



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 208 (2022). С. 91–121
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-208-91-121

УДК 517.9; 531.01

СИСТЕМЫ С ПЯТЬЮ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ С ДИССИПАЦИЕЙ: АНАЛИЗ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ.

I. ПОРОЖДАЮЩАЯ ЗАДАЧА ИЗ ДИНАМИКИ МНОГОМЕРНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА, ПОМЕЩЕННОГО В НЕКОНСЕРВАТИВНОЕ ПОЛЕ СИЛ

© 2022 г. М. В. ШАМОЛИН

Аннотация. Работа является первой частью обзора по вопросам интегрируемости систем с пятью степенями свободы. Обзор состоит из трех частей. В данной первой части подробно изложена порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил. Во второй и третьей частях, которые будут опубликованы в следующем выпуске, рассмотрены более общие динамические системы на касательных расслоениях к пятимерной сфере и к достаточно обширному классу других гладких многообразий. Доказаны теоремы о достаточных условиях интегрируемости рассматриваемых динамических систем в классе трансцендентных функций.

Ключевые слова: динамическая система с пятью степенями свободы, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

SYSTEMS WITH DISSIPATION WITH FIVE DEGREES OF FREEDOM: ANALYSIS AND INTEGRABILITY.

I. PRIMORDIAL PROBLEM FROM DYNAMICS OF A MULTIDIMENSIONAL RIGID BODY IN A NONCONSERVATIVE FIELD OF FORCES

© 2022 M. V. SHAMOLIN

ABSTRACT. This paper is the first part of a survey on the integrability of systems with five degrees of freedom. The review consists of three parts. In this first part, the primordial problem from the dynamics of a multidimensional rigid body placed in a nonconservative force field is described in detail. In the second and third parts, which will be published in the next issue, we consider more general dynamical systems on tangent bundles to the five-dimensional sphere and other smooth manifolds of a sufficiently wide class. Theorems on sufficient conditions for the integrability of the considered dynamical systems in the class of transcendental functions are proved.

Keywords and phrases: dynamical system with five degrees of freedom, integrability, transcendental first integral.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

Введение. Данная работа является обзором по проблеме интегрируемости неконсервативных систем с пятью степенями свободы (ранее были опубликованы аналогичные работы автора по системам с четырьмя степенями свободы). Если конфигурационное многообразие системы — гладкое пятимерное многообразие, то касательное (кокасательное) его расслоение имеет естественную структуру фазового пространства системы, увеличивая вдвое количество фазовых переменных.

Поскольку мы имеем дело с неконсервативными системами, а именно, с системами, в определенном роде присутствует так называемая диссипация переменного знака (в одних областях фазового пространства присутствует «собственно» диссипация — некое рассеяние полной энергии, которая не сохраняется, а в других — подкачка энергии, т. е. формально — «рассеяние» с противоположным знаком), то ни о каком полном списке даже непрерывных (автономных) первых интегралов не может идти и речи [6, 22, 30, 33].

Работа состоит из трех частей. В данной первой части проведен достаточно подробный анализ некоторой естественной порождающей задачи из динамики шестимерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил, при этом в системе присутствует также гладкое управление. При естественных предположениях данная задача редуцируется к динамическим системам на касательном расслоении пятимерной сферы и обладает полным набором, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечные комбинации элементарных функций. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле теории функций комплексного переменного, когда у функции имеются существенно особые точки (см. также [5, 24, 31, 41]).

Во второй части рассмотрены более общие динамические системы на касательном расслоении к пятимерной сфере. Данные системы обобщают системы, рассмотренные ранее в первой части. При этом системы более общего вида включают также и классическую задачу о движении точки по пятимерной сфере, где при некоторых условиях также получены полные наборы, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов (см. также [50, 51, 53]).

В заключительной третьей части рассмотрены касательные расслоения к достаточно обширным классам гладких пятимерных многообразий и также предъявлены достаточные условия интегрируемости.

1. ПОРОЖДАЮЩАЯ ЗАДАЧА ИЗ ДИНАМИКИ МНОГОМЕРНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА, ПОМЕЩЕННОГО В НЕКОНСЕРВАТИВНОЕ ПОЛЕ СИЛ

1. Динамическая часть уравнений движения. Рассмотрим движение однородного динамически симметричного шестимерного твердого тела, граница которого является кусочно-гладкой пятимерной поверхностью. В частности, часть этой поверхности может иметь форму пятимерного диска, являющегося многомерным «передним торцом», «взаимодействующим со средой, заполняющей шестимерное пространство», в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности (см. также [13, 19, 25]).

Пусть $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ — (обобщенные) сферические координаты вектора скорости некоторой характерной точки D твердого тела (в частности, D — центр пятимерного диска, лежащий на оси динамической симметрии тела), $\Omega \in \mathfrak{so}(6)$ — тензор угловой скорости тела. При этом $Dx_1 \dots x_6$ — такая система координат, связанная с телом, что ось динамической симметрии CD совпадает с осью Dx_1 (C — центр масс), а оси $Dx_2, \dots, Dx_6$ лежат в гиперплоскости диска, $I_1, I_2 = \dots = I_6, m$ — главные моменты инерции тела в рассматриваемых осях и масса тела.

Примем следующие разложения в проекциях на оси системы координат $Dx_1 \dots x_6$:

$$\mathbf{DC} = \{-\sigma, 0, 0, 0, 0, 0\}, \quad \mathbf{v}_D = v \mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4), \quad (1.1.1)$$

где

$$\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \beta_1 \\ \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 \\ \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 \\ \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \cos \beta_4 \\ \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \sin \beta_4 \end{pmatrix} \quad (1.1.2)$$

— единичный вектор по оси вектора $\mathbf{v}$. Примем также следующее разложение для обобщенной силы (в частности, силы воздействия среды, при этом касательные силы, действующие на пятимерный диск, отсутствуют), действующей на шестимерное тело:

$$\mathbf{S} = \{-S, 0, 0, 0, 0, 0\}, \quad (1.1.3)$$

т. е. в данном случае внешняя сила $\mathbf{F} = \mathbf{S}$.

Тогда может быть получена *часть динамических уравнений* движения тела (в том числе, и в случае аналитических функций Чаплыгина [28, 40, 60, 64], см. далее), которая описывает движение центра масс и соответствует пространству $\mathbb{R}^6$. В интересующем нас случае данная система примет вид:

$$\begin{aligned} & \dot{v} \cos \alpha - \dot{\alpha} v \sin \alpha - \omega_{15} v \sin \alpha \cos \beta_1 + \omega_{14} v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 - \\ & - \omega_{12} v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 + \omega_9 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \cos \beta_4 - \\ & - \omega_5 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \sin \beta_4 + \sigma(\omega_{15}^2 + \omega_{14}^2 + \omega_{12}^2 + \omega_9^2 + \omega_5^2) = \frac{F_1}{m} = -\frac{S}{m}, \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

$$\begin{aligned} & \dot{v} \sin \alpha \cos \beta_1 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \cos \beta_1 - \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 + \omega_{15} v \cos \alpha - \\ & - \omega_{13} v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \omega_{11} v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 - \omega_8 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \cos \beta_4 + \\ & + \omega_4 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \sin \beta_4 - \sigma(\omega_{13} \omega_{14} + \omega_{11} \omega_{12} + \omega_8 \omega_9 + \omega_4 \omega_5) - \sigma \dot{\omega}_{15} = 0, \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

$$\begin{aligned} & \dot{v} \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 \cos \beta_2 - \dot{\beta}_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 - \\ & - \omega_{14} v \cos \alpha + \omega_{13} v \sin \alpha \cos \beta_1 - \omega_{10} v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 + \\ & + \omega_7 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \cos \beta_4 - \omega_3 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \sin \beta_4 - \\ & - \sigma(\omega_{13} \omega_{15} - \omega_{10} \omega_{12} - \omega_7 \omega_9 - \omega_3 \omega_5) + \sigma \dot{\omega}_{14} = 0, \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

$$\begin{aligned} & \dot{v} \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 + \\ & + \dot{\beta}_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 \cos \beta_3 - \dot{\beta}_3 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 + \omega_{12} v \cos \alpha - \omega_{11} v \sin \alpha \cos \beta_1 + \\ & + \omega_{10} v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 - \omega_6 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \cos \beta_4 + \\ & + \omega_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \sin \beta_4 + \sigma(\omega_{11} \omega_{15} + \omega_{10} \omega_{14} - \omega_6 \omega_9 - \omega_2 \omega_5) - \sigma \dot{\omega}_{12} = 0, \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

$$\begin{aligned} & \dot{v} \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \cos \beta_4 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \cos \beta_4 + \\ & + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \cos \beta_4 + \dot{\beta}_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 \sin \beta_3 \cos \beta_4 + \\ & + \dot{\beta}_3 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 \cos \beta_4 - \dot{\beta}_4 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \sin \beta_4 - \\ & - \omega_9 v \cos \alpha + \omega_8 v \sin \alpha \cos \beta_1 - \omega_7 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \\ & + \omega_6 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 - \omega_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \sin \beta_4 - \\ & - \sigma(\omega_8 \omega_{15} + \omega_7 \omega_{14} + \omega_6 \omega_{12} - \omega_1 \omega_5) + \sigma \dot{\omega}_9 = 0, \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

$$\begin{aligned} & \dot{v} \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \sin \beta_4 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \sin \beta_4 + \\ & + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \sin \beta_4 + \dot{\beta}_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 \sin \beta_3 \sin \beta_4 + \\ & + \dot{\beta}_3 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 \sin \beta_4 + \dot{\beta}_4 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \cos \beta_4 + \\ & + \omega_5 v \cos \alpha - \omega_4 v \sin \alpha \cos \beta_1 + \omega_3 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 - \\ & - \omega_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 + \omega_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \cos \beta_4 + \\ & + \sigma(\omega_4 \omega_{15} + \omega_3 \omega_{14} + \omega_2 \omega_{12} + \omega_1 \omega_9) + \sigma \dot{\omega}_5 = 0, \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

$\sigma = CD$, где внешнее поле — квадратично по v (при этом можно рассмотреть более общий случай зависимости внешнего поля сил квадратичным образом и от тензора угловой скорости, но это

нам пока не потребуется):

$$S = s(\alpha)v^2. \quad (1.1.10)$$

Вспомогательная матрица для вычисления момента внешней силы (приложенной в точке N) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & x_{3N} & x_{4N} & x_{5N} & x_{6N} \\ -S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.1.11)$$

тогда может быть получена *часть динамических уравнений* движения тела, которая описывает движение тела вокруг центра масс и соответствуют алгебре Ли $\mathfrak{so}(6)$. В таком случае данная система примет вид (см. также [14, 15, 26, 27]):

$$(\lambda_5 + \lambda_6)\dot{\omega}_1 + (\lambda_5 - \lambda_6)(\omega_5\omega_9 + \omega_4\omega_8 + \omega_3\omega_7 + \omega_2\omega_6) = 0, \quad (1.1.12)$$

$$(\lambda_4 + \lambda_6)\dot{\omega}_2 + (\lambda_6 - \lambda_4)(-\omega_5\omega_{12} - \omega_4\omega_{11} - \omega_3\omega_{10} + \omega_1\omega_6) = 0, \quad (1.1.13)$$

$$(\lambda_3 + \lambda_6)\dot{\omega}_3 + (\lambda_3 - \lambda_6)(\omega_5\omega_{14} + \omega_4\omega_{13} - \omega_2\omega_{10} - \omega_1\omega_7) = 0, \quad (1.1.14)$$

$$(\lambda_2 + \lambda_6)\dot{\omega}_4 + (\lambda_6 - \lambda_2)(-\omega_5\omega_{15} + \omega_3\omega_{13} + \omega_2\omega_{11} + \omega_1\omega_8) = 0, \quad (1.1.15)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_6)\dot{\omega}_5 + (\lambda_1 - \lambda_6)(-\omega_4\omega_{15} - \omega_3\omega_{14} - \omega_2\omega_{12} - \omega_1\omega_9) = x_{6N} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \quad (1.1.16)$$

$$(\lambda_4 + \lambda_5)\dot{\omega}_6 + (\lambda_4 - \lambda_5)(\omega_9\omega_{12} + \omega_8\omega_{11} + \omega_7\omega_{10} + \omega_1\omega_2) = 0, \quad (1.1.17)$$

$$(\lambda_3 + \lambda_5)\dot{\omega}_7 + (\lambda_5 - \lambda_3)(-\omega_9\omega_{14} - \omega_8\omega_{13} + \omega_6\omega_{10} - \omega_1\omega_3) = 0, \quad (1.1.18)$$

$$(\lambda_2 + \lambda_5)\dot{\omega}_8 + (\lambda_2 - \lambda_5)(\omega_9\omega_{15} - \omega_7\omega_{13} - \omega_6\omega_{11} + \omega_1\omega_4) = 0, \quad (1.1.19)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_5)\dot{\omega}_9 + (\lambda_5 - \lambda_1)(\omega_8\omega_{15} + \omega_7\omega_{14} + \omega_6\omega_{12} - \omega_1\omega_5) = -x_{5N} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \quad (1.1.20)$$

$$(\lambda_3 + \lambda_4)\dot{\omega}_{10} + (\lambda_3 - \lambda_4)(\omega_{12}\omega_{14} + \omega_{11}\omega_{13} + \omega_6\omega_7 + \omega_2\omega_3) = 0, \quad (1.1.21)$$

$$(\lambda_2 + \lambda_4)\dot{\omega}_{11} + (\lambda_4 - \lambda_2)(-\omega_{12}\omega_{15} + \omega_{10}\omega_{13} - \omega_6\omega_8 - \omega_2\omega_4) = 0, \quad (1.1.22)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_4)\dot{\omega}_{12} + (\lambda_4 - \lambda_1)(\omega_{11}\omega_{15} + \omega_{10}\omega_{14} - \omega_6\omega_9 - \omega_2\omega_5) = x_{4N} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \quad (1.1.23)$$

$$(\lambda_2 + \lambda_3)\dot{\omega}_{13} + (\lambda_2 - \lambda_3)(\omega_{14}\omega_{15} + \omega_{10}\omega_{11} + \omega_7\omega_8 + \omega_3\omega_4) = 0, \quad (1.1.24)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_3)\dot{\omega}_{14} + (\lambda_3 - \lambda_1)(\omega_{13}\omega_{15} - \omega_{10}\omega_{12} - \omega_7\omega_9 - \omega_3\omega_5) = -x_{3N} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \quad (1.1.25)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\dot{\omega}_{15} + (\lambda_1 - \lambda_2)(\omega_{13}\omega_{14} + \omega_{11}\omega_{12} + \omega_8\omega_9 + \omega_4\omega_5) = x_{2N} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2. \quad (1.1.26)$$

Таким образом, фазовым пространством системы (1.1.4)–(1.1.9), (1.1.12)–(1.1.26) 21-го порядка является прямое произведение следующего 6-мерного многообразия на алгебру Ли $\mathfrak{so}(6)$:

$$\mathbb{R}^1 \times \mathbf{S}^5 \times \mathfrak{so}(6). \quad (1.1.27)$$

2. Следствия динамической симметрии. Поскольку имеется отмеченная выше динамическая симметрия

$$I_2 = \dots = I_6, \quad (1.2.1)$$

то система (1.1.4)–(1.1.9), (1.1.12)–(1.1.26) обладает первыми интегралами

$$\begin{aligned} \omega_1 &\equiv \omega_1^0, & \omega_2 &\equiv \omega_2^0, & \omega_3 &\equiv \omega_3^0, & \omega_4 &\equiv \omega_4^0, & \omega_6 &\equiv \omega_6^0, \\ \omega_7 &\equiv \omega_7^0, & \omega_8 &\equiv \omega_8^0, & \omega_{10} &\equiv \omega_{10}^0, & \omega_{11} &\equiv \omega_{11}^0, & \omega_{13} &\equiv \omega_{13}^0, \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

которые в данной работе будем рассматривать на нулевых уровнях:

$$\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_3^0 = \omega_4^0 = \omega_6^0 = \omega_7^0 = \omega_8^0 = \omega_{10}^0 = \omega_{11}^0 = \omega_{13}^0 = 0. \quad (1.2.3)$$

Ненулевыми же компонент тензора Ω остались *пять*: $\omega_{r_1} = \omega_5$, $\omega_{r_2} = \omega_9$, $\omega_{r_3} = \omega_{12}$, $\omega_{r_4} = \omega_{14}$, $\omega_{r_5} = \omega_{15}$.

3. Более общая задача и новые квазискорости в системе. Если же рассматривается *более общая задача* о движении тела при наличии некоторой следящей силы $\mathbf{T}$ (имеющей, вообще говоря, шесть компонент), лежащей на прямой Dx_1 и обеспечивающей во все время движения выполнение определенного векторного равенства ($\mathbf{V}_C$ — скорость центра масс, см. также [32, 34, 35]), например,

$$\mathbf{V}_C \equiv \text{const}, \quad (1.3.1)$$

то в системе (1.1.4)—(1.1.9), (1.1.12)—(1.1.26) вместо F_1 должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил:

$$T - s(\alpha)v^2 \equiv 0. \quad (1.3.2)$$

Очевидно, что для этого нужно выбрать величину следящей силы T в виде

$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \Omega) = s(\alpha)v^2, \quad \mathbf{T} \equiv -\mathbf{S}. \quad (1.3.3)$$

Случай (1.3.3) выбора величины T следящей силы является частным случаем возможности отделения независимой подсистемы меньшего порядка в системе (1.1.4)—(1.1.9), (1.1.12)—(1.1.26) после некоторого преобразования.

Укажем на *достаточное условие* такого отделения. Пусть выполнено следующее условие на величину T :

$$\begin{aligned} T = T_v(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \Omega) &= \sum_{i,j=0, i \leq j}^5 \tau_{i,j} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) \omega_{r_i} \omega_{r_j} = \\ &= T_1 \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) v^2, \quad \omega_{r_0} = v. \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Введем новые квазискорости, для чего преобразуем величины $\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_5}$ посредством композиции четырех поворотов, описываемых углами $\beta_1, \dots, \beta_4$:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix} = T_{4,5}(-\beta_1) \circ T_{3,4}(-\beta_2) \circ T_{2,3}(-\beta_3) \circ T_{1,2}(-\beta_4) \begin{pmatrix} \omega_5 \\ \omega_9 \\ \omega_{12} \\ \omega_{14} \\ \omega_{15} \end{pmatrix}, \quad (1.3.5)$$

где

$$\begin{aligned} T_{4,5}(\beta) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & 0 & 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}, \quad T_{3,4}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ 0 & 0 & \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ T_{2,3}(\beta) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta & 0 & 0 \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_{1,2}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 & 0 & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда (касательно системы (1.1.4)—(1.1.9), (1.1.12)—(1.1.26)) справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} z_1 &= \omega_5 \cos \beta_4 + \omega_9 \sin \beta_4, \\ z_2 &= (\omega_9 \cos \beta_4 - \omega_5 \sin \beta_4) \cos \beta_3 + \omega_{12} \sin \beta_3, \\ z_3 &= [(\omega_5 \sin \beta_4 - \omega_9 \cos \beta_4) \sin \beta_3 + \omega_{12} \cos \beta_3] \cos \beta_2 + \omega_{14} \sin \beta_2, \\ z_4 &= [(\omega_9 \cos \beta_4 - \omega_5 \sin \beta_4) \sin \beta_3 - \omega_{12} \cos \beta_3] \sin \beta_2 + \omega_{14} \cos \beta_2] \cos \beta_1 + \omega_{15} \sin \beta_1, \\ z_5 &= [(\omega_5 \sin \beta_4 - \omega_9 \cos \beta_4) \sin \beta_3 + \omega_{12} \cos \beta_3] \sin \beta_2 - \omega_{14} \cos \beta_2] \sin \beta_1 + \omega_{15} \cos \beta_1. \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

4. Редукции в системе и системы нормального вида. Динамическую часть уравнений движения в случаях (1.2.1)–(1.2.3) (а также при наличии следящей силы и условия (1.3.4)) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{v} + \sigma \left(\sum_{s=1}^5 z_s^2 \right) \cos \alpha - \sigma \frac{v^2}{4I_2} s(\alpha) \sin \alpha \cdot \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) = \\ = \frac{T_1 \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) v^2 - s(\alpha) v^2}{m} \cos \alpha, \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} v + z_5 v - \sigma \left(\sum_{s=1}^5 z_s^2 \right) \sin \alpha - \sigma \frac{v^2}{4I_2} s(\alpha) \cos \alpha \cdot \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) = \\ = \frac{s(\alpha) v^2 - T_1 \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) v^2}{m} \sin \alpha, \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

$$\dot{\beta}_1 \sin \alpha - z_4 \cos \alpha - \frac{\sigma v}{4I_2} s(\alpha) \cdot \Delta_{v,1} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) = 0. \quad (1.4.3)$$

$$\dot{\beta}_2 \sin \alpha \sin \beta_1 + z_3 \cos \alpha - \frac{\sigma v}{4I_2} s(\alpha) \cdot \Delta_{v,2} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) = 0, \quad (1.4.4)$$

$$\dot{\beta}_3 \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 - z_2 \cos \alpha - \frac{\sigma v}{4I_2} s(\alpha) \cdot \Delta_{v,3} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) = 0, \quad (1.4.5)$$

$$\dot{\beta}_4 \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 + z_1 \cos \alpha - \frac{\sigma v}{4I_2} s(\alpha) \cdot \Delta_{v,4} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) = 0, \quad (1.4.6)$$

$$\dot{\omega}_5 = \frac{v^2}{4I_2} x_{6N} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \quad (1.4.7)$$

$$\dot{\omega}_9 = -\frac{v^2}{4I_2} x_{5N} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \quad (1.4.8)$$

$$\dot{\omega}_{12} = \frac{v^2}{4I_2} x_{4N} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \quad (1.4.9)$$

$$\dot{\omega}_{14} = -\frac{v^2}{4I_2} x_{3N} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha). \quad (1.4.10)$$

$$\dot{\omega}_{15} = \frac{v^2}{4I_2} x_{2N} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha). \quad (1.4.11)$$

Здесь введены следующие функции:

$$\begin{aligned} \Delta_{v,1} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) &= \left\langle \mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N \left(\beta_1 + \frac{\pi}{2}, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \right) \right\rangle, \\ \Delta_{v,2} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) &= \left\langle \mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N \left(\frac{\pi}{2}, \beta_2 + \frac{\pi}{2}, \beta_3, \beta_4 \right) \right\rangle, \\ \Delta_{v,3} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) &= \left\langle \mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \beta_3 + \frac{\pi}{2}, \beta_4 \right) \right\rangle, \\ \Delta_{v,4} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) &= \left\langle \mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \beta_4 + \frac{\pi}{2} \right) \right\rangle, \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

здесь $\langle \dots, \dots \rangle$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^6$, а функция $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \Omega/v)$ представляется в виде

$$\begin{aligned}\Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) &= |\mathbf{r}_N| = \langle \mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N(\beta_1, \dots, \beta_4) \rangle = \\ &= 0 \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \sum_{s=2}^6 x_{sN} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) i_{sN}(\beta_1, \dots, \beta_4).\end{aligned}\quad (1.4.13)$$

И теперь здесь $i_{sN}(\beta_1, \dots, \beta_4)$, $s = 1, \dots, 6$, ($i_{1N}(\beta_1, \dots, \beta_4) \equiv 0$) — компоненты единичного вектора по оси вектора $\mathbf{r}_N = \{0, x_{2N}, \dots, x_{6N}\}$ на четырехмерной сфере $\mathbf{S}^4\{\beta_1, \dots, \beta_4\}$, заданной равенством $\alpha = \pi/2$, как экваториальном сечении соответствующей пятимерной сферы $\mathbf{S}^5\{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$.

Таким образом,

$$\mathbf{i}_N(\beta_1, \dots, \beta_4) = \mathbf{i}_v \left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \dots, \beta_4 \right), \quad (1.4.14)$$

а вектор $\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4)$ определяется в (1.1.2).

Зависимость от групп переменных $(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \Omega/v)$ понимается как сложная зависимость от $(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, z_1/v, \dots, z_5/v)$ в силу (1.3.6).

Вводя далее новые безразмерные фазовые переменные и дифференцирование по формулам

$$z_k = n_1 v Z_k, \quad k = 1, \dots, 5, \quad \langle \cdot \rangle = n_1 v \langle' \rangle, \quad n_1 > 0, \quad n_1 = \text{const}, \quad (1.4.15)$$

система (1.4.1)–(1.4.11) приведет к следующему виду:

$$v' = v \Psi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, Z), \quad (1.4.16)$$

$$\begin{aligned}\alpha' &= -Z_5 + \sigma n_1 (Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \sin \alpha + \frac{\sigma}{4I_2 n_1} s(\alpha) \cos \alpha \cdot \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) - \\ &\quad - \frac{T_1(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \sin \alpha, \quad (1.4.17)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Z_5' &= \frac{s(\alpha)}{4I_2 n_1^2} \cdot \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) - (Z_1^2 + \dots + Z_4^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \\ &\quad + \frac{\sigma}{4I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \{ -Z_4 \Delta_{v,1}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) + Z_3 \Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) - \\ &\quad - Z_2 \Delta_{v,3}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) \} + Z_1 \Delta_{v,4}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) \} - Z_5 \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, Z), \quad (1.4.18)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Z_4' &= Z_4 Z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (Z_1^2 + \dots + Z_3^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + \frac{\sigma}{4I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \times \\ &\quad \times \left\{ Z_5 \Delta_{v,1}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) - Z_3 \Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + \right. \\ &\quad \left. + Z_2 \Delta_{v,3}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} - Z_1 \Delta_{v,4}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} \right\} - \\ &\quad - \frac{s(\alpha)}{4I_2 n_1^2} \cdot \Delta_{v,1}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) - Z_4 \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, Z), \quad (1.4.19)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Z_3' &= Z_3 Z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_3 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} - (Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + \frac{\sigma}{4I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \times \\ &\quad \times \left\{ \left[-Z_5 + Z_4 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} \right] \Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) - Z_3 \Delta_{v,3}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + \right. \\ &\quad \left. + Z_1 \Delta_{v,4}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sin \beta_2} \frac{\cos \beta_3}{\sin \beta_3} \right\} + \\ &\quad + \frac{s(\alpha)}{4I_2 n_1^2} \cdot \Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) - Z_3 \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, Z), \quad (1.4.20)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z'_2 = & Z_2 Z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_2 Z_4 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + Z_2 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + \\
& + Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sin \beta_2} \frac{\cos \beta_3}{\sin \beta_3} + \\
& + \frac{\sigma}{4I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \left\{ \left[Z_5 - Z_4 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + Z_3 \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} \right] \Delta_{v,3}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) - \right. \\
& - Z_1 \Delta_{v,4}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sin \beta_2} \frac{\cos \beta_3}{\sin \beta_3} \left. \right\} - \\
& - \frac{s(\alpha)}{4I_2 n_1^2} \cdot \Delta_{v,3}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) - Z_2 \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, Z), \quad (1.4.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z'_1 = & Z_1 Z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_1 Z_4 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + Z_1 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} - \\
& - Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sin \beta_2} \frac{\cos \beta_3}{\sin \beta_3} + \frac{\sigma}{4I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \Delta_{v,4}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) \times \\
& \times \left\{ -Z_5 + Z_4 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} - Z_3 \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + Z_2 \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sin \beta_2} \frac{\cos \beta_3}{\sin \beta_3} \right\} + \\
& + \frac{s(\alpha)}{4I_2 n_1^2} \Delta_{v,4}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) - Z_1 \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, Z), \quad (1.4.22)
\end{aligned}$$

$$\beta'_1 = Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sigma}{4I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \Delta_{v,1}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z), \quad (1.4.23)$$

$$\beta'_2 = -Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \frac{\sigma}{4I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha \sin \beta_1} \Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z), \quad (1.4.24)$$

$$\beta'_3 = Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2} + \frac{\sigma}{4I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2} \Delta_{v,3}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z), \quad (1.4.25)$$

$$\beta'_4 = -Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3} + \frac{\sigma}{4I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3} \Delta_{v,4}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z), \quad (1.4.26)$$

где

$$\begin{aligned}
\Psi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, Z) = & -\sigma n_1 (Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha + \\
& + \frac{\sigma}{4I_2 n_1} s(\alpha) \sin \alpha \cdot \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) + \frac{T_1(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \cos \alpha. \quad (1.4.27)
\end{aligned}$$

Видно, что в системе (1.4.16)–(1.4.26) одиннадцатого порядка может быть выделена независимая подсистема (1.4.17)–(1.4.26) десятого порядка, которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем десятимерном фазовом пространстве — касательном расслоении

$$T_* \mathbf{S}^5 \{Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$$

пятимерной сферы $\mathbf{S}^5 \{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$.

В частности, при выполнении условия (1.3.3) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы десятого порядка также возможен.

В дальнейшем также зависимость от групп переменных $(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \Omega/v)$ понимается как сложная зависимость от $(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, z_1/v, \dots, z_5/v)$: сложная зависимость от

$$(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z_1, \dots, n_1 Z_5)$$

в силу (1.3.6) и (1.4.15).

Таблица 1. Общее распределение индексов набора функций (1.4.12)

Левая часть системы (1.4.17)—(1.4.26)	Распределение индексов s набора функций (1.4.12)			
Z'_4	1	2	3	4
Z'_3	2	2	3	4
Z'_2	3	3	3	4
Z'_1	4	4	4	4

5. Замечания о распределении индексов. В правой части системы (1.4.17)—(1.4.26) после общего множителя

$$\frac{\sigma}{4I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha}$$

величины $\Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z)$, $s = 1, \dots, 4$, входят линейным образом (и всегда ровно 4 штуки). Так, например, в уравнении (1.4.18) (с левой частью Z'_5) функции (1.4.12) входят со всеми индексами s от 1 до 4 (по одному разу каждый индекс), т. е.

$$1 \ 2 \ 3 \ 4. \quad (1.5.1)$$

А вот далее, в уравнения (1.4.19)—(1.4.22) появление набора функций (1.4.12) происходит по-другому. Так, например, в уравнение для Z'_4 по-прежнему входит набор функций (1.4.12) с индексами (1.5.1). А в уравнение для Z'_3 входит уже набор с индексами

$$2 \ 2 \ 3 \ 4, \quad (1.5.2)$$

т. е. функция $\Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z)$ уже повторяется дважды.

Общее распределение индексов дается таблицей 1.

Так, минор (1) первого порядка в левом верхнем углу таблицы 1 соответствует случаю $n = 3$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях функции (1.4.12) (лишь при $s = 1$). Там же минор второго порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

соответствует случаю $n = 4$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях функций (1.4.12) (лишь при $s = 1, 2$). Там же минор третьего порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

соответствует случаю $n = 5$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях (1.4.17)—(1.4.26) функций (1.4.12) (лишь при $s = 1, 2, 3$).

И, наконец, там же минор четвертого порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

соответствует случаю $n = 6$ (какой мы, собственно, и рассматриваем) и указывает на присутствие в динамических уравнениях (1.4.17)—(1.4.26) функций (1.4.12) (при всех $s = 1, \dots, 4$).

6. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости.

6.1. *Приведенная система.* Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [28], пользуясь (1.1.2), (1.4.14), динамические функции $s, x_{2N}, \dots, x_{6N}$ примем в следующем виде:

$$s(\alpha) = B \cos \alpha, \quad \mathbf{r}_N = R(\alpha) \mathbf{i}_N, \quad R(\alpha) = A \sin \alpha, \quad A, B > 0, \quad (1.6.1)$$

убеждающем нас о том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента неконсервативных сил от тензора угловой скорости (имеется лишь зависимость от углов $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4$).

При этом функции $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z), \Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z), s = 1, \dots, 4$, входящие в систему (1.4.16)–(1.4.26), примут следующий вид:

$$\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) = R(\alpha) = A \sin \alpha, \quad \Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) \equiv 0, \quad s = 1, \dots, 4. \quad (1.6.2)$$

Выбирая безразмерный параметр b и постоянную n_1 следующим образом:

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{4I_2}, \quad n_1 = n_0, \quad (1.6.3)$$

будем рассматривать следующую систему одиннадцатого порядка:

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, Z), \quad (1.6.4)$$

$$\alpha' = -Z_5 + b(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha, \quad (1.6.5)$$

$$Z_5' = \sin \alpha \cos \alpha - (Z_1^2 + \dots + Z_4^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bZ_5(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha - bZ_5 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \quad (1.6.6)$$

$$Z_4' = Z_4 Z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + bZ_4(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha - bZ_4 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \quad (1.6.7)$$

$$Z_3' = Z_3 Z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_3 Z_4 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - (Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + \\ + bZ_3(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha - bZ_3 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \quad (1.6.8)$$

$$Z_2' = Z_2 Z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_2 Z_4 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + Z_2 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + \\ + Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sin \beta_2} \frac{\cos \beta_3}{\sin \beta_3} + bZ_2(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha - bZ_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \quad (1.6.9)$$

$$Z_1' = Z_1 Z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_1 Z_4 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + Z_1 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} - \\ - Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sin \beta_2} \frac{\cos \beta_3}{\sin \beta_3} + bZ_1(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha - bZ_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \quad (1.6.10)$$

$$\beta_1' = Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (1.6.11)$$

$$\beta_2' = -Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (1.6.12)$$

$$\beta_3' = Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2}, \quad (1.6.13)$$

$$\beta_4' = -Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3}, \quad (1.6.14)$$

где

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, Z) = -b(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha + b \sin^2 \alpha \cos \alpha.$$

Итак, система (1.6.4)–(1.6.14) может быть рассмотрена на своем фазовом одиннадцатимерном многообразии

$$W_1 = \mathbb{R}_+^1 \{v\} \times T_* \mathbf{S}^5 \{Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}, \quad (1.6.15)$$

т. е. на прямом произведении числового луча на касательное расслоение к пятимерной сфере.

Видно, что в системе (1.6.4)—(1.6.14) одиннадцатого порядка образовалась независимая система (1.6.5)—(1.6.14) десятого порядка на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^5\{Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$ пятимерной сферы $\mathbf{S}^5\{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$. При этом в независимой системе (1.6.5)—(1.6.14) десятого порядка образовалась еще одна независимая система (1.6.5)—(1.6.13) девятого порядка на своем девятимерном многообразии.

В общем случае справедлива следующая теорема.

Теорема 6.1. *У системы (1.1.4)—(1.1.9) при условиях (1.2.1), (1.2.2)—(1.3.1) выделяется динамическая система (1.4.17)—(1.4.26) на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^5\{Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$ пятимерной сферы $\mathbf{S}^5\{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$. В частности, при условии (1.6.1) — выделяется система (1.6.5)—(1.6.14).*

6.2. Об аналитическом первом интеграле. В силу (1.3.1) значение скорости центра масс является первым интегралом системы (1.4.1)—(1.4.11) (при условии (1.3.3)), а именно функция фазовых переменных

$$\Psi_0(v, \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, z_1, \dots, z_5) = v^2 + \sigma^2(z_1^2 + \dots + z_5^2) - 2\sigma z_5 v \sin \alpha = V_C^2 \quad (1.6.16)$$

постоянна на ее фазовых траекториях (при этом величины $z_1, \dots, z_5$ выбираются в силу (1.3.6)).

В силу невырожденной замены независимого переменного (при $v \neq 0$) у системы (1.4.16)—(1.4.26) также существует аналитический интеграл, а именно функция фазовых переменных

$$\Psi_1(v, \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, Z_1, \dots, Z_5) = v^2(1 + b^2(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) - 2bZ_5 \sin \alpha) = V_C^2 \quad (1.6.17)$$

постоянна на ее фазовых траекториях.

В частности, равенство (1.6.17) позволяет, не решая системы (1.6.4)—(1.6.14), найти зависимость скорости характерной точки твердого тела (точки D пятимерного диска) от других фазовых переменных, а именно при $V_C \neq 0$ выполнено равенство

$$v^2 = \frac{V_C^2}{1 + b^2(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) - 2bZ_5 \sin \alpha}. \quad (1.6.18)$$

Поскольку в фазовом пространстве системы (1.6.4)—(1.6.14) существуют асимптотические (или притягивающие, или отталкивающие) предельные множества, то, как будет видно, равенство (1.6.17) задает единственный аналитический (даже непрерывный) первый интеграл системы (1.6.4)—(1.6.14) во всем фазовом пространстве (ср. с [54, 55, 57]).

6.3. Общие замечания об интегрируемости системы. Для полного интегрирования системы десятого порядка (1.6.5)—(1.6.14) необходимо знать, вообще говоря, девять независимых первых интегралов. Но рассматриваемые системы имеют такие симметрии, которые позволяют снизить достаточное количество первых интегралов до шести для интегрирования системы.

6.4. Система при отсутствии внешнего силового поля. Для начала рассмотрим систему (1.6.5)—(1.6.14) на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^5\{Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$ пятимерной сферы $\mathbf{S}^5\{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$ так, что получим из нее систему консервативную. Более того, будем считать, что функция (1.4.13) тождественно равна нулю. В частности, коэффициент $\sin \alpha \cos \alpha$ в уравнении (1.6.7) отсутствует, а также $b = 0$ за исключением слагаемых, содержащих

$$Z_1^2 + \dots + Z_5^2.$$

Рассматриваемая система примет вид

$$\alpha' = -Z_5 + b(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \sin \alpha, \quad (1.6.19)$$

$$Z_5' = -(Z_1^2 + \dots + Z_4^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bZ_5(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha, \quad (1.6.20)$$

$$Z_4' = Z_4 Z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + bZ_4(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha, \quad (1.6.21)$$

$$Z'_3 = Z_3 Z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_3 Z_4 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - (Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + b Z_3 (Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha, \quad (1.6.22)$$

$$Z'_2 = Z_2 Z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_2 Z_4 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + Z_2 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sin \beta_2} \frac{\cos \beta_3}{\sin \beta_3} + b Z_2 (Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha, \quad (1.6.23)$$

$$Z'_1 = Z_1 Z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_1 Z_4 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + Z_1 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} - Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sin \beta_2} \frac{\cos \beta_3}{\sin \beta_3} + b Z_1 (Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha, \quad (1.6.24)$$

$$\beta'_1 = Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (1.6.25)$$

$$\beta'_2 = -Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (1.6.26)$$

$$\beta'_3 = Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2}, \quad (1.6.27)$$

$$\beta'_4 = -Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3}, \quad (1.6.28)$$

при этом во вспомогательном уравнении (1.6.4) на величину v функцию $\Psi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, Z)$ следует выбрать в виде

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, Z) = -b(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha.$$

Система (1.6.19)–(1.6.28) описывает движение твердого тела при отсутствии внешнего поля сил, хотя, как показано в [42, 43, 45, 46], некое внутреннее поле сил в системе присутствует, и отвечает за это как раз параметр b .

Теорема 6.2. Система (1.6.19)–(1.6.28) обладает шестью независимыми аналитическими первыми интегралами следующего вида:

$$\Phi_1(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = v^2(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) = C_1 = \text{const}, \quad (1.6.29)$$

$$\Phi_2(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = v^2 \sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_4^2} \sin \alpha = C_2 = \text{const}, \quad (1.6.30)$$

$$\Phi_3(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = v^2 \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2} \sin \alpha \sin \beta_1 = C_3 = \text{const}, \quad (1.6.31)$$

$$\Phi_4(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = v^2 \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 = C_4 = \text{const}, \quad (1.6.32)$$

$$\Phi_5(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = v^2 Z_1 \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 = C_5 = \text{const}, \quad (1.6.33)$$

$$\Phi_6(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = C_6 = \text{const}. \quad (1.6.34)$$

Замечание 6.1. Поскольку в первые интегралы (1.6.29)–(1.6.34), вообще говоря, входит величина v , то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (1.6.18), либо вместе с системой (1.6.19)–(1.6.28) использовать вспомогательное уравнение (1.6.4).

Первые пять первых интеграла (1.6.29)–(1.6.33) констатируют тот факт, что поскольку внешнего поля сил нет, то сохраняются пять (вообще говоря, ненулевых) компонент тензора угловой скорости шестимерного твердого тела, а именно:

$$\begin{aligned} \omega_5 &\equiv \omega_5^0 = \text{const}, & \omega_9 &\equiv \omega_9^0 = \text{const}, \\ \omega_{12} &\equiv \omega_{12}^0 = \text{const}, & \omega_{14} &\equiv \omega_{14}^0 = \text{const}, & \omega_{15} &\equiv \omega_{15}^0 = \text{const}. \end{aligned} \quad (1.6.35)$$

В частности, наличие первого интеграла (1.6.29) объясняется равенством

$$n_0^2 v^2 (Z_1^2 + \dots + Z_5^2) = \omega_5^2 + \omega_9^2 + \omega_{12}^2 + \omega_{14}^2 + \omega_{15}^2 \equiv n_0^2 C_1 = \text{const}. \quad (1.6.36)$$

Шестой первый интеграл (1.6.34) имеет кинематический смысл, «привязывает» уравнение на β_4 и может быть найден из следующей квадратуры:

$$\frac{d\beta_4}{d\beta_3} = -\frac{Z_1}{Z_2} \frac{1}{\sin \beta_3}, \quad (1.6.37)$$

при этом если воспользоваться уровнями первых интегралов (1.6.32), (1.6.33) и получить равенство

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \pm \sqrt{\frac{C_4^2}{C_5^2} \sin^2 \beta_3 - 1}, \quad (1.6.38)$$

то квадратура (1.6.37) примет вид

$$\beta_4 = \pm \int \frac{du}{(1-u^2) \sqrt{\left(\frac{C_4^2}{C_5^2} - 1\right) - \frac{C_4^2}{C_5^2} u^2}}, \quad u = \cos \beta_3. \quad (1.6.39)$$

Ее вычисление приводит к следующему виду:

$$\beta_4 + C_6 = \pm \operatorname{arctg} \frac{\cos \beta_3}{\sqrt{\frac{C_4^2}{C_5^2} \sin^2 \beta_3 - 1}}, \quad C_6 = \text{const}, \quad (1.6.40)$$

позволяющему получить первый интеграл (1.6.34). Преобразуя последнее равенство, имеем следующее инвариантное соотношение:

$$\operatorname{tg}^2(\beta_4 + C_6) = \frac{C_5^2}{(C_4^2 - C_5^2) \operatorname{tg}^2 \beta_3 - C_5^2}. \quad (1.6.41)$$

Теперь перефразируем теорему 6.2.

Теорема 6.3. Система (1.6.19)–(1.6.28) обладает шестью независимыми первыми интегралами следующего вида:

$$\Psi_1(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{Z_1^2 + \dots + Z_5^2}{\sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_4^2} \sin \alpha} = C'_1 = \text{const}, \quad (1.6.42)$$

$$\Psi_2(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = C'_2 = \text{const}, \quad (1.6.43)$$

$$\Psi_3(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = \frac{\Phi_4}{\Phi_5} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}{Z_1 \sin \beta_3} = C'_3 = \text{const}, \quad (1.6.44)$$

$$\Psi_4(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = \frac{\Phi_3}{\Phi_4} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} \sin \beta_2} = C'_4 = \text{const}, \quad (1.6.45)$$

$$\Psi_5(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = \frac{\Phi_2}{\Phi_3} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_4^2}}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2} \sin \beta_1} = C'_5 = \text{const}, \quad (1.6.46)$$

$$\Psi_6(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = C'_6 = \text{const}. \quad (1.6.47)$$

Замечание 6.2. Поскольку в первые интегралы (1.6.42)–(1.6.47), вообще говоря, входит величина v , то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (1.6.18), либо вместе с системой (1.6.19)–(1.6.28) использовать вспомогательное уравнение (1.6.4).

Шестой первый интеграл (1.6.47) также имеет кинематический смысл и «привязывает» уравнение на β_4 , а функции Ψ_2 , Ψ_6 можно выбрать соответственно равными Φ_2 , Φ_6 .

В формулировке теоремы 6.3 (в отличие от теоремы 6.2) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (1.6.42)–(1.6.47) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 6.3 преобразованный набор первых интегралов (1.6.42)–(1.6.47) системы (1.6.19)–(1.6.28) (системы при отсутствии силового поля) по-прежнему остается набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (1.6.19)–(1.6.28) десятого порядка необходимо знать, вообще говоря, девять независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$\begin{pmatrix} Z_5 \\ Z_4 \\ Z_3 \\ Z_2 \\ Z_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} w_5 \\ w_4 \\ w_3 \\ w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} w_5 &= Z_5, \\ w_4 &= \sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_4^2}, \\ w_3 &= \frac{Z_2}{Z_1}, \end{aligned} \quad \begin{aligned} w_2 &= \frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}, \\ w_1 &= \frac{Z_4}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}}, \end{aligned} \quad (1.6.48)$$

система (1.6.19)–(1.6.28) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_5 + b(w_4^2 + w_5^2) \sin \alpha, \quad (1.6.49)$$

$$w_5' = -w_4^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bw_5(w_4^2 + w_5^2) \cos \alpha, \quad (1.6.50)$$

$$w_4' = w_4 w_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bw_4(w_4^2 + w_5^2) \cos \alpha, \quad (1.6.51)$$

$$\left. \begin{aligned} w_3' &= d_3(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) \frac{1 + w_3^2 \cos \beta_3}{w_3 \sin \beta_3}, \\ \beta_3' &= d_3(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4), \end{aligned} \right\} \quad (1.6.52)$$

$$\left. \begin{aligned} w_2' &= d_2(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) \frac{1 + w_2^2 \cos \beta_2}{w_2 \sin \beta_2}, \\ \beta_2' &= d_2(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4), \end{aligned} \right\} \quad (1.6.53)$$

$$\left. \begin{aligned} w_1' &= d_1(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) \frac{1 + w_1^2 \cos \beta_1}{w_1 \sin \beta_1}, \\ \beta_1' &= d_1(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4), \end{aligned} \right\} \quad (1.6.54)$$

$$\beta_4' = d_4(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4), \quad (1.6.55)$$

где

$$\begin{aligned} d_1(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) &= Z_4(w_5, \dots, w_1) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ d_2(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) &= -Z_3(w_5, \dots, w_1) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \\ d_3(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) &= Z_2(w_5, \dots, w_1) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2}, \\ d_4(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) &= -Z_1(w_5, \dots, w_1) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3}, \end{aligned} \quad (1.6.56)$$

при этом

$$Z_k = Z_k(w_5, \dots, w_1), \quad k = 1, \dots, 4, \quad (1.6.57)$$

— функции в силу замены (1.6.48).

Видно, что система десятого порядка (1.6.49)–(1.6.55) распадается на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (1.6.49)–(1.6.51) — третьего, а системы (1.6.52)–(1.6.54) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (1.6.49)–(1.6.55) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.6.49)–(1.6.51), по одному — для систем (1.6.52)–(1.6.54) (их три), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (1.6.55) (*т. е. всего шесть*).

Замечание 6.3. Выпишем первые интегралы (1.6.42)–(1.6.47) в переменных $w_1, \dots, w_5$ в силу (1.6.48). Получим:

$$\Theta_1(v; w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = \frac{w_4^2 + w_5^2}{w_4 \sin \alpha} = C_1'' = \text{const}, \quad (1.6.58)$$

$$\Theta_2(v; w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = v^2 w_4 \sin \alpha = C_2'' = \text{const}, \quad (1.6.59)$$

$$\Theta_3(v; w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = \frac{\sqrt{1+w_3^2}}{\sin \beta_3} = C_3'' = \text{const}, \quad (1.6.60)$$

$$\Theta_4(v; w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = \frac{\sqrt{1+w_2^2}}{\sin \beta_2} = C_4'' = \text{const}, \quad (1.6.61)$$

$$\Theta_5(v; w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = \frac{\sqrt{1+w_1^2}}{\sin \beta_1} = C_5'' = \text{const}, \quad (1.6.62)$$

$$\Theta_6(v; w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = C_6'' = \text{const}. \quad (1.6.63)$$

Замечание 6.4. Поскольку в первые интегралы (1.6.58)–(1.6.63), вообще говоря, входит величина v , то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (1.6.18), либо вместе с системой (1.6.49)–(1.6.55) использовать вспомогательное уравнение (1.6.4).

Таким образом, два независимых первых интеграла (1.6.58), (1.6.59) достаточны для интегрирования системы (1.6.49)–(1.6.51), первые интегралы (1.6.60)–(1.6.62) достаточны для интегрирования трех независимых уравнений первого порядка

$$\frac{dw_s}{d\beta_s} = \frac{1+w_s^2}{w_s} \frac{\cos \beta_s}{\sin \beta_s}, \quad s = 1, 2, 3, \quad (1.6.64)$$

после замены независимого переменного эквивалентных соответственно системам (1.6.52)–(1.6.54), и, наконец, первый интеграл (1.6.63) достаточен для «привязывания» уравнения (1.6.55). Доказана следующая теорема.

Теорема 6.4. Система (1.6.19)–(1.6.28) десятого порядка обладает достаточным количеством (шестью) независимых первых интегралов.

6.5. Частичное введение внешнего силового поля. Теперь рассмотрим систему (1.6.5)–(1.6.14) при условии $b = 0$ за исключением слагаемых, содержащих

$$Z_1^2 + \dots + Z_5^2.$$

При этом частично добавим внешнее силовое поле. А именно, его наличие характеризует коэффициент $\sin \alpha \cos \alpha$ в уравнении (1.6.66) (в отличие от системы (1.6.19)–(1.6.28)). Рассматриваемая система примет вид

$$\alpha' = -Z_5 + b(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \sin \alpha, \quad (1.6.65)$$

$$Z_5' = \sin \alpha \cos \alpha - (Z_1^2 + \dots + Z_4^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bZ_5(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha, \quad (1.6.66)$$

$$Z_4' = Z_4 Z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + bZ_4(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha, \quad (1.6.67)$$

$$Z_3' = Z_3 Z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_3 Z_4 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - (Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + bZ_3(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha, \quad (1.6.68)$$

$$Z_2' = Z_2 Z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_2 Z_4 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + Z_2 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sin \beta_2} \frac{\cos \beta_3}{\sin \beta_3} + bZ_2(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha, \quad (1.6.69)$$

$$Z_1' = Z_1 Z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_1 Z_4 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + Z_1 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} - Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sin \beta_2} \frac{\cos \beta_3}{\sin \beta_3} + bZ_1(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha, \quad (1.6.70)$$

$$\beta'_1 = Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (1.6.71)$$

$$\beta'_2 = -Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (1.6.72)$$

$$\beta'_3 = Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2}, \quad (1.6.73)$$

$$\beta'_4 = -Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3}; \quad (1.6.74)$$

при этом во вспомогательном уравнении (1.6.4) на величину v функцию $\Psi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, Z)$ следует выбрать в виде

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, Z) = -b(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha.$$

Теорема 6.5. Система (1.6.65)–(1.6.74) обладает шестью независимыми первыми интегралами следующего вида:

$$\Phi_1(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = v^2(Z_1^2 + \dots + Z_5^2 + \sin^2 \alpha) = C_1 = \text{const}, \quad (1.6.75)$$

$$\Phi_2(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = v^2 \sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_4^2} \sin \alpha = C_2 = \text{const}, \quad (1.6.76)$$

$$\Phi_3(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = v^2 \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2} \sin \alpha \sin \beta_1 = C_3 = \text{const}, \quad (1.6.77)$$

$$\Phi_4(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = v^2 \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 = C_4 = \text{const}, \quad (1.6.78)$$

$$\Phi_5(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = v^2 Z_1 \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 = C_5 = \text{const}, \quad (1.6.79)$$

$$\Phi_6(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = C_6 = \text{const}. \quad (1.6.80)$$

Замечание 6.5. Поскольку в первые интегралы (1.6.75)–(1.6.80), вообще говоря, входит величина v , то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (1.6.18), либо вместе с системой (1.6.65)–(1.6.74) использовать вспомогательное уравнение (1.6.4).

Первый интеграл (1.6.75) по своей структуре похож на интеграл полной энергии. Шестой первый интеграл (1.6.80) имеет кинематический смысл, «привязывает» уравнение на β_4 и найден выше.

Теперь перефразируем теорему 6.5.

Теорема 6.6. Система (1.6.65)–(1.6.74) обладает шестью независимыми первыми интегралами следующего вида:

$$\Psi_1(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{Z_1^2 + \dots + Z_5^2 + \sin^2 \alpha}{\sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_4^2} \sin \alpha} = C'_1 = \text{const}, \quad (1.6.81)$$

$$\Psi_2(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = C'_2 = \text{const}, \quad (1.6.82)$$

$$\Psi_3(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = \frac{\Phi_4}{\Phi_5} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}{Z_1 \sin \beta_3} = C'_3 = \text{const}, \quad (1.6.83)$$

$$\Psi_4(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = \frac{\Phi_3}{\Phi_4} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} \sin \beta_2} = C'_4 = \text{const}, \quad (1.6.84)$$

$$\Psi_5(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = \frac{\Phi_2}{\Phi_3} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_4^2}}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2} \sin \beta_1} = C'_5 = \text{const}, \quad (1.6.85)$$

$$\Psi_6(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = C'_6 = \text{const}. \quad (1.6.86)$$

Замечание 6.6. Поскольку в первые интегралы (1.6.81)–(1.6.86), вообще говоря, входит величина v , то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (1.6.18), либо вместе с системой (1.6.65)–(1.6.74) использовать вспомогательное уравнение (1.6.4).

Функции Ψ_2 , Ψ_6 можно выбрать соответственно равными Φ_2 , Φ_6 .

В формулировке теоремы 6.6 (в отличие от теоремы 6.5) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (1.6.81)–(1.6.86) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 6.6 преобразованный набор первых интегралов (1.6.81)–(1.6.86) системы (1.6.65)–(1.6.74) по-прежнему остается набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (1.6.65)–(1.6.74) десятого порядка необходимо знать, вообще говоря, девять независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (1.6.48) система (1.6.65)–(1.6.74) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_5 + b(w_4^2 + w_5^2) \sin \alpha, \quad (1.6.87)$$

$$w_5' = \sin \alpha \cos \alpha - w_4^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bw_5(w_4^2 + w_5^2) \cos \alpha, \quad (1.6.88)$$

$$w_4' = w_4 w_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bw_4(w_4^2 + w_5^2) \cos \alpha, \quad (1.6.89)$$

$$\left. \begin{aligned} w_3' &= d_3(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) \frac{1 + w_3^2 \cos \beta_3}{w_3 \sin \beta_3}, \\ \beta_3' &= d_3(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4), \end{aligned} \right\} \quad (1.6.90)$$

$$\left. \begin{aligned} w_2' &= d_2(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) \frac{1 + w_2^2 \cos \beta_2}{w_2 \sin \beta_2}, \\ \beta_2' &= d_2(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4), \end{aligned} \right\} \quad (1.6.91)$$

$$\left. \begin{aligned} w_1' &= d_1(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) \frac{1 + w_1^2 \cos \beta_1}{w_1 \sin \beta_1}, \\ \beta_1' &= d_1(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4), \end{aligned} \right\} \quad (1.6.92)$$

$$\beta_4' = d_4(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4), \quad (1.6.93)$$

где выполнены условия (1.6.56).

Видно, что система десятого порядка (1.6.87)–(1.6.93) распадается на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (1.6.87)–(1.6.89) — третьего, а системы (1.6.90)–(1.6.92) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (1.6.87)–(1.6.93) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.6.87)–(1.6.89), по одному — для систем (1.6.90)–(1.6.92) (их три), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (1.6.93) (*т. е. всего шесть*).

Замечание 6.7. Выпишем первые интегралы (1.6.81)–(1.6.86) в переменных $w_1, \dots, w_5$ в силу (1.6.48). Получим:

$$\Theta_1(v; w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = \frac{w_4^2 + w_5^2 + \sin^2 \alpha}{w_4 \sin \alpha} = C_1'' = \text{const}, \quad (1.6.94)$$

$$\Theta_2(v; w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = v^2 w_4 \sin \alpha = C_2'' = \text{const}, \quad (1.6.95)$$

$$\Theta_3(v; w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = \frac{\sqrt{1 + w_3^2}}{\sin \beta_3} = C_3'' = \text{const}, \quad (1.6.96)$$

$$\Theta_4(v; w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = \frac{\sqrt{1 + w_2^2}}{\sin \beta_2} = C_4'' = \text{const}, \quad (1.6.97)$$

$$\Theta_5(v; w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = \frac{\sqrt{1 + w_1^2}}{\sin \beta_1} = C_5'' = \text{const}, \quad (1.6.98)$$

$$\Theta_6(v; w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = C_6'' = \text{const}. \quad (1.6.99)$$

Замечание 6.8. Поскольку в первые интегралы (1.6.94)—(1.6.99), вообще говоря, входит величина v , то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (1.6.18), либо вместе с системой (1.6.87)—(1.6.93) использовать вспомогательное уравнение (1.6.4).

Таким образом, два независимых первых интеграла (1.6.94), (1.6.95) достаточны для интегрирования системы (1.6.87)—(1.6.89), первые интегралы (1.6.96)—(1.6.98) достаточны для интегрирования трех независимых уравнений первого порядка

$$\frac{dw_s}{d\beta_s} = \frac{1 + w_s^2 \cos \beta_s}{w_s \sin \beta_s}, \quad s = 1, 2, 3, \quad (1.6.100)$$

после замены независимого переменного эквивалентных соответственно системам (1.6.90)—(1.6.92), и, наконец, первый интеграл (1.6.99) достаточен для «привязывания» уравнения (1.6.93). Доказана следующая теорема.

Теорема 6.7. Система (1.6.65)—(1.6.74) десятого порядка обладает достаточным количеством (шестью) независимых первых интегралов.

6.6. Полный список первых интегралов. Перейдем теперь к интегрированию искомой системы десятого порядка (1.6.5)—(1.6.14) (без всяких упрощений — при наличии всех коэффициентов).

Аналогичным образом, для полного интегрирования системы (1.6.5)—(1.6.14) десятого порядка необходимо знать, вообще говоря, девять независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (1.6.48) система (1.6.5)—(1.6.14) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_5 + b(w_4^2 + w_5^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha, \quad (1.6.101)$$

$$w_5' = \sin \alpha \cos \alpha - w_4^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bw_5(w_4^2 + w_5^2) \cos \alpha - bw_5 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \quad (1.6.102)$$

$$w_4' = w_4 w_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bw_4(w_4^2 + w_5^2) \cos \alpha - bw_4 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \quad (1.6.103)$$

$$\left. \begin{aligned} w_3' &= d_3(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) \frac{1 + w_3^2 \cos \beta_3}{w_3 \sin \beta_3}, \\ \beta_3' &= d_3(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4), \end{aligned} \right\} \quad (1.6.104)$$

$$\left. \begin{aligned} w_2' &= d_2(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) \frac{1 + w_2^2 \cos \beta_2}{w_2 \sin \beta_2}, \\ \beta_2' &= d_2(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4), \end{aligned} \right\} \quad (1.6.105)$$

$$\left. \begin{aligned} w_1' &= d_1(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) \frac{1 + w_1^2 \cos \beta_1}{w_1 \sin \beta_1}, \\ \beta_1' &= d_1(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4), \end{aligned} \right\} \quad (1.6.106)$$

$$\beta_4' = d_4(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4), \quad (1.6.107)$$

где выполнены условия (1.6.56).

Видно, что система десятого порядка (1.6.101)—(1.6.107) распадается на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (1.6.101)—(1.6.103) — третьего, а системы (1.6.104)—(1.6.106) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (1.6.101)—(1.6.107) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.6.101)—(1.6.103), по одному — для систем (1.6.104)—(1.6.106) (их три), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (1.6.107) (*т. е. всего шесть*).

Для начала сопоставим независимой подсистеме третьего порядка (1.6.101)—(1.6.103) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{dw_5}{d\alpha} &= \frac{\sin \alpha \cos \alpha + bw_5(w_4^2 + w_5^2) \cos \alpha - bw_5 \sin^2 \alpha \cos \alpha - w_4^2 \cos \alpha / \sin \alpha}{-w_5 + b(w_4^2 + w_5^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha}, \\ \frac{dw_4}{d\alpha} &= \frac{bw_4(w_4^2 + w_5^2) \cos \alpha - bw_4 \sin^2 \alpha \cos \alpha + w_4 w_5 \cos \alpha / \sin \alpha}{-w_5 + b(w_4^2 + w_5^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha}. \end{aligned} \quad (1.6.108)$$

Используя замену $\tau = \sin \alpha$, перепишем систему (1.6.108) в алгебраическом виде

$$\begin{aligned}\frac{dw_5}{d\tau} &= \frac{\tau + bw_5(w_4^2 + w_5^2) - bw_5\tau^2 - w_4^2/\tau}{-w_5 + b\tau(1 - \tau^2) + b\tau(w_4^2 + w_5^2)}, \\ \frac{dw_4}{d\tau} &= \frac{bw_4(w_4^2 + w_5^2) - bw_4\tau^2 + w_4w_5/\tau}{-w_5 + b\tau(1 - \tau^2) + b\tau(w_4^2 + w_5^2)}.\end{aligned}\quad (1.6.109)$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_4 = u_1\tau, \quad w_5 = u_2\tau, \quad (1.6.110)$$

приводим систему (1.6.109) к следующему виду:

$$\begin{aligned}\tau \frac{du_2}{d\tau} + u_2 &= \frac{1 - bu_2\tau^2 + bu_2(u_1^2 + u_2^2)\tau^2 - u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2)}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} + u_1 &= \frac{bu_1(u_1^2 + u_2^2)\tau^2 - bu_1\tau^2 + u_1u_2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2)},\end{aligned}\quad (1.6.111)$$

что эквивалентно

$$\begin{aligned}\tau \frac{du_2}{d\tau} &= \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2)}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} &= \frac{2u_1u_2 - bu_1}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2)}.\end{aligned}\quad (1.6.112)$$

Сопоставим системе второго порядка (1.6.112) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - u_1^2}{2u_1u_2 - bu_1}, \quad (1.6.113)$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{u_2^2 + u_1^2 - bu_2 + 1}{u_1}\right) = 0. \quad (1.6.114)$$

Итак, уравнение (1.6.113) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 - bu_2 + 1}{u_1} = C_1 = \text{const}, \quad (1.6.115)$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(w_5, w_4; \alpha) = \frac{w_5^2 + w_4^2 - bw_5 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{w_4 \sin \alpha} = C_1 = \text{const}. \quad (1.6.116)$$

Замечание 6.9. При $b = 0$ первый интеграл (1.6.116) системы (1.6.101)—(1.6.103) совпадает с первым интегралом (1.6.94) системы (1.6.87)—(1.6.89), но при $b \neq 0$ ни числитель выражения (1.6.116), ни его знаменатель не являются первыми интегралами системы (1.6.101)—(1.6.103) по отдельности (хотя при $b = 0$ и числитель и знаменатель выражения (1.6.116) являются первыми интегралами системы (1.6.87)—(1.6.89)).

Далее, произведем поиск дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (1.6.101)—(1.6.103). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (1.6.115) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - 1. \quad (1.6.117)$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2 + C_1^2 - 4 \geq 0, \quad (1.6.118)$$

и фазовое пространство системы (1.6.101)—(1.6.103) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (1.6.117).

Таким образом, в силу соотношения (1.6.115) первое уравнение системы (1.6.112) примет вид

$$\tau \frac{du_2}{d\tau} = \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}{-u_2 + b(1 - \tau^2) + b\tau^2(U_1^2(C_1, u_2) + u_2^2)}, \quad (1.6.119)$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2} \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + 1)} \right\}, \quad (1.6.120)$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (1.6.118), или вид уравнения Бернулли:

$$\frac{d\tau}{du_2} = \frac{(b - u_2)\tau - b\tau^3(1 - U_1^2(C_1, u_2) - u_2^2)}{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}. \quad (1.6.121)$$

Уравнение (1.6.121) (при учете (1.6.120)) легко приводится к линейному неоднородному уравнению:

$$\frac{dp}{du_2} = \frac{2(u_2 - b)p + 2b(1 - U_1^2(C_1, u_2) - u_2^2)}{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}, \quad p = \frac{1}{\tau^2}. \quad (1.6.122)$$

Последний факт означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде (т. е. через конечную комбинацию квадратур). При этом общее решение уравнения (1.6.122) зависит от произвольной постоянной C_2 . Полные выкладки в данном месте приводить не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (1.6.122), даже в частном случае $b = C_1 = 2$ имеет следующее решение:

$$p = p_0(u_2) = C[\sqrt{1 - (u_2 - 1)^2} \pm 1] \exp \left[\sqrt{\frac{1 \mp \sqrt{1 - (u_2 - 1)^2}}{1 \pm \sqrt{1 - (u_2 - 1)^2}}} \right], \quad C = \text{const}. \quad (1.6.123)$$

Замечание 6.10. В выражение найденного первого интеграла формально можно вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (1.6.116).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_5, w_4; \alpha) = \ln |\sin \alpha| + G_2 \left(\sin \alpha, \frac{w_5}{\sin \alpha}, \frac{w_4}{\sin \alpha} \right) = C_2 = \text{const}. \quad (1.6.124)$$

Итак, найдены два первых интеграла (1.6.116), (1.6.124) независимой системы третьего порядка (1.6.101)–(1.6.103). Осталось указать по одному первому интегралу — для систем (1.6.104)–(1.6.106), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (1.6.107).

Действительно, искомые первые интегралы совпадают с первыми интегралами (1.6.96)–(1.6.99), а именно:

$$\Theta_3(w_3; \beta_3) = \frac{\sqrt{1 + w_3^2}}{\sin \beta_3} = C_3 = \text{const}, \quad (1.6.125)$$

$$\Theta_4(w_2; \beta_2) = \frac{\sqrt{1 + w_2^2}}{\sin \beta_2} = C_4 = \text{const}, \quad (1.6.126)$$

$$\Theta_5(w_1; \beta_1) = \frac{\sqrt{1 + w_1^2}}{\sin \beta_1} = C_5 = \text{const}, \quad (1.6.127)$$

$$\Theta_6(\beta_3, \beta_4) = \beta_4 \pm \arctg \frac{C_5 \cos \beta_3}{\sqrt{C_4^2 \sin^2 \beta_3 - C_5^2}} = C_6 = \text{const}, \quad (1.6.128)$$

при этом в левую часть равенства (1.6.128) вместо C_4, C_5 можно подставить интегралы (1.6.126), (1.6.127).

Теорема 6.8. Система (1.6.101)–(1.6.107) десятого порядка обладает достаточным количеством (шестью) независимых первых интегралов (1.6.116), (1.6.124), (1.6.125)–(1.6.128).

Итак, в данном случае система динамических уравнений (1.1.4)–(1.1.9), (1.1.12)–(1.1.26) при условии (1.6.1) имеет 17 инвариантных соотношений: имеются аналитическая неинтегрируемая связь вида (1.3.1), соответствующая аналитическому первому интегралу (1.6.16), циклические первые интегралы вида (1.2.2), (1.2.3), первый интеграл вида (1.6.116), также имеется первый интеграл (1.6.124), который может быть найден из уравнения (1.6.122), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и, наконец, трансцендентные первые интегралы вида (1.6.125)–(1.6.128).

Теорема 6.9. Система (1.1.4)–(1.1.9), (1.1.12)–(1.1.26) при условиях (1.3.1), (1.6.1), (1.2.2), (1.2.3) обладает 17 инвариантными соотношениями (полным набором), шесть из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа.

7. Случай зависимости момента неконсервативных сил от тензора угловой скорости.

7.1. Введение зависимости от тензора угловой скорости и приведенная система. Продолжаем изучать динамику шестимерного твердого тела в евклидовом пространстве $\mathbf{E}^6$. Но, поскольку данный раздел посвящен исследованию случая движения при наличии зависимости момента действующих сил от тензора угловой скорости, введем такую зависимость с более общих позиций.

Пусть $x = (x_{1N}, \dots, x_{6N})$ — координаты точки N приложения внешней силы на тело (в частности, на пятимерный диск, задаваемый равенством $x_{1N} = 0$), $Q = (Q_1, \dots, Q_6)$ — компоненты, не зависящие от тензора угловой скорости. Будем вводить зависимость функций $x = (x_{1N}, \dots, x_{6N})$ от тензора угловой скорости лишь линейным образом, поскольку даже само данное введение априори не очевидно [3, 4, 11, 12].

Итак, примем следующую зависимость:

$$x = Q + R, \quad (1.7.1)$$

где $R = (R_1, \dots, R_6)$ — вектор-функция, содержащая компоненты тензора угловой скорости. При этом зависимость функции R от компонент тензора угловой скорости — гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{v}\Omega h, \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{15} & \omega_{14} & -\omega_{12} & \omega_9 & -\omega_5 \\ \omega_{15} & 0 & -\omega_{13} & \omega_{11} & -\omega_8 & \omega_4 \\ -\omega_{14} & \omega_{13} & 0 & -\omega_{10} & \omega_7 & -\omega_3 \\ \omega_{12} & -\omega_{11} & \omega_{10} & 0 & -\omega_6 & \omega_2 \\ -\omega_9 & \omega_8 & -\omega_7 & \omega_6 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_5 & -\omega_4 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.7.2)$$

Здесь $\Omega \in \mathfrak{so}(6)$ — тензор угловой скорости, $(h_1, \dots, h_6)$ — некоторые положительные параметры (ср. с [61, 62, 65]). Применительно к нашей задаче можно считать, что $x_{1N} \equiv 0$; при этом

$$\begin{aligned} x_{2N} &= Q_2 - h_1 \frac{\omega_{15}}{v}, & x_{3N} &= Q_3 + h_1 \frac{\omega_{14}}{v}, & x_{4N} &= Q_4 - h_1 \frac{\omega_{12}}{v}, \\ x_{5N} &= Q_5 + h_1 \frac{\omega_9}{v}, & x_{6N} &= Q_6 - h_1 \frac{\omega_5}{v}, \end{aligned} \quad (1.7.3)$$

где $h_2 = \dots = h_6$, в силу динамической симметрии (что, в принципе, нам в данном конкретном месте не требуется).

Здесь $\omega_5, \omega_9, \omega_{12}, \omega_{14}, \omega_{15}$ — оставшиеся, вообще говоря, ненулевые компоненты тензора угловой скорости Ω .

7.2. Приведенная система. Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [28, 73], пользуясь (1.4.14), имеем:

$$Q = R(\alpha) \mathbf{i}_N, \quad (1.7.4)$$

а динамические функции $s, x_{2N}, \dots, x_{6N}$ примем в следующем виде:

$$s(\alpha) = B \cos \alpha, \quad \mathbf{r}_N = Q - \frac{1}{v}\Omega h, \quad R(\alpha) = A \sin \alpha, \quad A, B > 0, \quad (1.7.5)$$

убеждающем нас о том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент

неконсервативной силы (т. е. присутствует зависимость момента от компонент тензора угловой скорости).

При этом функции $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \Omega/v)$, $\Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \beta_1, \dots, \beta_4, \Omega/v)$, $s = 1, \dots, 4$, входящие в систему (1.4.17)–(1.4.26), примут следующий вид:

$$\begin{aligned}\Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) &= A \sin \alpha - \frac{h_1}{v} z_5, \\ \Delta_{v,1} \left(\alpha, \beta_1, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) &= \frac{h_1}{v} z_4, \\ \Delta_{v,2} \left(\alpha, \beta_1, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) &= -\frac{h_1}{v} z_3, \\ \Delta_{v,3} \left(\alpha, \beta_1, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) &= \frac{h_1}{v} z_2, \\ \Delta_{v,4} \left(\alpha, \beta_1, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) &= -\frac{h_1}{v} z_1.\end{aligned}\tag{1.7.6}$$

Тогда благодаря условиям (1.3.1), (1.7.5) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (1.4.16)–(1.4.26)) примет вид аналитической системы

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, Z),\tag{1.7.7}$$

$$\alpha' = -Z_5 + b(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha - bH_1 Z_5 \cos^2 \alpha,\tag{1.7.8}$$

$$\begin{aligned}Z_5' &= \sin \alpha \cos \alpha - (1 + bH_1)(Z_1^2 + \dots + Z_4^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bZ_5(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha - \\ &\quad - bZ_5 \sin^2 \alpha \cos \alpha + bH_1 Z_5^2 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_5 \cos \alpha,\end{aligned}\tag{1.7.9}$$

$$\begin{aligned}Z_4' &= (1 + bH_1)Z_4 Z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (1 + bH_1)(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \\ &\quad + bZ_4(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha - bZ_4 \sin^2 \alpha \cos \alpha + bH_1 Z_4 Z_5 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_4 \cos \alpha,\end{aligned}\tag{1.7.10}$$

$$\begin{aligned}Z_3' &= (1 + bH_1)Z_3 Z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - (1 + bH_1)Z_3 Z_4 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - \\ &\quad - (1 + bH_1)(Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + bZ_3(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha - \\ &\quad - bZ_3 \sin^2 \alpha \cos \alpha + bH_1 Z_3 Z_5 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_3 \cos \alpha,\end{aligned}\tag{1.7.11}$$

$$\begin{aligned}Z_2' &= (1 + bH_1)Z_2 Z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \\ &\quad - (1 + bH_1)Z_2 Z_4 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + (1 + bH_1)Z_2 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + \\ &\quad + (1 + bH_1)Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sin \beta_2} \frac{\cos \beta_3}{\sin \beta_3} + bZ_2(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha - \\ &\quad - bZ_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha + bH_1 Z_2 Z_5 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_2 \cos \alpha,\end{aligned}\tag{1.7.12}$$

$$\begin{aligned}Z_1' &= (1 + bH_1)Z_1 Z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \\ &\quad - (1 + bH_1)Z_1 Z_4 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + (1 + bH_1)Z_1 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} - \\ &\quad - (1 + bH_1)Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sin \beta_2} \frac{\cos \beta_3}{\sin \beta_3} + bZ_1(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha - \\ &\quad - bZ_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha + bH_1 Z_1 Z_5 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_1 \cos \alpha,\end{aligned}\tag{1.7.13}$$

$$\beta'_1 = (1 + bH_1)Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (1.7.14)$$

$$\beta'_2 = -(1 + bH_1)Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (1.7.15)$$

$$\beta'_3 = (1 + bH_1)Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2}, \quad (1.7.16)$$

$$\beta'_4 = -Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3}, \quad (1.7.17)$$

где

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, Z) = -b(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha + b \sin^2 \alpha \cos \alpha - bH_1 Z_5 \sin \alpha \cos \alpha,$$

при этом выбирая, как и выше, безразмерные параметры b , H_1 и постоянную n_1 следующим образом:

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{4I_2}, \quad H_1 = \frac{Bh_1}{4I_2 n_0}, \quad n_1 = n_0. \quad (1.7.18)$$

Итак, система (1.7.7)–(1.7.17) может быть рассмотрена на своем фазовом одиннадцатимерном многообразии

$$W_1 = \mathbb{R}_+^1 \{v\} \times T_* \mathbf{S}^5 \{Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}, \quad (1.7.19)$$

т. е. на прямом произведении числового луча на касательное расслоение к пятимерной сфере.

Видно, что в системе (1.7.7)–(1.7.17) одиннадцатого порядка образовалась независимая система (1.7.8)–(1.7.17) десятого порядка на касательном расслоении $T_* \mathbf{S}^5 \{Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$ пятимерной сферы $\mathbf{S}^5 \{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$. При этом в независимой системе (1.7.8)–(1.7.17) десятого порядка образовалась еще одна независимая система (1.7.8)–(1.7.16) девятого порядка на своем девятимерном многообразии.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 7.1. *У динамической части уравнений движения при условиях (1.2.1), (1.2.2)–(1.3.1) выделяется динамическая система (1.4.17)–(1.4.26) на касательном расслоении*

$$T_* \mathbf{S}^5 \{Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$$

пятимерной сферы $\mathbf{S}^5 \{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$. В частности, при условии (1.7.5) – выделяется система (1.7.8)–(1.7.17).

7.3. Об аналитическом первом интеграле. В силу (1.3.1) значение скорости центра масс является первым интегралом системы (1.4.1)–(1.4.11) (при условии (1.3.3)), а именно, функция фазовых переменных

$$\Psi_0(v, \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, z_1, \dots, z_5) = v^2 + \sigma^2(z_1^2 + \dots + z_5^2) - 2\sigma z_5 v \sin \alpha = V_C^2 \quad (1.7.20)$$

постоянна на ее фазовых траекториях (при этом величины $z_1, \dots, z_5$ выбираются в силу (1.3.6)).

В силу невырожденной замены независимого переменного (при $v \neq 0$) у системы (1.7.7)–(1.7.17) также существует аналитический интеграл, а именно функция фазовых переменных

$$\Psi_1(v, \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, Z_1, \dots, Z_5) = v^2(1 + b^2(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) - 2bZ_5 \sin \alpha) = V_C^2 \quad (1.7.21)$$

постоянна на ее фазовых траекториях.

Равенство (1.7.21) позволяет, не решая системы (1.7.7)–(1.7.17), найти зависимость скорости характерной точки твердого тела (центра D пятимерного диска) от других фазовых переменных, а именно при $V_C \neq 0$ выполнено равенство

$$v^2 = \frac{V_C^2}{1 + b^2(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) - 2bZ_5 \sin \alpha}. \quad (1.7.22)$$

Поскольку в фазовом пространстве системы (1.7.7)–(1.7.17) существуют асимптотические (или притягивающие, или отталкивающие) предельные множества, то, как будет видно, равенство (1.7.21) задает, как будет показано, единственный аналитический (даже непрерывный) первый интеграл системы (1.7.7)–(1.7.17) во всем фазовом пространстве (ср. с [66, 68, 69]).

7.4. *Полный список первых интегралов.* Для полного интегрирования системы (1.7.8)–(1.7.17) десятого порядка необходимо знать, вообще говоря, *девять* независимых первых интегралов. Но рассматриваемые системы имеют такие симметрии, которые позволяют снизить достаточное количество первых интегралов до *шести* для интегрирования систем.

Действительно, после замены переменных

$$\begin{pmatrix} Z_5 \\ Z_4 \\ Z_3 \\ Z_2 \\ Z_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} w_5 \\ w_4 \\ w_3 \\ w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} w_5 &= Z_5, \\ w_4 &= \sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_4^2}, \\ w_3 &= \frac{Z_2}{Z_1}, \end{aligned} \quad \begin{aligned} w_2 &= \frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}, \\ w_1 &= \frac{Z_4}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}}, \end{aligned} \quad (1.7.23)$$

система (1.7.8)–(1.7.17) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -(1 + bH_1)w_5 + b(w_4^2 + w_5^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha - bH_1 w_5 \cos^2 \alpha, \quad (1.7.24)$$

$$\begin{aligned} w_5' &= \sin \alpha \cos \alpha - (1 + bH_1)w_4^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bw_5(w_4^2 + w_5^2) \cos \alpha - \\ &\quad - bw_5 \sin^2 \alpha \cos \alpha + bH_1 w_5^2 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 w_5 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (1.7.25)$$

$$\begin{aligned} w_4' &= (1 + bH_1)w_4 w_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bw_4(w_4^2 + w_5^2) \cos \alpha - \\ &\quad - bw_4 \sin^2 \alpha \cos \alpha + bH_1 w_4 w_5 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 w_4 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (1.7.26)$$

$$\left. \begin{aligned} w_3' &= d_3(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) \frac{1 + w_3^2 \cos \beta_3}{w_3 \sin \beta_3}, \\ \beta_3' &= d_3(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4), \end{aligned} \right\} \quad (1.7.27)$$

$$\left. \begin{aligned} w_2' &= d_2(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) \frac{1 + w_2^2 \cos \beta_2}{w_2 \sin \beta_2}, \\ \beta_2' &= d_2(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4), \end{aligned} \right\} \quad (1.7.28)$$

$$\left. \begin{aligned} w_1' &= d_1(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) \frac{1 + w_1^2 \cos \beta_1}{w_1 \sin \beta_1}, \\ \beta_1' &= d_1(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4), \end{aligned} \right\} \quad (1.7.29)$$

$$\beta_4' = d_4(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4), \quad (1.7.30)$$

где выполнены условия

$$\begin{aligned} d_1(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) &= (1 + bH_1) \mathcal{Z}_4(w_5, \dots, w_1) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ d_2(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) &= -(1 + bH_1) \mathcal{Z}_3(w_5, \dots, w_1) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \\ d_3(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) &= (1 + bH_1) \mathcal{Z}_2(w_5, \dots, w_1) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2}, \\ d_4(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) &= -(1 + bH_1) \mathcal{Z}_1(w_5, \dots, w_1) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3}, \end{aligned} \quad (1.7.31)$$

при этом

$$Z_k = \mathcal{Z}_k(w_5, \dots, w_1), \quad k = 1, \dots, 4, \quad (1.7.32)$$

— функции в силу замены (1.7.23).

Видно, что система (1.7.24)–(1.7.30) десятого порядка распадается на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (1.7.24)–(1.7.26) — третьего, а системы (1.7.27)–(1.7.29) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (1.7.24)–(1.7.30) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.7.24)–(1.7.26), по одному — для систем (1.7.27)–(1.7.29) (их три), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (1.7.30) (*т. е. всего шесть*).

Для начала сопоставим независимой подсистеме третьего порядка (1.7.24)–(1.7.26) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned}\frac{dw_5}{d\alpha} &= \frac{R_2(\alpha, w_4, w_5)}{-w_5 + b(w_4^2 + w_5^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha - bH_1 w_5 \cos^2 \alpha}, \\ \frac{dw_4}{d\alpha} &= \frac{R_1(\alpha, w_4, w_5)}{-w_5 + b(w_4^2 + w_5^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha - bH_1 w_5 \cos^2 \alpha},\end{aligned}\quad (1.7.33)$$

где

$$\begin{aligned}R_2(\alpha, w_4, w_5) &= \sin \alpha \cos \alpha + bw_5(w_4^2 + w_5^2) \cos \alpha - bw_5 \sin^2 \alpha \cos \alpha - \\ &\quad - (1 + bH_1)w_4^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bH_1 w_5^2 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 w_5 \cos \alpha,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_1(\alpha, w_4, w_5) &= bw_4(w_4^2 + w_5^2) \cos \alpha - bw_4 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ &\quad + (1 + bH_1)w_4 w_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bH_1 w_4 w_5 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 w_4 \cos \alpha.\end{aligned}$$

Используя замену $\tau = \sin \alpha$, перепишем систему (1.7.33) в алгебраическом виде Ж

$$\begin{aligned}\frac{dw_5}{d\tau} &= \frac{\tau + bw_5(w_4^2 + w_5^2) - bw_5 \tau^2 - (1 + bH_1)w_4^2/\tau + bH_1 w_5^2 \tau - H_1 w_5}{-w_5 + b\tau(1 - \tau^2) + b\tau(w_4^2 + w_5^2) - bH_1 w_5(1 - \tau^2)}, \\ \frac{dw_4}{d\tau} &= \frac{bw_4(w_4^2 + w_5^2) - bw_4 \tau^2 + (1 + bH_1)w_4 w_5/\tau + bH_1 w_4 w_5 \tau - H_1 w_4}{-w_5 + b\tau(1 - \tau^2) + b\tau(w_4^2 + w_5^2) - bH_1 w_5(1 - \tau^2)}.\end{aligned}\quad (1.7.34)$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_4 = u_1 \tau, \quad w_5 = u_2 \tau, \quad (1.7.35)$$

приводим систему (1.7.34) к следующему виду:

$$\begin{aligned}\tau \frac{du_2}{d\tau} + u_2 &= \frac{1 - bu_2 \tau^2 + bu_2(u_1^2 + u_2^2) \tau^2 - (1 + bH_1)u_1^2 - H_1 u_2 + bH_1 u_2^2 \tau^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2) - bH_1 u_2(1 - \tau^2)}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} + u_1 &= \frac{bu_1(u_1^2 + u_2^2) \tau^2 - bu_1 \tau^2 + (1 + bH_1)u_1 u_2 - H_1 u_1 + bH_1 u_1 u_2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2) - bH_1 u_2(1 - \tau^2)},\end{aligned}\quad (1.7.36)$$

или, эквивалентно,

$$\begin{aligned}\tau \frac{du_2}{d\tau} &= \frac{1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2 - (1 + bH_1)u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2) - bH_1 u_2(1 - \tau^2)}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} &= \frac{2(1 + bH_1)u_1 u_2 - (b + H_1)u_1}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2) - bH_1 u_2(1 - \tau^2)}.\end{aligned}\quad (1.7.37)$$

Поставим в соответствие системе второго порядка (1.7.37) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2 - (1 + bH_1)u_1^2}{2(1 + bH_1)u_1 u_2 - (b + H_1)u_1}, \quad (1.7.38)$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d \left(\frac{(1 + bH_1)u_2^2 + (1 + bH_1)u_1^2 - (b + H_1)u_2 + 1}{u_1} \right) = 0. \quad (1.7.39)$$

Итак, уравнение (1.7.38) имеет первый интеграл

$$\frac{(1 + bH_1)u_2^2 + (1 + bH_1)u_1^2 - (b + H_1)u_2 + 1}{u_1} = C_1 = \text{const}, \quad (1.7.40)$$

который в прежних переменных выглядит следующим образом:

$$\Theta_1(w_5, w_4; \alpha) = \frac{(1 + bH_1)(w_5^2 + w_4^2) - (b + H_1)w_5 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{w_4 \sin \alpha} = C_1 = \text{const}. \quad (1.7.41)$$

Замечание 7.1. Рассмотрим систему (1.7.24)–(1.7.26) с переменной диссипацией с нулевым средним [9, 10, 58, 59], становящейся консервативной при $b = H_1$:

$$\alpha' = -(1 + b^2)w_5 + b(w_4^2 + w_5^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha - b^2 w_5 \cos^2 \alpha, \quad (1.7.42a)$$

$$w_5' = \sin \alpha \cos \alpha - (1 + b^2)w_4^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bw_5(w_4^2 + w_5^2) \cos \alpha - \\ - bw_5 \sin^2 \alpha \cos \alpha + b^2 w_5^2 \sin \alpha \cos \alpha - bw_5 \cos \alpha, \quad (1.7.42b)$$

$$w_4' = (1 + b^2)w_4 w_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bw_4(w_4^2 + w_5^2) \cos \alpha - \\ - bw_4 \sin^2 \alpha \cos \alpha + b^2 w_4 w_5 \sin \alpha \cos \alpha - bw_4 \cos \alpha. \quad (1.7.42c)$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$(1 + b^2)(w_5^2 + w_4^2) - 2bw_5 \sin \alpha + \sin^2 \alpha = C_1^* = \text{const}, \quad (1.7.43)$$

$$w_4 \sin \alpha = C_2^* = \text{const}. \quad (1.7.44)$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (1.7.43), (1.7.44) также является первым интегралом системы (1.7.42). Но при $b \neq H_1$ каждая из функций

$$(1 + bH_1)(w_5^2 + w_4^2) - (b + H_1)w_5 \sin \alpha + \sin^2 \alpha \quad (1.7.45)$$

и (1.7.44) по отдельности не является первым интегралом системы (1.7.24)–(1.7.26). Однако отношение функций (1.7.45), (1.7.44) является первым интегралом системы (1.7.24)–(1.7.26) при любых b, H_1 .

Далее, произведем поиск дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (1.7.24)–(1.7.26). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (1.7.40) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 - \frac{b + H_1}{2(1 + bH_1)}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2(1 + bH_1)}\right)^2 = \frac{(b - H_1)^2 + C_1^2 - 4}{4(1 + bH_1)^2}. \quad (1.7.46)$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(b - H_1)^2 + C_1^2 - 4 \geq 0, \quad (1.7.47)$$

и фазовое пространство системы (1.7.24)–(1.7.26) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (1.7.46).

Таким образом, в силу соотношения (1.7.40) первое уравнение системы (1.7.37) примет вид

$$\tau \frac{du_2}{d\tau} = \frac{1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2 - (1 + bH_1)U_1^2(C_1, u_2)}{-u_2 + b(1 - \tau^2) + b\tau^2(U_1^2(C_1, u_2) + u_2^2) - bH_1u_2(1 - \tau^2)}, \quad (1.7.48)$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2} \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(1 + bH_1)(1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2)} \right\}, \quad (1.7.49)$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (1.7.47), или вид уравнения Бернулли:

$$\frac{d\tau}{du_2} = \frac{(b - (1 + bH_1)u_2)\tau - b\tau^3(1 - U_1^2(C_1, u_2) - u_2^2 - H_1u_2)}{1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2 - (1 + bH_1)U_1^2(C_1, u_2)}. \quad (1.7.50)$$

Уравнение (1.7.50) (при учете (1.7.49)) легко приводится к линейному неоднородному уравнению:

$$\frac{dp}{du_2} = \frac{2((1 + bH_1)u_2 - b)p + 2b(1 - H_1u_2 - u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2))}{1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2 - (1 + bH_1)U_1^2(C_1, u_2)}, \quad p = \frac{1}{\tau^2}. \quad (1.7.51)$$

Последний факт означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде (т. е. через конечную комбинацию квадратур). При этом общее решение уравнения (1.7.51) зависит от произвольной постоянной C_2 . Полные выкладки в данном месте приводить

не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (1.7.51), даже в частном случае

$$|b - H_1| = 2, \quad C_1 = \frac{1 - A_1^4}{1 + A_1^4}, \quad A_1 = \frac{1}{2}(b + H_1)$$

имеет следующее достаточно громоздкое решение:

$$p = p_0(u_2) = C[1 - A_1 u_2]^{2/(1+A_1^4)} \left| \frac{\sqrt{C_1^2 - 4A_1^2(1 - A_1 u_2)^2} \pm C_1}{\sqrt{C_1^2 - 4A_1^2(1 - A_1 u_2)^2} \mp C_1} \right|^{\pm A_1^4/(1+A_1^4)} \times \\ \times \exp \frac{2(A_1 - b)}{(1 + A_1^4)A_1(A_1 u_2 - 1)}, \quad C = \text{const.} \quad (1.7.52)$$

Замечание 7.2. В выражение найденного первого интеграла формально можно вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (1.7.41).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_5, w_4; \alpha) = \ln |\sin \alpha| + G_2 \left(\sin \alpha, \frac{w_5}{\sin \alpha}, \frac{w_4}{\sin \alpha} \right) = C_2 = \text{const.} \quad (1.7.53)$$

Итак, найдены два первых интеграла (1.7.41), (1.7.53) независимой системы третьего порядка (1.7.24)–(1.7.26). Осталось указать по одному первому интегралу — для систем (1.7.27)–(1.7.29) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (1.7.30).

Действительно, искомые первые интегралы имеют следующий вид:

$$\Theta_3(w_3; \beta_3) = \frac{\sqrt{1 + w_3^2}}{\sin \beta_3} = C_3 = \text{const}, \quad (1.7.54)$$

$$\Theta_4(w_2; \beta_2) = \frac{\sqrt{1 + w_2^2}}{\sin \beta_2} = C_4 = \text{const}, \quad (1.7.55)$$

$$\Theta_5(w_1; \beta_1) = \frac{\sqrt{1 + w_1^2}}{\sin \beta_1} = C_5 = \text{const}, \quad (1.7.56)$$

$$\Theta_6(\beta_3, \beta_4) = \beta_4 \pm \arctg \frac{C_5 \cos \beta_3}{\sqrt{C_4^2 \sin^2 \beta_3 - C_5^2}} = C_6 = \text{const}, \quad (1.7.57)$$

при этом в левую часть равенства (1.7.57) вместо C_4, C_5 можно подставить интегралы (1.7.55), (1.7.56).

Теорема 7.2. Система (1.7.24)–(1.7.30) десятого порядка обладает достаточным количеством (шестью) независимых первых интегралов (1.7.41), (1.7.53), (1.7.54)–(1.7.57).

Итак, в данном случае система динамических уравнений (1.1.4)–(1.1.9), (1.1.12)–(1.1.26) при условии (1.7.5) имеет 17 инвариантных соотношений: имеются аналитическая неинтегрируемая связь вида (1.3.1), соответствующая аналитическому первому интегралу (1.6.16), циклические первые интегралы вида (1.2.2), (1.2.3), первый интеграл вида (1.7.41), также имеется первый интеграл (1.7.53), который может быть найден из уравнения (1.7.51), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и, наконец, трансцендентные первые интегралы вида (1.7.54)–(1.7.57).

Теорема 7.3. Система (1.1.4)–(1.1.9), (1.1.12)–(1.1.26) при условиях (1.3.1), (1.7.5), (1.2.2), (1.2.3) обладает 17 инвариантными соотношениями (полным набором), шесть из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа.

7.5. *Топологические аналогии.* Имеют место следующие топологические и механические аналогии.

1. Движение свободного шестимерного твердого тела в неконсервативном поле сил со следящей силой (при наличии неинтегрируемой связи) при учете дополнительной зависимости от тензора угловой скорости (см. также [20, 21, 23]).
2. Движение закрепленного шестимерного физического маятника в потоке набегающей среды (неконсервативное поле сил) при учете дополнительной зависимости от тензора угловой скорости (см. также [36, 37, 39]).
3. Вращение шестимерного твердого тела вокруг центра масс, движущегося прямолинейно и равномерно, и находящегося в неконсервативном поле сил при учете дополнительной зависимости от тензора угловой скорости (см. также [38, 67, 70]).

О более общих топологических аналогиях см. также [1, 2, 7, 8, 16, 18].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Архимедовы равномерные структуры// Совр. мат. Фундам. напр. — 2007. — 23. — С. 46–51.
2. Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Многообразия непрерывных структур// Совр. мат. Фундам. напр. — 2007. — 23. — С. 71–86.
3. Богдавленский О. И. Динамика твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью// Докл. АН СССР. — 1983. — 272, № 6. — С. 1364–1367.
4. Богдавленский О. И. Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера// Докл. АН СССР. — 1986. — 287, № 5. — С. 1105–1108.
5. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.
6. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.
7. Веселов А. П. Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на $so(4)$ // Докл. АН СССР. — 1983. — 270, № 6. — С. 1298–1300.
8. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$ // Докл. РАН. — 2001. — 380, № 1. — С. 47–50.
9. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$ // Докл. РАН. — 2002. — 383, № 5. — С. 635–637.
10. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — 5. — С. 37–41.
11. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Символы Леви-Чивиты, обобщенные векторные произведения и новые случаи интегрируемости в механике многомерного тела// Совр. мат. прилож. — 2012. — 76. — С. 22–39.
12. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
13. Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В. Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
14. Иванова Т. А. Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — 52, № 2. — С. 43–51.
15. Козлов В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — 38, № 1. — С. 3–67.
16. Козлов В. В. Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — 79, № 3. — С. 307–316.
17. Козлов В. В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 2019. — 74, № 1 (445). — С. 117–148.
18. Колмогоров А. Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе// Докл. АН СССР. — 1953. — 93, № 5. — С. 763–766.
19. Локшин Б. Я., Самсонов В. А., Шамолин М. В. Маятниковые системы с динамической симметрией// Совр. мат. прилож. — 2016. — 100. — С. 76–133.
20. Манаков С. В. Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n -мерного твердого тела// Функц. анал. прилож. — 1976. — 10, № 4. — С. 93–94.

21. Походня Н. В., Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — 9, № 100. — С. 136–150.
22. Походня Н. В., Шамолин М. В. Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — 9/1, № 110. — С. 35–41.
23. Походня Н. В., Шамолин М. В. Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — 7, № 118. — С. 60–69.
24. Самсонов В. А., Шамолин М. В. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
25. Тихонов А. А. Метод управления для угловой стабилизации электродинамической тросовой системы// Автомат. телемех. — 2020. — № 2. — С. 91–114.
26. Трофимов В. В. Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — 44, № 5. — С. 1191–1199.
27. Трофимов В. В., Шамолин М. В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — 16, № 4. — С. 3–229.
28. Чаплыгин С. А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости// в кн.: Полн. собр. соч. Т. 1. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133–135.
29. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
30. Шамолин М. В. К задаче о движении тела в среде с сопротивлением// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1992. — 1. — С. 52–58.
31. Шамолин М. В. Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента// Прикл. мат. мех. — 1993. — 57, № 4. — С. 40–49.
32. Шамолин М. В. Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1996. — 4. — С. 57–69.
33. Шамолин М. В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — 53, № 3. — С. 209–210.
34. Шамолин М. В. Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — 364, № 5. — С. 627–629.
35. Шамолин М. В. Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — 375, № 3. — С. 343–346.
36. Шамолин М. В. Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — 57, № 1. — С. 169–170.
37. Шамолин М. В. Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $so(4) \times \mathbf{R}^4$ // Усп. мат. наук. — 2005. — 60, № 6. — С. 233–234.
38. Шамолин М. В. Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — 69, № 6. — С. 1003–1010.
39. Шамолин М. В. Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — 62, № 5. — С. 169–170.
40. Шамолин М. В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. прикл. мат. — 2008. — 14, № 3. — С. 3–237.
41. Шамолин М. В. Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — 425, № 3. — С. 338–342.
42. Шамолин М. В. Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — 65, № 1. — С. 189–190.
43. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — 437, № 2. — С. 190–193.
44. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — 440, № 2. — С. 187–190.
45. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — 444, № 5. — С. 506–509.
46. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — 453, № 1. — С. 46–49.

47. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — 68, № 5 (413). — С. 185–186.
48. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — 449, № 4. — С. 416–419.
49. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — 457, № 5. — С. 542–545.
50. Шамолин М. В. Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — 20, № 4. — С. 3–231.
51. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — 461, № 5. — С. 533–536.
52. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — 464, № 6. — С. 688–692.
53. Шамолин М. В. Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — 52, № 6. — С. 743–759.
54. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — 475, № 5. — С. 519–523.
55. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — 474, № 2. — С. 177–181.
56. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — 477, № 2. — С. 168–172.
57. Шамолин М. В. Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией// Пробл. мат. анализ. — 2018. — № 95. — С. 79–101.
58. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — 482, № 5. — С. 527–533.
59. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — 479, № 3. — С. 270–276.
60. Шамолин М. В. Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 1. Твердое тело в неконсервативном поле. — М.: ЛЕНАНД, 2019.
61. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 489, № 6. — С. 592–598.
62. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 485, № 5. — С. 583–587.
63. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 487, № 4. — С. 381–386.
64. Шамолин М. В. Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 2: Закрепленные маятники разной размерности. — М.: ЛЕНАНД, 2021.
65. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 491, № 1. — С. 95–101.
66. Шамолин М. В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 494, № 1. — С. 105–111.
67. Шамолин М. В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 495, № 1. — С. 84–90.
68. Шамолин М. В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 497, № 1. — С. 23–30.
69. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемости геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 500, № 1. — С. 78–86.
70. Aleksandrov A. Y., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A. On the monoaxial stabilization of a rigid body under vanishing restoring torque// AIP Conf. Proc. — 2018. — 1959. — 080001.
71. Poincaré H. Calcul des probabilités. — Paris: Gauthier-Villars, 1912.

72. *Shamolin M. V.* Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2002. — 110, № 2. — P. 2528–2557.
73. *Tikhonov A. A., Yakovlev A. B.* On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters// Int. J. Plasma Env. Sci. Techn.. — 13, № 1. — P. 49–52.

Шамолин Максим Владимирович

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

E-mail: shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru