L}$, обладающие свойствами

$$(M_1 \cap M_2 \neq \emptyset) \& (M_2 \cap M_3 \neq \emptyset) \& (M_1 \cap M_3 \neq \emptyset) \& (M_1 \cap M_2 \cap M_3 = \emptyset). \quad (44)$$

Тогда

$$\mathcal{M} \triangleq \{M_1; M_2; M_3\} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle[E]$$

(см. (7)). С учетом леммы Цорна $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ для некоторой МСС $\mathcal{N} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E]$. Тогда $M_1 \in \mathcal{N}$, $M_2 \in \mathcal{N}$ и $M_3 \in \mathcal{N}$ таковы, что $M_1 \cap M_2 \cap M_3 = \emptyset$. В силу предложения 3 получаем, что

$$\mathcal{N} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}).$$

Поэтому истинно (a'). Итак, (b') $\implies$ (a'). Следовательно, (a') $\iff$ (b'), что достаточно для того, чтобы (a) $\iff$ (b). $\square$

Заметим, что в [23] указано большое число содержательных примеров широко понимаемых ИП $(\tilde{E}, \tilde{\mathcal{L}})$, $\tilde{E} \neq \emptyset$, со свойством $\tilde{\mathcal{L}} \in \pi_*^\sharp[\tilde{E}]$ (см. (3)); сейчас отметим особо построения [23, § 6], касающиеся сохранения свойства принадлежности семейству (3) при произведениях, понимаемых в декартовом и в «ящичном» (имеется в виду аналогия с базой ящичной топологии; см. [7, гл. 3, задачи]) смыслах. Отметим одно полезное свойство (см. [23, предложение 4.1]).

Утверждение 4. *Если $\mathcal{L} \in \pi_*^\sharp[E]$, то $\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle[E] = (\text{Cen})[\mathcal{L}]$.*

Доказательство. Свойство $(\text{Cen})[\mathcal{L}] \subset \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle[E]$ следует из определений в общем случае π -системы $\mathcal{L}$. Пусть $\mathcal{L} \in \pi_*^\sharp[E]$. Выберем произвольно сцепленное семейство $\mathcal{M} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle[E]$. С использованием леммы Цорна можно указать МСС $\mathcal{N} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E]$, для которой $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$. В силу теоремы 3 $\mathcal{N} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, а потому $\mathcal{N}$ замкнуто относительно конечных пересечений (см. (9), (10)); тогда согласно (9)

$$\bigcap_{U \in \mathcal{K}} U \neq \emptyset \quad \forall \mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{N}) \quad (45)$$

(действительно, $\emptyset \notin \mathcal{N}$). Но $\text{Fin}(\mathcal{M}) \subset \text{Fin}(\mathcal{N})$, а потому из (45) вытекает, что $\mathcal{M} \in (\text{Cen})[\mathcal{L}]$. Итак, $\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle[E] \subset (\text{Cen})[\mathcal{L}]$ установлено. $\square$

Отметим на содержательном уровне одно полезное применение предложения 2, следуя [23, замечание 10.1] и имея в виду абстрактную задачу о достижимости с ограничениями асимптотического характера (ОАХ). Сейчас отметим только одно ключевое обстоятельство (подробнее см. в [23, замечание 10.1]).

Мы рассматриваем E как пространство обычных решений задачи о достижимости в регулярном [25, 1.5] ТП $(\mathbf{H}, \tau)$ на значениях оператора $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^E$ (условия на $\mathbf{h}$ указаны в [23, § 10]). Полагаем, что на E задается некоторая первичная измеримая структура в виде π -системы $\mathcal{L} \in \pi_*^\# [E] \cap \tilde{\pi}^0 [E]$, а также семейство $\mathfrak{E} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle [E]$, определяющее ОАХ (см. [11, 14, 16]). Итак, $\mathfrak{E}$ есть сцепленное подсемейство π -системы $\mathcal{L}$. Тогда семейство $\{\cap\}_\#(\mathfrak{E})$ всех конечных пересечений множеств из $\mathfrak{E}$ является базой фильтра (в силу предложения 2 семейство $\mathfrak{E}$ центрировано, а стало быть, все множества из $\{\cap\}_\#(\mathfrak{E})$ непусты). В силу [23, (10.10)] получаем (при условии на $\mathbf{h}$, связанном с реализацией представления, подобного [23, (10.3)]) свойство непустоты множества притяжения (МП), т. е. факт существования асимптотически достижимых элементов регулярно-го пространства $(\mathbf{H}, \tau)$. При этом свойство центрированности $\mathfrak{E}$, получающееся в силу предложения 2, приводит к тому, что, как уже отмечалось, $\{\cap\}_\#(\mathfrak{E})$ есть база фильтра. В этой связи отметим построения [11, 16].

Заметим, что ОАХ, определяемые посредством $\mathfrak{E}$, могут, в частности, соответствовать случаю задач управления, в которых допускается ослабление стандартных ограничений в духе [5, гл. III, IV]; в этом случае МП может, в частности, играть роль асимптотического аналога области достижимости (см. [8, 14] и др.). Заметим, что в абстрактных задачах о достижимости с ОАХ у/ф выступают в роли обобщенных элементов, что в логическом отношении подобно применению обобщенных управлений в [6, 9, 14].

5. Об условиях отделимости топологий волмэновского типа. Напомним, что компактное ТП (21) в общем случае $\mathcal{L} \in \pi[E]$ удовлетворяет аксиоме T_1 . Аналогичное свойство реализуется для суперкомпактного ТП (26); отметим в этой связи достаточные условия T_2 -отделимости пространства суперрасширения в [12, гл. VII, 4.16] (имеется в виду построение суперрасширения T_4 -пространства, когда реализуется аксиома T_2 для самого суперрасширения). В общем случае пространства МСС на π -системе $\mathcal{L}$ аналоги условий [12, гл. VII, 4.16] могут быть излишне жесткими и не охватывать случаи, когда отделимость упомянутого пространства заведомо имеет место. Речь идет о следующем условии на выбор $\mathcal{L} \in \pi[E]$: $\forall L_1 \in \mathcal{L} \forall L_2 \in \mathcal{L}$

$$(L_1 \cap L_2 = \emptyset) \implies (\exists \Lambda_1 \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L_1) \exists \Lambda_2 \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L_2) : \Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset) \quad (46)$$

(если $\mathcal{L} = \mathbf{C}_E[\tau]$, где $\tau \in (\text{top})[E]$, то (46) сводится к аксиоме T_4 ; в общем же случае $\mathcal{L}$ в (46) реализуется аналог условия, используемого в [12, гл. VII, 4.16]). Заметим, кстати, что при $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$ (46) выполнено. Если же $\mathcal{L} = \tau \in (\text{top})[E]$, то свойство (46) может нарушаться (это имеет место уже в случае вещественной прямой с обычной $|\cdot|$ -топологией); в то же время согласно (36) $\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E]$ с топологией волмэновского типа отделимо. В этой связи введем сейчас другое условие; для этого сначала отметим, что при $H \in \mathcal{P}(E)$

$$]\mathcal{L}[(H) \triangleq \{L \in \mathcal{L} \mid L \subset H\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}); \quad (47)$$

$\emptyset \in]\mathcal{L}[(H)$. Теперь введем требуемое (более общее) условие: $\forall L_1 \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\} \forall L_2 \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$

$$(L_1 \cap L_2 = \emptyset) \implies (\exists \Lambda_1 \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L_1) \exists \Lambda_2 \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L_2) :]\mathcal{L}[(\Lambda_1 \cap \Lambda_2) = \{\emptyset\}). \quad (48)$$

Разумеется, (46) $\implies$ (48). В связи с (48) см. [24, (3.13)]. Заметим, что при $L \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$ непременно $\{L\} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle [E]$ и, стало быть, $L \in \mathcal{E}$ для некоторого $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E]$.

Теорема 4. Если выполнено условие (48), то ТП (26) является хаусдорфовым.

Доказательство. Пусть выполнено условие (48). Выберем произвольно

$$\mathcal{U} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E], \quad \mathcal{V} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E] \setminus \{\mathcal{U}\}.$$

В силу максимальной $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ имеем

$$(\mathcal{U} \setminus \mathcal{V} \neq \emptyset) \ \& \ (\mathcal{V} \setminus \mathcal{U} \neq \emptyset).$$

Выберем $V \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$. Тогда в силу (11) для некоторого $U \in \mathcal{U}$ имеем свойство $U \cap V = \emptyset$. В частности, $U \in \mathcal{L}$ и $V \in \mathcal{L}$; в силу сцепленности семейств $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ получаем, что $U \neq \emptyset$ и $V \neq \emptyset$, а тогда

$$(U \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}) \& (V \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}).$$

С учетом (48) можно указать $W_1 \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](U)$ и $W_2 \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](V)$, для которых

$$\mathcal{L}[(W_1 \cap W_2) = \{\emptyset\}]. \quad (49)$$

Разумеется (см. (23)–(25)),

$$\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_{\text{op}}^0[E|W_1] \in \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L} \rangle, \quad \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_{\text{op}}^0[E|W_2] \in \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L} \rangle;$$

при этом (см. (23)), конечно,

$$\mathcal{U} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_{\text{op}}^0[E|W_1], \quad \mathcal{V} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_{\text{op}}^0[E|W_2],$$

а потому мы в виде двух вышеупомянутых множеств имеем окрестности МСС $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ соответственно. Покажем, что эти окрестности не пересекаются. Действительно, допустим противное: пусть упомянутые два множества пересекаются и

$$\mathcal{M} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_{\text{op}}^0[E|W_1] \cap \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_{\text{op}}^0[E|W_2]. \quad (50)$$

Тогда $\mathcal{M} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E]$, причем для некоторых $M_1 \in \mathcal{M}$ и $M_2 \in \mathcal{M}$ реализуются вложения $M_1 \subset W_1$ и $M_2 \subset W_2$ (см. (23), (50)). Тогда $M_1 \cap M_2 \in \mathcal{L}[(W_1 \cap W_2)]$ и в силу (49) $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, что противоречит сцепленности $\mathcal{M}$. Полученное противоречие показывает, что

$$\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_{\text{op}}^0[E|W_1] \cap \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_{\text{op}}^0[E|W_2] = \emptyset.$$

Итак, $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ обладают непересекающимися окрестностями. Поскольку выбор $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ был произвольным, установлено, что ТП (26) является хаусдорфовым. $\square$

Следствие 1. Если выполнено условие (48), то ТП (26) является суперкомпактом.

Доказательство получается комбинацией (25) и теоремы 4. Заметим, что условие (46) является, конечно, достаточным для отделимости ТП (26), но, как уже отмечалось, излишне жестким; в частности, оно не охватывает случай открытых МСС. Новое условие (48) свободно от этого недостатка.

Утверждение 5. Если $\tau \in (\text{top})[E]$ и $\mathcal{L} = \tau$, то условие (48) выполнено.

Доказательство следует из [24, предложение 3.2]. Отметим теперь естественное применение теоремы 4 к исследованию ТП (21).

Теорема 5. Если выполнено условие (48), то ТП (21) является хаусдорфовым.

Доказательство получается непосредственной комбинацией (29) и теоремы 4. Теперь уже вполне очевидно

Следствие 2. При условии (48) ТП (21) является компактом.

В дальнейшем $\mathbb{R}$ — вещественная прямая. Рассмотрим один «нестандартный» вариант T_2 -пространства МСС с топологией вольтмановского типа.

Пример (см. [24, раздел 5]). Пусть $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$ и $E =]a, b[$ (непустой открытый интервал). Пусть, кроме того,

$$\mathcal{L} = \{]\text{pr}_1(z), \text{pr}_2(z)[: z \in [a, b] \times [a, b] \}$$

(здесь и ниже все промежутки $\mathbb{R}$, понимаемые в обычном порядковом смысле, обозначаем посредством квадратных скобок, см. [13, § 1.3]; допускаем при этом произвольные соотношения для концевых точек, так что $\emptyset$ также рассматриваем как промежуток). Итак, $\mathcal{L}$ есть семейство всех открытых интервалов (включая пустой), содержащихся в E , $\mathcal{L} \in \pi[E]$. Как показано в [24, предложение 4.1], в рассматриваемом случае $\mathcal{L}$ удовлетворяет условию (48), а потому ТП (26) в данном конкретном случае является суперкомпактом.

Отметим также некоторые примеры, рассмотренные в [24, § 7], для которых выполнено (46), но которые не охватываются «топологическим» вариантом [12, гл. VII, 4.16], поскольку в них π -система не является, вообще говоря, семейством замкнутых множеств в ТП.

5.1. Пространство-стрелка. Сохраняем предположения предыдущего примера в отношении чисел a и b , но полагаем, что $E = [a, b[$, а $\mathcal{L} = \{ [\text{pr}_1(z), \text{pr}_2(z)[: z \in [a, b] \times [a, b] \}$. Получающийся вариант ИП $(E, \mathcal{L})$ (здесь $\mathcal{L} \in \pi[E]$; более того, $\mathcal{L}$ — полуалгебра п/м E) называем пространством-стрелкой. Условие (46) в рассматриваемом случае выполнено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. — М.: Едиториал УРСС, 2004.
2. Архангельский А. В. Компактность// Итоги науки техн. Сер. Совр. пробл. мат. Фундам. напр. — 1989. — 50. — С. 7–128.
3. Булинский А. В., Ширяев А. Н. Теория случайных процессов. — М.: Физматлит, 2005.
4. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. — М.: Наука, 1968.
5. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. — М.: Наука, 1977.
6. Гамкрелидзе Р. В. Основы оптимального управления. — Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1977.
7. Келли Дж. Л. Общая топология. — М.: Наука, 1981.
8. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
9. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974.
10. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. — М.: Мир, 1970.
11. Пыткеев Е. Г., Ченцов А. Г. Волмэновский компактификатор и его применение для исследования абстрактной задачи о достижимости// Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Комп. науки. — 2018. — 28, № 2. — С. 199–212.
12. Федорчук В. В., Филиппов В. В. Общая топология. Основные конструкции. — М.: Физматлит, 2006.
13. Ченцов А. Г. Элементы конечно-аддитивной теории меры. — Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2008.
14. Ченцов А. Г. Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения// Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Комп. науки. — 2011. — № 1. — С. 113–142.
15. Ченцов А. Г. Некоторые свойства ультрафильтров, связанные с конструкциями расширений// Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Комп. науки. — 2014. — № 1. — С. 87–101.
16. Ченцов А. Г. Компактификаторы в конструкциях расширений задач о достижимости с ограничениями асимптотического характера// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2016. — 22, № 1. — С. 294–309.
17. Ченцов А. Г. Суперрасширение как битопологическое пространство// Изв. Ин-та мат. информ. Удмурт. ун-та. — 2017. — 49. — С. 55–79.
18. Ченцов А. Г. Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы// Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Комп. науки. — 2017. — № 3. — С. 122–141.
19. Ченцов А. Г. Битопологические пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2018. — 24, № 1. — С. 257–272.
20. Ченцов А. Г. Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы: основные свойства и топологические конструкции// Изв. Ин-та мат. информ. Удмурт. ун-та. — 2018. — 52. — С. 86–102.
21. Ченцов А. Г. Некоторые свойства ультрафильтров широко понимаемых измеримых пространств// Докл. РАН. — 2019. — 486, № 1. — С. 24–29.
22. Ченцов А. Г. Суперкомпактные пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2019. — 25, № 2. — С. 240–257.
23. Ченцов А. Г. О суперкомпактности пространства ультрафильтров с топологией волмэновского типа// Изв. Ин-та мат. информ. Удмурт. ун-та. — 2019. — 54. — С. 74–101.
24. Ченцов А. Г. Некоторые топологические свойства пространства максимальных сцепленных систем с топологией волмэновского типа// Изв. Ин-та мат. информ. Удмурт. ун-та. — 2020. — 56. — С. 122–137.
25. Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986.
26. Dvalishvili B. P. Bitopological Spaces: Theory, Relations with Generalized Algebraic Structures, and Applications. — North-Holland, 2005.
27. de Groot J. Superextensions and supercompactness// Proc. I Int. Symp. “Extension Theory of Topological Structures and Its Applications. — Berlin: VEB Deutscher Verlag, 1969. — P. 89–90.

- 28. *van Mill J.* Supercompactness and Wallman Spaces. — Amsterdam: Math. Center Tract, 1977.
- 29. *Strok M., Szymanski A.* Compact metric spaces have binary subbases// Fund. Math. — 1975. — 89, № 1. — P. 81–91.

Ченцов Александр Георгиевич

Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского

Уральского отделения РАН, Екатеринбург;

Уральский федеральный университет

имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург

E-mail: chentsov@imm.uran.ru