ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 208 (2022). С. 122–127
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-208-122-127

УДК 517.9; 531.01

ОДНО ИЗ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ДИАГНОСТИКИ

© 2022 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Памяти Ивана Терентьевича Борисёнка

Аннотация. Показано, что диагностика в случае траекторных измерений с шумом, представляющим собой случайный процесс типа нормального белого шума с нулевым средним значением и ограниченным спектром, осуществима с помощью алгоритмов диагностирования, полученных в предыдущих работах автора. Получен функционал диагностирования, который в предыдущих работах автора вводился априори.

Ключевые слова: задача диагностирования, алгоритмы диагностирования, статистическое решение.

ONE OF THE STATISTICAL SOLUTIONS OF THE PROBLEM OF DIFFERENTIAL DIAGNOSTICS

© 2022 **M. V. SHAMOLIN**

Abstract. In this paper, we show that in the case of trajectory measurements with noise, which is a normal white-noise random process with zero mean value and a limited spectrum, diagnostics is feasible using the diagnostic algorithms developed in the author's previous works. The diagnostic functional was obtained, which was introduced a priori in the previous works of the author.

Keywords and phrases: diagnostic problem, diagnostic algorithms, statistical solution.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

1. Введение. Данное исследование начинается с изучения движения летательного аппарата (см. [10, 11, 15]), которое описывается нелинейными дифференциальными уравнениями. На базе этих уравнений дается классификация возможных неисправностей в системе управления движением. Вводятся понятия опорных неисправностей и их окрестностей, дается математическое моделирование этих неисправностей и их окрестностей, будет введено понятие диагностического пространства и его математической структуры. При этом обсуждаются уравнения движения, а также дается классификация возможных неисправностей. Все это становится подготовительной частью к задаче диагностики, которая представляется в виде двух последовательно решаемых задач: задачи контроля, т.е. задачи определения наличия неисправности в системе управления, и задачи диагностирования, т.е. задачи распознавания конкретной происшедшей неисправности.

 © ВИНИТИ РАН, 2022

В дальнейшем (см. [12,13,32]) дается классификация опорных неисправностей, вводится понятие окрестности опорной неисправности, предложены простейшие математические модели опорных неисправностей и их окрестностей; вводится понятие диагностического пространства, рассматривается его математическая структура, формализующая непрерывность процессов в диагностическом пространстве, показано, что в этом пространстве рассматриваемые опорные неисправности и соответствующие им дифференциальные уравнения невырождены, т.е. измеряемые траектории рассматриваемого летательного аппарата с двумя различными опорными неисправностями не могут совпадать. Подготовлен материал к рассмотрению задачи дифференциальной диагностики.

Далее, в [14,16] объясняются такие понятия, как сфера контроля, эллипсоид контроля, трубка контроля. Предлагается решение задачи контроля методом статистических испытаний. Дается постановка расширенной задачи контроля. Подготовлен материал к рассмотрению задачи диагностирования.

Для случая точных траекторных измерений [18] формулируются постановка задачи диагностирования, теорема диагностирования и, как следствие теоремы, два алгоритма диагностирования. Рассмотрена методика априорного счета констант, которые в случае использования первого алгоритма диагностирования требуется запоминать в программе диагностирования на компьютере и других параметров алгоритма. Второй алгоритм не требует запоминания констант, а основан на поиске минимального значения функционала диагностирования из его значений, полученных в процессе диагностирования для априори выбранного набора опорных неисправностей. Обсуждаются различные обобщения теоремы диагностирования: вопросы применимости полученных алгоритмов диагностики при использовании вектора диагностирования меньшей чем вектор состояния размерности и в случае непрерывной экспресс-диагностики без применения поверхности контроля, задача о выборе «минимального» времени диагностирования, задача диагностирования неисправностей, происшедших в окрестностях опорных невырожденных неисправностей и непредусмотренных априорным списком, рассмотрены другие функционалы, решающие задачу диагностирования. Наконец, сформулирована расширенная постановка задачи диагностирования, решение которой осуществимо с помощью предложенных алгоритмов.

В дальнейшем дается оценка погрешностей метода полей направлений в случае не точных траекторных измерений, а траекторных измерений с ошибкой, ограниченной по модулю заданной гладкой функцией времени, и в случае, если эта ошибка является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с фиксированными параметрами. Показано, что и в этих более сложных случаях можно указать такое «наилучшее» число необходимых траекторных измерений, при котором предложенные алгоритмы диагностирования будут работать конструктивно, а неисправность будет определяться однозначно (ср. с [3,5,9,26,27,29]).

В данной работе показано, что диагностика в случае траекторных измерений с шумом, представляющим собой случайный процесс типа нормального белого шума с нулевым средним значением и ограниченным спектром, осуществима с помощью алгоритмов диагностирования, полученных в предыдущих исследованиях, т.е. результаты данной работы остаются справедливыми и в этом достаточно общем случае, при этом получен функционал диагностирования, который в предыдущих работах автора вводился априори [15,16,32].

Итак, в [6, 8, 21, 22], в рамках доказательства предельной теоремы, была показана возможность диагностики динамических управляемых систем в случае траекторных измерений с ошибкой ограниченной по модулю заданной функцией времени и в случае, если эта ошибка является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с дисперсией σ^2. Также было и будет показано, что в этих случаях можно указать «наилучшее» число необходимых траекторных измерений, при которых возможно разделение траекторий неисправных систем, т.е. точное определение происшедшей в системе неисправности [31,33,34].

Покажем теперь, что с помощью предложенных алгоритмов можно осуществить диагностику динамических управляемых систем в случае траекторных измерений с шумом, исходя из более общих вероятностных представлений [4,7,20].

2. Некоторые статистические алгоритмы и дифференциальные уравнения. Напомним, что конечному набору опорных невырожденных неисправностей

$$H = \|H_j\|_{j=1}^{l} \tag{1}$$

из класса возможных, введенного в работах [23,25], поставим в соответствие набор обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x' = f_j(x,t), \quad j = 1, \ldots, l. \tag{2}$$

Здесь $f_j(x,t)$ — известные вектор-функции, отличающиеся друг от друга той или иной неисправностью (1). Модели (2) будем называть *невырожденными*. Таким образом, на выбор правых частей уравнений (2) вводятся некоторые ограничения (см. также [24, 28]).

В соответствии с (2) рассмотрим (вообще говоря, несколько другие) уравнения

$$x' = \bar{f}_j(x,t), \quad j = 1, \ldots, l, \tag{3}$$

(в дальнейшем черту опустим).

Предположим, что в момент $t = 0$ произошла j-я неисправность, т.е. в правой части (3) присутствует одна из функций $f_j(x,t)$, причем это может быть любая f_j $(j = 1, \ldots, l)$ *с равной вероятностью.*

Предположим, что доступен наблюдению вектор

$$z(t) = x(t) + \xi(t),$$

где $x(t)$ — вектор состояния системы, а $\xi(t)$ — случайный процесс типа нормального белого шума с нулевым средним значением и ограниченным спектром $W(\omega)$ следующего вида:

$$W(\omega) = \begin{cases} M_0, & |\omega| \leqslant \Delta; \\ 0, & |\omega| > \Delta. \end{cases} \tag{4}$$

Величина $\xi(t)$ является *ошибкой измерения вектора состояния системы* $x(t)$ (см. также [17,19]).

На основе анализа наблюдаемого суммарного сигнала $z(t)$ можно вычислить распределение $P_z(x)$ для всех возможных значений сигнала $x(t)$. Распределение $P_z(x)$ называют распределением обратных вероятностей [30], так как оно указывает на то, каковы вероятности тех или иных значений причины x, если известно вызванное этой причиной следствие z.

На основе анализа этого распределения принимается решение о том, каково было значение сигнала $x(t)$, т.е. в нашем случае — каков был номер правой части системы (3), решением которой является вектор x. Будем обозначать решение системы (3) с правой частью $f_j(x,t)$ буквой x с индексом j.

Номер j может быть определен, например, на основе принципа *максимальной обратной вероятности*, т.е. в качестве j принимается номер решения x_j, для которого вероятность $P_z(x_j)$ имеет наименьшее значение (см. также [24, 30]).

Вероятность $P_z(x)$ находим из классических соотношений

$$P(x,z) = P(x)P_x(z) = P(z)P_z(x),$$

где $P(x,z)$ — совместная вероятность двух случайных функций x и z, $P_x(z)$ — условная вероятность z при заданном x, $P(z)$ — безусловная вероятность z. Тогда, заменяя $1/P(z)$ на постоянную K (так как нас интересует зависимость $P_z(x)$ при данном измеренном z), получим:

$$P_z(x) = KP(x)P_x(z).$$

Постоянная K определяется из условия нормировки

$$\int\limits_{A_x} P_z(x)dx = 1,$$

где A_x — область всех возможных значений x. Величины

$$P(x) = P(x_j) = \frac{1}{l}$$

(где l — число возможных правых частей (3)) априорно известны. Требуется найти зависимость величины $P_x(z)$ от x при данном измеренном z (см. также [20]).

При данном векторе $x_j(t)$ вероятность реализации величины $z(t)$ равна вероятности реализации величины

$$\xi_j(t) = z(t) - x_j(t).$$

Считая величины $\xi_j(t)$ и $x_j(t)$ *статистически независимыми*, получим:

$$P_x(z) = F(\xi_j) = \frac{1}{(2\pi M)^N} \exp\left\{-\frac{1}{M_0}\int\limits_{\tau_0}^{\tau} \xi_j^2(t)dt\right\}.$$

Здесь $M_0 = M/2\Delta$ — единичная интенсивность шума (4), M — средняя интенсивность, $N = [\Delta(\tau - \tau_0)]$ (квадратные скобки в данном случае означают взятие целой части числа), где Δ — ширина спектра, $\tau - \tau_0$ — время определения номера j (время диагностирования). Таким образом, справедливо представление

$$P_x(z) = \frac{1}{(2\pi M)^N} \exp\left\{-\frac{1}{M_0}\int\limits_{\tau_0}^{\tau} (z(t) - x_j(t))^2 dt\right\}.$$

Тогда

$$P_z(x_j) = \frac{K}{l}\frac{1}{(2\pi M)^N} \exp\left\{-\frac{1}{M_0}\int\limits_{\tau_0}^{\tau} (z(t) - x_j(t))^2 dt\right\}. \tag{5}$$

В силу того, что величины K и l постоянны, величина $(2\pi M)^N$ в (5) при конкретном значении $\xi(t)$ и заданной разности $\tau - \tau_0$ также постоянна. Нахождение же максимума обратной вероятности сводится к нахождению максимума величины

$$\exp\left\{-\frac{1}{M_0}\int\limits_{\tau_0}^{\tau} (z(t) - x_j(t))^2 dt\right\}$$

или, что то же самое, к нахождению минимума величины

$$\int\limits_{\tau_0}^{\tau} (z(t) - x_j(t))^2 dt \tag{6}$$

(так как $M_0 = \text{const}$ при фиксированных величинах M и Δ).

3. Преобразование ключевой величины, основной функционал и решающее правило. Покажем, что величина (6), путем использования теоремы Котельникова о разложении случайной функции, может быть сведена от интеграла к сумме.

Действительно, так как время диагностирования $\tau - \tau_0$ задано, и характеристика шума $\xi(t)$ известна (в частности, известна ширина спектра Δ), то по теореме Котельникова существует число $N = [\Delta(\tau - \tau_0)]$ такое, что N значений

$$\xi_j(t_i), \quad i = 1, \ldots, N, \quad t_i = \frac{i}{\Delta},$$

являются *некоррелированными* (а при нашем предположении о нормальности белого шума и статистически независимыми) координатами процесса $\xi_j(t)$, и на конечном интервале времени (τ_0, τ) применимо разложение следующего вида:

$$\int\limits_{\tau_0}^{\tau} \xi_j^2(t)dt = \sum_{i=1}^{N} \xi_j^2(t_i). \tag{7}$$

Моменты времени t_i в (7) являются моментами измерений вектора $z(t)$ в процессе функционирования системы. Для тех же моментов времени t_i (в бортовом вычислителе по модели объекта) вычисляются все векторы состояний $\overline{x_j}$, $j = 1, \ldots, l$.

Решающее правило определения номера j правой части (3) сформулируем теперь следующим образом.

На интервале времени (τ_0, τ) для всех возможных значений номеров j правой части (3) вычисляются следующие суммы:

$$S_j = \sum_{i=1}^{N} (z(t) - \overline{x_j}(t))^2. \tag{8}$$

Число j, для которого значение S_j минимально, указывает номер правой части (3), т.е. номер случившейся в системе неисправности.

Таким образом, в результате статистического решения задачи дифференциальной диагностики при траекторных измерениях с шумом получен алгоритм диагностики, аналогичный алгоритму, который влечет теорема из [32], а также функционал диагностики (8), который в теореме вводился априори, т.е. получено *замкнутое детерминированное решение* задачи дифференциальной диагностики: получен функционал, решающий задачу, и указано правило его минимизации (см. также [26, 28]).

Полученный алгоритм верен и в случае, если вектор $z(t)$ содержит несущее информацию о характере функций $f_j(x, t)$, $j = 1, \ldots, l$, в правых частях уравнений (3) подмножество $d < n$ измеряемых координат фазового вектора состояния $x(t)$.

Если динамическая управляемая система подвержена внутренним и внешним воздействиям шумов, и математическая модель движения этой системы так или иначе описывает эти шумы, то диагностика управления такой системой также может быть осуществлена с помощью полученного алгоритма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Борисенок И. Т., Шамолин М. В.* Решение задачи дифференциальной диагностики// Фундам. прикл. мат. — 1999. — *5*, № 3. — С. 775–790.
2. *Борисенок И. Т., Шамолин М. В.* Решение задачи дифференциальной диагностики методом статистических испытаний// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2001. — № 1. — С. 29–31.
3. *Жуков В. П.* О достаточных и необходимых условиях асимптотической устойчивости нелинейных динамических систем// Автомат. телемех. — 1994. — № 3. — С. 24–36.
4. *Жуков В. П.* О редукции задачи исследования нелинейных динамических систем на устойчивость вторым методом Ляпунова// Автомат. телемех. — 2005. — № 12. — С. 51–64.
5. *Жуков В. П.* О достаточных и необходимых условиях грубости нелинейных динамических систем в смысле сохранения характера устойчивости// Автомат. телемех. — 2008. — № 1. — С. 30–38.
6. *Мироновский Л. А.* Функциональное диагностирование динамических систем// Автомат. телемех. — 1980. — № 3. — С. 96–121.
7. *Окунев Ю. М., Парусников Н.* Структурные и алгоритмические аспекты моделирования для задач управления. — М.: Изд-во МГУ, 1983.
8. *Пархоменко П. П., Сагомонян Е. С.* Основы технической диагностики. — М.: Энергия, 1981.
9. *Чикин М. Г.* Системы с фазовыми ограничениями// Автомат. телемех. — 1987. — № 10. — С. 38–46.
10. *Шамолин М. В.* Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. — М.: Экзамен, 2004.
11. *Шамолин М. В.* Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. Изд. 2-е, перераб. и дополн.. — М.: Экзамен, 2007.
12. *Шамолин М. В.* Расширенная задача дифференциальной диагностики и ее возможное решение// Электрон. модел. — 2009. — *31*, № 1. — С. 97–115.
13. *Шамолин М. В.* Решение задачи диагностирования в случае точных траекторных измерений с ошибкой// Электрон. модел. — 2009. — *31*, № 3. — С. 73–90.
14. *Шамолин М. В.* Диагностика неисправностей в одной системе непрямого управления// Электрон. модел. — 2009. — *31*, № 4. — С. 55–66.

15. *Шамолин М. В.* Диагностика одной системы прямого управления движением летательных аппаратов// Электрон. модел. — 2010. — *32*, № 1. — С. 45–52.
16. *Шамолин М. В.* Диагностика движения летательного аппарата в режиме планирующего спуска// Электрон. модел. — 2010. — *32*, № 5. — С. 31–44.
17. *Шамолин М. В.* Диагностика гиростабилизированной платформы, включенной в систему управления движением летательного аппарата// Электрон. модел. — 2011. — *33*, № 3. — С. 121–126.
18. *Шамолин М. В.* Решение задачи диагностирования в случаях траекторных измерений с ошибкой и точных траекторных измерений// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2018. — *150*. — С. 88–109.
19. *Шамолин М. В., Кругова Е. П.* Задача диагностики модели гиростабилизированной платформы// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2019. — *160*. — С. 137–141.
20. *Altman E., Avrachenkov K., Menache I., Miller G., Prabhu B. J., Shwartz A.* Power control in wireless cellular networks// IEEE Trans. Automat. Control. — 2009. — *54*, № 10. — P. 2328–2340.
21. *Antoulas A. C., Sorensen D. C., Zhou Y.* On the decay rate of Hankel singular values and related issues// Syst,. Control Lett. — 2002. — *46*. — P. 323–342.
22. *Beck A., Teboulle M.* Mirror descent and nonlinear projected subgradient methods for convex optimization// Oper. Res. Lett. — 2003. — *31*, № 3. — P. 167–175.
23. *Ben-Tal A., Margalit T., Nemirovski A.* The ordered subsets mirror descent optimization method with applications to tomography// SIAM J. Optim. — 2001. — *12*, № 1. — P. 79–108.
24. *Ceci C., Gerardi A., Tardelli P.* Existence of optimal controls for partially observed jump processes// Acta Appl. Math. — 2002. — *74*, № 2. — P. 155–175.
25. *Chiang M., Tan C. W., Hande P., Lan T.* Power control in wireless cellular networks// Found. Trends Networking. — 2008. — *2*, № 4. — P. 381–533.
26. *Choi D. H., Kim S. H., Sung D. K.* Energy-efficient maneuvering and communication of a single UAV-based relay// IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst. — 2014. — *50*, № 3. — P. 2119–2326.
27. *Fleming W. H.* Optimal control of partially observable diffusions// SIAM J. Control. — 1968. — *6*, № 2. — P. 194–214.
28. *Ho D.-T., Grotli E. I., Sujit P. B., Johansen T. A., Sousa J. B.* Optimization of wireless sensor network and UAV data acquisition// J. Intel. Robot. Syst. — 2015. — *78*, № 1. — P. 159–179.
29. *Ober R. J.* Balanced parameterization of classes of linear systems *// SIAM J. Control Optim. — 1991. — *29*, № 6. — P. 1251–1287.
30. *Ober R. J., McFarlane D.* Balanced canonical forms for minimal systems: A normalized coprime factor approach// Linear Algebra Appl. — 1989. — *122-124*. — P. 23–64.
31. *Rieder U., Winter J.* Optimal control of Markovian jump processes with partial information and applications to a parallel queueing model// Math. Meth. Oper. Res. — 2009. — *70*. — P. 567–596.
32. *Shamolin M. V.* Foundations of differential and topological diagnostics// J. Math. Sci. — 2003. — *114*, № 1. — P. 976–1024.
33. *Su W., Boyd S., Candes E.* A differential equation for modeling Nesterov's accelerated gradient method: Theory and insights// J. Machine Learning Res. — 2016. — № 17 (153). — P. 1–43.
34. *Wilson D. A.* The Hankel operator and its induced norms// Int. J. Contr. — 1985. — *42*. — P. 65–70.

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: `shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru`