ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 226 (2023). С. 47–53
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-226-47-53

УДК 517.968

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ СО СДВИГОМ И СОПРЯЖЕНИЕМ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ СИСТЕМЫ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

© 2023 г. **А. М. ВОЛОДЧЕНКОВ, А. В. ЮДЕНКОВ**

Аннотация. В работе исследуется система сингулярных интегральных уравнений со сдвигом Карлемана, соответствующая многоэлементной краевой задаче для бианалитических функций. Полученные результаты применимы для решения основных задач теории упругости при контактном взаимодействии тел с различными упругими свойствами.

***Ключевые слова*:** сингулярное уравнение, краевая задача, бианалитическая функция.

BOUNDARY-VALUE PROBLEMS WITH SHIFT AND CONJUGATION AND CORRESPONDING SYSTEMS OF SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS FOR BIANALYTIC FUNCTIONS

© 2023 **A. M. VOLODCHENKOV, A. V. YUDENKOV**

Abstract. In this paper, we examine a system of singular integral equations with a Carleman shift corresponding to a multielement boundary-value problem for bianalytic functions. The results obtained are applicable to the solution of the main problems of the theory of elasticity in the contact interaction of bodies with various elastic properties.

***Keywords and phrases*:** singular equation, boundary-value problem, bianalytic function.

***AMS Subject Classification*:** 45E99

1. Введение. Ряд важных задач, возникающих в теории статических полей, эффективно решаются с использованием комплексного потенциала. Комплексный потенциал, соответствующий напряженному состоянию однородного упругого тела, имеет достаточно сложную структуру. Так, для изотропного тела комплексный потенциал представляет собой бианалитическую функцию вида

$$F = F_1(z) + \overline{z}F_2(z), \tag{1}$$

где F_1, F_2 — аналитические функции в области D, занятой телом, $\overline{z} = x - iy$ — неаналитическая компонента [1]. В случае, когда тело обладает анизотропными свойствами, комплексный потенциал имеет вид

$$\Phi = \Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2) + \Phi_3(z_3), \tag{2}$$

где z_k $(k = 1, 2, 3)$ — обобщенные комплексные постоянные, которые в общем случае не являются аналитическими функциями (см. [3, 9]).

Решение основных задач теории упругости равносильно решению краевых задач для функций (1) и (2). Так, первая задача теории упругости для плоского тела, занимающего область D, ограниченную контуром L, равносильна следующей краевой задаче: определить аналитические компоненты бианалитической функции (1) по краевому условию:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}\left[\varphi_0'(t) + \bar{t}\varphi_1'(t) + \varphi_1(t)\right] = g_1(t), \\ &\operatorname{Im}\left[\varphi_0'(t) + \bar{t}\varphi_1'(t) - \varphi_1(t)\right] = g_2(t) \end{aligned} \qquad t \in L.$$

Здесь $g_k(t)$, $k = 1, 2,$ — функции, определяемые внешними напряжениями на границе контура L, $\varphi_k(t)$ — искомые аналитические в области D компоненты. Функции обычно рассматриваются на пространстве функций класса Гельдера.

В случае, когда тело обладает прямолинейными анизотропными свойствами, математическая модель первой основной задачи теории упругости имеет следующий вид (см. [3]):

$$\begin{aligned} &2\operatorname{Re}\Big(\Phi_1(\alpha_1(\sigma)) + \Phi_2(\alpha_1(\sigma)) + \Phi_3(\alpha_1(\sigma))\Big) = f_1(\sigma), \\ &2\operatorname{Re}\Big(\mu_1\Phi_1(\alpha_1(\sigma)) + \mu_2\Phi_2(\alpha_1(\sigma)) + \mu_3\Phi_3(\alpha_1(\sigma))\Big) = f_1(\sigma), \\ &2\operatorname{Re}\Big(\nu_1\Phi_1(\alpha_1(\sigma)) + \nu_2\Phi_2(\alpha_1(\sigma)) + \nu_3\Phi_3(\alpha_1(\sigma))\Big) = f_3(\sigma); \end{aligned}$$

здесь f_k $(k = 1, 2, 3)$ — заданные на контуре L функции, определяемые внешними нагрузками и формой контура, $\alpha_k(\sigma)$ — неаналитические функции сдвига, определяемыми упругими свойствами тела.

Первые работы, в которых для решения основных задач теории упругости использовались краевые задачи для бигармонических (бианалитических) функций принадлежат Г. В. Колосову. В основополагающих работах Н. И. Мусхелишвили [6, 7] была детально разработана математическая теория основных задач теории упругости для изотропных тел с использованием краевых задач и соответствующих интегральных уравнений для бианалитических функций. Так же следует упомянуть работы Д. И. Шермана, в которых для решения основных задач теории упругости использовались системы сингулярных интегральных уравнений (см. [7]). В [3] получен комплексный потенциал (2) для тел с прямолинейной анизотропией общего вида и выведены краевые условия для его определения. Решение основных краевых задач теории упругости для анизотропных тел с использованием функции сдвига для функций класса Гельдера и функций, сходящихся в среднем квадратическом, дано авторами (см. [9]).

Ф. Д. Гаховым были поставлены так называемые классические задачи для полианалитических функций. С одной стороны, эти задачи обобщают первую, вторую и смешанную задачи теории упругости для изотропных тел, а также задачу Рикье. С другой стороны, классические задачи для полианалитических функций обобщают известные задачи Гильберта и Римана для аналитических функций. Основные виды таких краевых задач для бианалитических функций и основные методы их решения можно найти в [2, 9, 10].

Следует также упомянуть, что качественная теория бианалитических функций и их обобщений развивалась смоленской школой математиков, возглавляемых долгие годы профессором М. Б. Балком (см. [1]).

Рассмотрим сингулярный интеграл типа Коши

$$\Phi(Z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau. \tag{3}$$

Функция $\varphi(\tau)$ называется плотностью, $1/(\tau - z)$ — ядром интеграла типа Коши; контур L ограничивает область, занятую телом.

Заменяя в краевых задачах соответствующие функции на граничные значения интеграла (3), можно получить соответствующие системы сингулярных уравнений (см. [2, 4, 7, 11]).

В работе рассматриваются системы сингулярных интегральных уравнений с неаналитическим сдвигом $\alpha(t)$ и неаналитическими компонентами $(\bar{t})$, соответствующие основным задачам для бианалитических функций и их обобщений. Системы рассматриваются на пространстве функций Гельдера и на пространстве функций, интегрируемых в среднем квадратическом.

2. Постановка задачи. Рассмотрим систему сингулярных интегральных уравнений, содержащую как неаналитическую компоненту $\overline{t}$, так и функцию сдвига α:

$$a_1(t)\Big[\rho_0(t)+\overline{t}\rho_1'(t)+\rho_1'(t)\Big]+\frac{c_1(t)}{\pi i}\int\limits_L\frac{\rho_0(\tau)+\overline{t}\rho_1'(\tau)+\rho_1'(\tau)}{\tau-t}d\tau+$$
$$+b_1(t)\Big[\rho_0(\alpha(t))+\overline{\alpha(t)}\rho_1'(\alpha(t))+\rho_1'(\alpha(t))\Big]+\frac{d_1(t)}{\pi i}\int\limits_L\frac{\rho_0(\tau)+\overline{\alpha(t)}\rho_1'(\tau)+\rho_1'(\tau)}{\tau-\alpha(t)}d\tau+$$
$$+\int\limits_L A_{11}(t,\tau)\rho_0(\tau)d\tau+\int\limits_L A_{12}(t,\tau)\rho_1(\tau)d\tau=f_1(t), \tag{4a}$$

$$a_2(t)\Big[\rho_0(t)+\overline{t}\rho_1'(t)-\rho_1'(t)\Big]+\frac{c_2(t)}{\pi i}\int\limits_L\frac{\rho_0(\tau)+\overline{t}\rho_1'(\tau)-\rho_1'(\tau)}{\tau-t}d\tau+$$
$$+b_2(t)\Big[\rho_0(\alpha(t)))+\overline{\alpha(t)}\rho_1'(\alpha(t))-\rho_1'(\alpha(t))\Big]+\frac{d_2(t)}{\pi i}\int\limits_L\frac{\rho_0(\tau)+\overline{\alpha(t)}\rho_1'(\tau)-\rho_1'(\tau)}{\tau-\alpha(t)}d\tau+$$
$$+\int\limits_L A_{21}(t,\tau)\rho_0(\tau)d\tau+\int\limits_L A_{22}(t,\tau)\rho_1(\tau)d\tau=f_2(t). \tag{4b}$$

Здесь $\rho_0(t)$, $\rho_1(t)$ — искомые функции, $a_k(t)$, $b_k(t)$, $c_k(t)$, $d_k(t)$, $f_k(t)$ — заданные на контуре L функции класса Гельдера, $A_{km}(t,\tau)$ — известные ядра Фредгольма. Положим, что функция сдвига удовлетворяет условию Карлемана $\alpha(\alpha(t))\equiv t$.

Характеристическая часть системы (4) соответствует краевой задаче для бианалитической функции следующего вида:

$$m_1(t)\left[\varphi_0^{+'}(t)+\overline{t}\varphi_1^{+'}(t)+\varphi_1^{+}(t)\right]+n_1(t)\left[\varphi_0^{+'}(\alpha(t))+\overline{\alpha(t)}\varphi_1^{+'}(\alpha(t))+\varphi_1^{+}(\alpha(t))\right]+$$
$$+l_1(t)\left[\varphi_0^{-'}(t)+\overline{t}\varphi_1^{-'}(t)+\varphi_1^{-}(t)\right]+k_1(t)\left[\varphi_0^{-'}(\alpha(t))+\overline{\alpha(t)}\varphi_1^{-'}(\alpha(t))+\varphi_1^{-}(\alpha(t))\right]=g_1(t), \tag{5a}$$

$$m_2(t)\left[\varphi_0^{+'}(t)+\overline{t}\varphi_1^{+'}(t)-\varphi_1^{+}(t)\right]+n_2(t)\left[\varphi_0^{+'}(\alpha(t))+\overline{\alpha(t)}\varphi_1^{+'}(\alpha(t))-\varphi_1^{+}(\alpha(t))\right]+$$
$$+l_2(t)\left[\varphi_0^{-'}(t)+\overline{t}\varphi_1^{-'}(t)-\varphi_1^{-}(t)\right]+k_2(t)\left[\varphi_0^{-'}(\alpha(t))+\overline{\alpha(t)}\varphi_1^{-'}(\alpha(t))-\varphi_1^{-}(\alpha(t))\right]=g_2(t) \tag{5b}$$

Здесь $\varphi_k^{\pm}(z)$ — аналитические компоненты кусочно бианалитической функции. Краевую задачу (5) можно считать обобщением известной четырехэлементной задачи Карлемана для аналитических функций на бианалитические функции (см. [4, 5]).

3. Решение задачи. Вначале рассмотрим вспомогательную систему сингулярных интегральных уравнений

$$\begin{aligned}
&a_1(t)\left[\rho_0(t)+\overline{t}\rho_1'(t)+\rho_1'(t)\right]+\frac{c_1(t)}{\pi i}\int\limits_L\frac{\rho_0(\tau)+\overline{t}\rho_1'(\tau)+\rho_1'(\tau)}{\tau-t}d\tau=f_1(t),\\
&a_2(t)\left[\rho_0(t)+\overline{t}\rho_1'(t)-\rho_1'(t)\right]+\frac{c_2(t)}{\pi i}\int\limits_L\frac{\rho_0(\tau)+\overline{t}\rho_1'(\tau)-\rho_1'(\tau)}{\tau-t}d\tau=f_2(t).
\end{aligned} \tag{6}$$

Проведем следующие преобразования:

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\frac{\overline{t}\rho_1'(\tau)d\tau}{\tau-t}=\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\frac{\overline{\tau}\rho_1'(\tau)d\tau}{\tau-t}+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\partial\left(\frac{\overline{t}-\overline{\tau}}{\tau-t}\right)\rho(\tau)d\tau.$$

Введем вспомогательные функции

$$W_1(t) = \rho_0(t) + \overline{t}\rho_1'(t) + \rho_1'(t), \quad W_2(t) = \rho_0(t) + \overline{t}\rho_1'(t) - \rho_1'(t)$$

С учетом проведенных преобразований и введенных обозначений получим из системы (6) следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} a_1(t)W_1(t) + \frac{c_1(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{W_1(\tau)}{\tau - t}d\tau = f_1(t) - \int\limits_L R_1(t,\tau)\rho_1(\tau), \\ a_2(t)W_2(t) + \frac{c_2(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{W_2(\tau)}{\tau - t}d\tau = f_2(t) - \int\limits_L R_2(t,\tau)\rho_1(\tau). \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $R_k(t,\tau)$ — известные ядра Фредгольма. Проводя регуляризацию системы (7) методом Карлемана—Векуа (см. [2]), получим:

$$\rho_1(t) + \int\limits_L K_1(t,\tau)\rho_1(\tau)d\tau = Q_1, \tag{8}$$

$$\rho_0(t) = -\rho_1'(t) + \rho_1(t) + \int\limits_L K_2(t,\tau)\rho_1(\tau)d\tau + Q_2. \tag{9}$$

В случае разрешимости интегрального уравнения Фредгольма второго рода (8) функция $\rho_0(t)$ определяется по формуле (9).

Сформулируем полученные результаты.

Теорема 1. *Решение характеристической системы сингулярных интегральных уравнений* (6) *сводится к регуляризации двух обычных характеристических уравнений* (7) *и уравнения Фредгольма второго рода* (8).

Теорема 2. *Характеристическая система сингулярных интегральных уравнений является нетеровой. Индекс системы равен*

$$K = K_1 + K_2 = \operatorname{Ind}\left(\frac{a_1(t) + c_1(t)}{a_1(t) - c_1(t)}\right) + \operatorname{Ind}\left(\frac{a_2(t) + c_2(t)}{a_2(t) - c_2(t)}\right).$$

Замечание. Алгоритм решения системы (6) и основные результаты (теоремы 1, 2) не изменятся, если функцию $\overline{t}$ заменить на функцию $\overline{\alpha(t)}$.

Перейдем к исследованию основной системы (4). Воспользовавшись свойством Карлемана для сдвига $\alpha(t)$, получим:

$$\begin{aligned} a_1(\alpha(t))\left[\rho_0(\alpha(t)) + \overline{\alpha(t)}\rho_1'(\alpha(t)) + \rho_1(\alpha(t))\right] + \frac{c_1(\alpha(t))}{\pi i}\int\limits_L \frac{\rho_0(\tau) + \overline{\alpha(t)}\rho_1'(\tau) + \rho_1(\tau)}{\tau - \alpha(t)}d\tau + \\ + b_1(\alpha(t))\left[\rho_0(t) + \overline{t}\rho_1'(t) + \rho_1(t)\right] + \frac{d_1(\alpha(t))}{\pi i}\int\limits_L \frac{\rho_0(\tau) + \overline{t}\rho_1'(\tau) + \rho_1(\tau)}{\tau - t}d\tau + \\ + \int\limits_L A_{11}(t,\tau)\rho_0(\tau)d\tau + \int\limits_L A_{12}(t,\tau)\rho_1(\tau)d\tau = f_1(\alpha(t)), \end{aligned} \tag{10a}$$

$$a_2(\alpha(t))\left[\rho_0(\alpha(t))+\overline{\alpha(t)}\rho_1'(\alpha(t))-\rho_1(\alpha(t))\right]+\frac{c_2(\alpha(t))}{\pi i}\int\limits_L\frac{\rho_0(\tau)+\overline{\alpha(t)}\rho_1'(\tau)-\rho_1(\tau)}{\tau-\alpha(t)}d\tau+$$
$$+b_1(\alpha(t))\left[\rho_0(t)+\overline{t}\rho_1'(t)-\rho_1(t)\right]+\frac{d_2(\alpha(t))}{\pi i}\int\limits_L\frac{\rho_0(\tau)+\overline{t}\rho_1'(\tau)-\rho_1(\tau)}{\tau-t}d\tau+$$
$$+\int\limits_L A_{21}(t,\tau)\rho_0(\tau)d\tau+\int\limits_L A_{22}(t,\tau)\rho_1(\tau)d\tau=f_2(\alpha(t)). \quad (10b)$$

Воспользуемся следующими соотношениями:

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\frac{\rho_0(\tau)+\overline{\alpha(t)}\rho_1'(\tau)-\rho_1(\tau)}{\tau-\alpha(t)}d\tau=\frac{\gamma}{\pi i}\int\limits_L\rho_0\frac{\rho_0(\alpha(\tau))+\overline{\alpha(t)}\rho_1'(\alpha(\tau))-\rho_1(\alpha(\tau))}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}\alpha'(\tau)d\tau$$

Здесь $\gamma=1$, если сдвиг $\alpha(t)$ не меняет направления обхода (прямой сдвиг); $\gamma=-1$, если сдвиг меняет направление обхода (обратный сдвиг).

Введем дополнительные функции

$$\rho_3(t)=\rho_0(\alpha(t)),\quad \rho_4(t)=\rho_1(\alpha(t))$$

Получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$a_1(t)\left[\rho_0(t)+\overline{t}\rho_1'(t)+\rho_1(t)\right]+\frac{c_1(t)}{\pi i}\int\limits_L\frac{\rho_0(\tau)+\overline{t}\rho_1'(\tau)+\rho_1(\tau)}{\tau-t}d\tau+$$
$$+b_1(t)\left[\rho_3(t)+\overline{\alpha(t)}\rho_4'(t)+\rho_4(t)\right]+\frac{\gamma d_1(t)}{\pi i}\int\limits_L\frac{\rho_3(\tau)+\overline{\alpha(t)}\rho_4'(\tau)+\rho_4(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}\alpha'(\tau)d\tau+$$
$$+\int\limits_L A_{11}(t,\tau)\rho_0(\tau)d\tau+\int\limits_L A_{12}(t,\tau)\rho_1(\tau)d\tau=f_1(t), \quad (11a)$$

$$a_2(t)\left[\rho_0(t)+\overline{t}\rho_1'(t)-\rho_1(t)\right]+\frac{c_2(t)}{\pi i}\int\limits_L\frac{\rho_0(\tau)+\overline{t}\rho_1'(\tau)-\rho_1(\tau)}{\tau-t}d\tau+$$
$$+b_2(t)\left[\rho_3(t)+\overline{\alpha(t)}\rho_4'(t)-\rho_4(t)\right]+\frac{\gamma d_2(t)}{\pi i}\int\limits_L\frac{\rho_3(\tau)+\overline{\alpha(t)}\rho_4'(\tau)-\rho_4(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}\alpha'(\tau)d\tau+$$
$$+\int\limits_L A_{21}\left(t,\tau\right)\rho_0(\tau)d\tau+\int\limits_L A_{22}\left(t,\tau\right)\rho_1(\tau)d\tau=f_2(t), \quad (11b)$$

$$a_1(\alpha(t))\left[\rho_3(t)+\overline{\alpha(t)}\rho_4'(t)+\rho_4(t)\right]+\frac{\gamma c_1(\alpha(t))}{\pi i}\int\limits_L\frac{\rho_3(\tau)+\overline{\alpha(t)}\rho_4'(\tau)+\rho_4(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}\alpha'(\tau)d\tau+$$
$$+b_1(\alpha(t))\left[\rho_0(t)+\overline{t}\rho_1'(t)+\rho_1(t)\right]+\frac{d_1(\alpha(t))}{\pi i}\int\limits_L\frac{\rho_0(\tau)+\overline{t}\rho_1'(\tau)+\rho_1(\tau)}{\tau-t}d\tau+$$
$$+\int\limits_L A_{11}(\alpha(t),\tau)\rho_0(\tau)d\tau+\int\limits_L A_{12}(\alpha(t),\tau)\rho_1(\tau)d\tau=f_1(\alpha(t)), \quad (11c)$$

$$a_2(\alpha(t))\left[\rho_3(t)+\overline{\alpha(t)}\rho_4'(t)-\rho_4(t))\right]+\frac{\gamma c_2(\alpha(t))}{\pi i}\int\limits_L\frac{\rho_3(\tau)+\overline{\alpha(t)}\rho_4'(\tau)-\rho_4(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}\alpha'(\tau)d\tau+$$
$$+b_2(\alpha(t))\left[\rho_0(t)+\overline{t}\rho_1'(t)-\rho_1(t)\right]+\frac{d_2(\alpha(t))}{\pi i}\int\limits_L\frac{\rho_0(\tau)+\overline{t}\rho_1'(\tau)-\rho_1(\tau)}{\tau-t}d\tau+$$
$$+\int\limits_L A_{21}(\alpha(t),\tau)\rho_0(\tau)d\tau+\int\limits_L A_{22}(\alpha(t),\tau)\rho_1(\tau)d\tau=f_2(\alpha(t)).\quad(11d)$$

С учётом того, что интегральное ядро

$$\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}-\frac{1}{\tau-t}$$

имеет разве что слабую особенность, получим условие нетеровости для системы (11).

Система (11) является нетеровой, если

$$\Delta_{k1}=C_k(t)C_k(\alpha(t))-A_k(t)A_k(\alpha(t))\neq 0,\quad k=1,2,\quad(12)$$
$$\Delta_{k1}=B_k(t)B_k(\alpha(t))-D_k(t)D_k(\alpha(t))\neq 0\quad(13)$$

при прямом сдвиге Карлемана. Если сдвиг обратный, то для нетеровости системы достаточно выполнения следующих условий:

$$\Delta_k=-C_k(t)D_k(\alpha(t))+B_k(t)A_k(\alpha(t))\neq 0;\quad(14)$$

здесь

$$A_k(t)=a_k(t)-b_k(t),\quad B_k(t)=c_k(t)-d_k(t),\quad C_k(t)=b_k(t)-a_k(t),\quad D_k(t)=d_k(t)-c_k(t).$$

Сформулируем основной результат.

Теорема 3. *Система* (4) *является нетеровой, если выполняются условия* (12) *при прямом сдвиге и условия* (14) *при обратном сдвиге.*

Индекс системы (4) определяется по формуле

$$K=\operatorname{Ind}\frac{\Delta_{11}}{\Delta_{12}}+\operatorname{Ind}\frac{\Delta_{21}}{\Delta_{22}}$$

при прямом сдвиге Карлемана и по формуле

$$K=\operatorname{Ind}\Delta_1+\operatorname{Ind}\Delta_2$$

при обратном сдвиге Карлемана.

4. Стохастический вариант сингулярной системы сингулярных уравнений со сдвигом Карлемана. Результаты исследования системы (4), полученные при исследовании на пространстве функций, удовлетворяющих условию Гельдера, можно поучить на пространстве функций L_2, сходящихся в среднем квадратическом. Такое расширение важно по двум основным причинам. С теоретической точки зрения удается провести исследование с использованием случайных процессов. Само решение может быть выражено в терминах броуновского движения (см. [8]). С практической точки зрения появляется возможность использовать теорию краевых задач и связанных с ними сингулярных интегральных уравнений при решении основных задач теории упругости в случае, когда нагрузки, форма контура и упругие свойства тела являются случайными функциями.

В стохастической постановке под значениями t и τ в системе (4) следует понимать значение диффузного процесса Z в момент первого выхода из области D, ограниченного контуром L. Сами условия (4) выполняются почти наверное. В такой постановке исследование стохастической системы (4) аналогично детерминированному случаю. Поэтому сформулируем только итоговый результат.

Теорема 4. *Система сингулярных интегральных уравнений со сдвигом Карлемана и неаналитической компонентой является нетеровой на классе функций, сходящихся в среднем квадратическом при выполнении условий* (12) *для прямого сдвига и* (14) *для обратного сдвига.*

5. Выводы. В работе исследована система сингулярных интегральных уравнений со сдвигом и комплексно сопряжёнными неаналитическими компонентами, соответствующая многоэлементной краевой задаче Карлемана для бианалитических функций. Получены условия нетеровости системы, подсчитан ее индекс, дана общая схема сведения системы сингулярных интегральных уравнений к системе уравнений Фредгольма второго рода. Основные результаты справедливы для функций, удовлетворяющих условию Гельдера, а также для функций, сходящихся в среднем квадратическом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Балк М. Б.* Полианалитические функции и их обобщения// Итоги науки техн. Совр. Пробл. мат. Фундам. напр. — 1991. — *85*. — С. 187–246.
2. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. — М.: Наука, 1977.
3. *Лехницкий Г. С.* Теория упругости анизотропного тела. — М.: Наука, 1977.
4. *Литвинчук Г. С.* в кн.: Краевые задачи и сингулярные уравнения со сдвигом. — М.: Наука, 1977. — С. 448.
5. *Максимова Л. А.* Обобщенные системы сингулярных интегральных уравнений Шермана со сдвигом в плоской теории упругости// Вестн. Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Сер. Мех. предел. состояния. — 2016. — *2*, № 28. — С. 15–23.
6. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, 1966.
7. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.
8. *Оксендаль Б.* в кн.: Стохастические дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 2003.
9. *Юденков А. В., Володченков А. М., Римская Л. П.* в кн.: Математическое моделирование на основе теории потенциала. — М., 2020. — С. 152.
10. *Rasulov K. M.* On the uniqueness of the solution of the Dirichlet boundary-value problem for quasiharmonic functions in a non-unit disk// Lobachevskii J. Math. — 2018. — *39*, № 1. — P. 142–145.
11. *Yudenkov A. V., Volodchenkov A. M., Rimskaya L. P.* Stability of systems of singular integral equations with Cauchy kernel// T-Comm. — 2020. — *14*, № 9. — P. 48–55.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Володченков Александр Михайлович
Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова, Смоленский филиал
E-mail: `alexmw2012@yandex.ru`

Юденков Алексей Витальевич
Смоленский государственный университет спорта
E-mail: `aleks-ydenkov@mail.ru`