ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 226 (2023). С. 69–79
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-226-69-79

УДК 517.929

ИНВАРИАНТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ И АТТРАКТОРЫ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ УРАВНЕНИЯ КУРАМОТО—СИВАШИНСКОГО С УЧЕТОМ ДИСПЕРСИИ

© 2023 г. **А. Н. КУЛИКОВ, Д. А. КУЛИКОВ**

Аннотация. Рассмотрена периодическая краевая задача для уравнения Курамото—Сивашинского с учетом дисперсии. Исследована устойчивость однородных состояний равновесия, предложен анализ локальных бифуркаций при смене устойчивости, основанный на методах теории динамических систем с бесконечномерным пространством начальных условий. Найдены достаточные условия наличия или отсутствия инвариантных многообразий. Для некоторых решений получены асимптотические формулы.

Ключевые слова: уравнение Курамото—Сивашинского, дисперсия, краевая задача, устойчивость, бифуркация, асимптотическая формула.

INVARIANT MANIFOLDS AND ATTRACTORS OF A PERIODIC BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR THE KURAMOTO–SIVASHINSKY EQUATION WITH ALLOWANCE FOR DISPERSION

© 2023 **A. N. KULIKOV, D. A. KULIKOV**

Abstract. A periodic boundary-value problem for the dispersive Kuramoto–Sivashinsky equation is considered. The stability of homogeneous equilibria is examined and an analysis of local bifurcations with a change in stability is performed. This analysis is based on the methods of the theory of dynamical systems with an infinite-dimensional space of initial conditions. Sufficient conditions for the presence or absence of invariant manifolds are found. Asymptotic formulas for some solutions are obtained.

Keywords and phrases: Kuramoto–Sivashinsky equation, dispersion, boundary-value problem, stability, bifurcation, asymptotic formula.

AMS Subject Classification: 37L10, 37L15, 37L25

1. Введение. В [6] было предложено рассмотреть периодическую краевую задачу для одной из версий уравнения Курамото—Сивашинского

$$u_t + uu_x + u_{xx} + \delta u_{xxx} + u_{xxxx} = 0, \tag{1}$$

$$u(t, x + 2l) = u(t, x), \tag{2}$$

где $l > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$, $u_x = \partial u/\partial x$, $u_t = \partial u/\partial t$. При $\delta = 0$ получаем один из вариантов традиционного уравнения Курамото—Сивашинского. В [6] рассматривался вариант, когда $\delta \neq 0$, и был сделан

Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2022-886).

вывод, что величина δ существенным образом влияет на динамику решений задачи (1), (2). Например, при $\delta > \delta_*$ ($\delta_* = 0.43$) образуются диссипативные структуры, но этого не происходит, если $\delta < \delta_*$.

В данной работе краевая задача (1), (2) будет проанализирована с других позиций на основе использования методов современной теории динамических систем с бесконечномерным пространством начальных условий (бесконечномерным фазовым пространством). Прежде чем приступить к непосредственному анализу задачи (1), (2), перепишем ее в иной форме, используя замены переменных

$$t_1 = \gamma_1 t, \quad x_1 = \gamma_2 x, \quad u_1 = \gamma_3 u.$$

Если выбрать положительные постоянные γ_1, γ_2, γ_3 соответствующим образом, а именно, $\gamma_1 = (\pi/l)^4$, $\gamma_2 = \pi/l$, $\gamma_3 = (l/\pi)^3$, то получим вариант задачи (1), (2) в следующей форме:

$$u_{1t_1} + u_1 u_{1x_1} + b u_{1x_1x_1} + a u_{1x_1x_1x_1} + u_{1x_1x_1x_1x_1} = 0,$$
$$u_1(t_1, x_1 + 2\pi) = u_1(t_1, x_1),$$

где $b = (l/\pi)^2$, $a = \delta(l/\pi)$, $u_1 = u_1(t_1, x_1)$. Для упрощения записи у переменных t_1, x_1, u_1 опустим индекс «1» и запишем полученную краевую задачу в следующем виде:

$$u_t + u_{xxxx} + b u_{xx} + a u_{xxx} + u u_x = 0, \tag{3}$$
$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \tag{4}$$

Подчеркнем, что краевую задачу (3), (4) можно дополнить начальным условием

$$u(0, x) = f(x). \tag{5}$$

Пусть $f(x) \in H^4$, где H^4 — функциональное пространство, состоящее из функций $f(x)$ со следующими свойствами:

(i) $f(x + 2\pi) = f(x)$;

(ii) при $x \in [-\pi, \pi]$ данная функция принадлежит пространству Соболева[1] $W_2^4[-\pi, \pi]$ (см., например, [11]). Напомним, что в силу теорем вложения $f(x) \in C^3[-\pi, \pi]$.

Из результатов работы [12] вытекает, что начально-краевая задача (3), (4), (5) локально корректно разрешима. Вопросы разрешимости этой начально-краевой задачи изучались также в работах Р. Темама с соавторами (более подробно см. [19]). Для краевой задачи (3), (4) при $a = 0$, а также иных модификаций уравнения Курамото—Сивашинского некоторые вопросы, которые будут изучены далее, рассматривались в [9, 10, 15–17].

2. Некоторые общие свойства краевой задачи (3), (4) и ее линеаризованного варианта. Очевидно, что краевая задача (3), (4) имеет однопараметрическое семейство пространственно однородных состояний равновесия, которые обозначим

$$S_c: \ u(t, x) = c, \ c = \mathrm{const} \in \mathbb{R}.$$

Пусть

$$M_0(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t, x) dx.$$

Если $u(t, x)$ — решение задачи (3), (4), то $M_0(u) = c$, т.е. $M_0(u)$ не зависит от t. Действительно, проинтегрируем уравнение (3) по x от $-\pi$ до π. Нетрудно, заметить, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_t dx = 0,$$

так как пространственные средние у остальных членов уравнения (3) равны нулю. Например,

$$\int_{-\pi}^{\pi} u u_x dx = \frac{u^2(t, x)}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}\big(u^2(t, \pi) - u^2(t, -\pi)\big) = 0.$$

[1]Напомним, что функция $f(x)$ принадлежит пространству Соболева $W_2^4[-\pi, \pi]$, если она сама и ее обобщенные производные $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{IV}(x)$ принадлежат пространству $L_2(-\pi, \pi)$.

Положим
$$lu(t,x) = c + w(t,x). \tag{6}$$
В результате замены (6) для вспомогательной функции $w(t,x)$ получим следующую краевую задачу:
$$w_t = Aw - ww_x, \tag{7}$$
$$w(t,x+2\pi) = w(t,x),\ M_0(w) = 0, \tag{8}$$
где через $A = A(a,b,c)$ обозначен линейный дифференциальный оператор, определенный следующим образом:
$$Aw = A(a,b,c)w = -w_{xxxx} - bw_{xx} - aw_{xxx} - cw_x.$$
Подчеркнем, что в качестве фазового пространства решений краевой задачи (3), (4) можно и целесообразно выбирать пространство H_0^4 (считаем, что $f(x) \in H_0^4$, если $f(x) \in H^4$ и $M_0(f) = 0$).

Краевая задача (7), (8) имеет нулевое состояние равновесия S_0. Для анализа его устойчивости в первом приближении заменим краевую задачу (7), (8) на линеаризованный ее вариант
$$w_t = Aw, \tag{9}$$
$$w(t,x+2\pi) = w(t,x). \tag{10}$$
Как известно, основную роль при анализе устойчивости играет расположение собственных чисел λ линейного дифференциального оператора A.

Лемма 1. *Линейный дифференциальный оператор, определенный равенством*
$$Av = -v^{IV} - bv'' - av''' - cv',$$
область определения которого состоит из достаточно гладких 2π-периодических функций $v(x)$ с нулевым средним ($M_0(w) = 0$), имеет счетный набор собственных значений
$$\lambda_n = \tau_n + i\sigma_n, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$
отвечающих собственным функциям $\exp(inx)$. Здесь $\tau_n = -n^4 + bn^2$, $\sigma_n = an^3 - cn$.

Проверка последнего утверждения стандартна. Отметим, также, что в ситуации общего положения $\sigma_n \neq 0$. Вариант, когда все $\sigma_n = 0$, реализуется при $a = c = 0$. Наконец, совокупность собственных функций $\{\exp(inx)\}$ образует полную ортогональную систему в $L_2(-\pi,\pi)$. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Решения линейной краевой задачи* (9), (10) *асимптотически устойчивы, если $b < 1$, и неустойчивы, если $b > 1$. При $b = 1$ решения устойчивы.*

Подчеркнем, что при $b < 1$ справедливы неравенства $\operatorname{Re}\lambda_n = \tau_n < 0$ при всех рассматриваемых в рамках леммы 2 значениях n ($n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$), а при $b > 1$ существует такой индекс m, что $\tau_m > 0$. Из этих замечаний и леммы 2 вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 3. *При $b < 1$ нулевое решение краевой задачи* (7), (8) *асимптотически устойчиво, а при $b > 1$ это состояние равновесия неустойчиво.*

Последняя лемма — это аналог известной теоремы об устойчивости состояний равновесия по первому (линейному) приближению. Если же $b = 1$, то реализуется критический случай пары простых чисто мнимых собственных значений $\pm i\sigma_1$, $\sigma_1 = a - c$, если, конечно, $a - c \neq 0$. При $a = c = 0$ получаем критический случай двукратного нулевого собственного значения. Иными словами, при $b = 1$ лемма 2 не дает основания сделать вывод об устойчивости решения $w = 0$ задачи (7), (8). Тем не менее ниже будет показано, что при $b = 1$ нулевое решение задачи (7), (8) асимптотически устойчиво.

Вернемся к нелинейной краевой задаче (7), (8) в случае, если $b < 1$. Домножив уравнение (7) на w и проинтегрировав полученное равенство от $-\pi$ до π, получим равенство
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\pi}^{\pi} w^2 dx = -\int_{-\pi}^{\pi} w_{xx}^2 dx + b\int_{-\pi}^{\pi} w_x^2 dx,$$

а также серию неравенств

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\pi}^{\pi} w^2dx \leqslant b\int_{-\pi}^{\pi} w_x^2dx - \int_{-\pi}^{\pi} w_{xx}^2dx \leqslant (b-1)\int_{-\pi}^{\pi} w_x^2dx,$$

так как для функций с нулевым средним справедливы неравенства

$$\int_{-\pi}^{\pi} w_{xx}^2dx \geqslant \int_{-\pi}^{\pi} w_x^2dx \geqslant \int_{-\pi}^{\pi} w^2dx.$$

Из данной серии неравенств вытекает, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} w^2(t,x)dx \leqslant \exp(2(b-1)t)\int_{-\pi}^{\pi} w^2(0,x)dx.$$

Из последнего неравенства следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} w(t,x)=0$.

Итак, справедливо следующее утверждение.

Лемма 4. *При $b<1$ все решения краевой задачи* (7), (8) *стремятся к решению $w=0$ в норме пространства $L_2(-\pi,\pi)$, если $t\to\infty$, т.е. в этой норме нулевое решение является глобальным аттрактором задачи* (7), (8).

Сформулируем теперь основной результат для исходной краевой задачи.

Теорема 1. *Все решения $u(t,x)=c$ краевой задачи* (3), (4) *устойчивы при $b\leqslant 1$ и неустойчивы при $b>1$. При $b<1$ все решения начально-краевой задачи* (3), (4), (5) *с течением времени приближаются к одному из состояний равновесия $u(t,x)=c$.*

Подчеркнем, что при $b=1$ многообразие $u(t,x)=c$ является локальным аттрактором.

Обозначим через H_c^4 аффинное подпространство фазового пространства краевой задачи (3), (4): $f(x)\in H_c^4$, если $f(x)\in H^4$ и $M_0(f)=c$. Очевидно, что H_c^4 инвариантно для решений краевой задачи (3), (4), т.е. из включения $f(x)\in H_c^4$ вытекает справедливость при $t>0$ аналогичного включения $u(t,x)\in H_c^4$. Естественно, состояние равновесия $u(t,x)=c$ принадлежит H_c^4 и все решения этой краевой задачи из H_c^4 приближаются при $b<1$ к состоянию равновесия $u(t,x)=c$, если $t\to\infty$. Подчеркнем, что все полученные утверждения в этом разделе не зависят от выбора a. В частности, отметим еще раз, что при $b<1$ и любом a все решения краевой задачи (3), (4) приближаются к одному из однородных состояний равновесия в норме $L_2(-\pi,\pi)$.

3. Бифуркационная задача. Сведение к анализу нормальной формы. Пусть $b=1+\nu\varepsilon$, где $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, $0<\varepsilon_0\ll 1$, а параметр $\nu=\pm1$ или 0. Подходящее его значение будет выбрано в процессе анализа краевой задачи

$$w_t = A_0w + \nu\varepsilon A_1w - ww_x, \tag{11}$$

$$w(t,x+2\pi)=w(t,x), \quad M_0(w)=0, \tag{12}$$

где использованы следующие обозначения:

$$A_0w = -w_{xxxx} - w_{xx} - aw_{xxx} - cw_x, \quad A_1w = -w_{xx}.$$

Линейный дифференциальный оператор $A(\varepsilon)=A_0+\nu\varepsilon A_1$ имеет пару собственных значений $\lambda_{1,2}(\varepsilon)=\tau(\varepsilon)\pm i\sigma(\varepsilon)$, где $\tau(\varepsilon)=\nu\varepsilon$, $\sigma(\varepsilon)=\sigma_1=a-c$, если, конечно, $a-c\neq 0$. Особый случай $a-c=0$ ($\sigma_1=0$) приводит к тому, что линейный дифференциальный оператор $A(\varepsilon)$ имеет двукратное собственное значение $\tau(\varepsilon)$, которому отвечают две собственные функции $\exp(\pm ix)$. Наконец, $\tau(0)=0$, $\tau'(0)=\nu$ (т.е. $\tau'(0)\neq 0$, если $\nu\neq 0$). Подчеркнем, что остальные собственные значения линейного дифференциального оператора $A(\varepsilon)$ лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости, выделяемой неравенством $\operatorname{Re}\lambda_n(\varepsilon)\leqslant -\gamma_0<0$, где $n=\pm2,\pm3,\ldots$. В рассматриваемом случае $\operatorname{Re}\lambda_n(\varepsilon)\leqslant -12+4\varepsilon\leqslant -8$, если $\varepsilon\ll 1$, т.е. в качестве γ_0 можно выбрать, например, число 8.

Из результатов, изложенных, например, в монографии [18], а также утверждений из работ [7, 8] вытекает, что краевая задача (11), (12) имеет локально инвариантное многообразие $M_2(\varepsilon)$ размерности 2, обладающее следующим свойствим.

Обозначим через $H^4_{0,2}$ двумерное подпространство фазового пространства H^4_0, содержащее элементы $w(x) = y\exp(ix) + \overline{y}\exp(-ix)$, где в данный момент y — произвольная комплексная постоянная. Подчеркнем, что $M_0(w) = 0$. Обозначим через H^4_* ортогональное дополнение к двумерному подпространству $H^4_{0,2}$:

$$H^4_* = \left\{ Q(x) : \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} Q(x)\exp(\pm ix)dx = 0,\ M_0(Q) = 0 \right\}.$$

В этом случае $(w, Q) \in M_2(\varepsilon)$, если $Q = G(w, \varepsilon)$. При этом нелинейный дифференциальный оператор $G(w, \varepsilon)$ обладает следующими свойствами:

1) он достаточно гладко зависит от w, если w принадлежит некоторой малой окрестности $V(r)$ нулевого решения;
2) $G(0, \varepsilon) = 0$, $\dfrac{\partial G}{\partial y}\Big|_{y=0,\ \overline{y}=0} = \dfrac{\partial G}{\partial \overline{y}}\Big|_{y=0,\ \overline{y}=0} = 0$;
3) все решения с начальными условиями из $V(r)$, где $r \ll 1$, приближаются к $M_2(\varepsilon)$ или покидают такую окрестность ($f(x) \in V(r)$, если $f(x) \in H^4_0$ и $\|f\|_{H^4} < r$).

Наконец, решения, принадлежащие $M_2(\varepsilon)$, могут быть восстановлены после анализа дифференциального уравнения для комплекснозначной функции

$$y' = \varphi(y, \overline{y}, \varepsilon), \tag{13}$$

где $y = y(s)$, $\varphi(y, \overline{y}, \varepsilon)$ — достаточно гладкая функция переменных y, $\overline{y}$, ε, если отмеченные переменные и параметр ε достаточно малы. Добавим, что уравнение (13) принято называть нормальной формой (см. [1, 13]). При этом основную роль играет «укороченный» вариант нормальной формы:

$$y' = \psi(y, \overline{y}) = \varphi(y, \overline{y}, 0). \tag{14}$$

Здесь и далее $s = \varepsilon t$ — медленное время.

Замечание 1. Инвариантное многообразие $M_2(\varepsilon)$ принято в последнее время называть «центральным». Далее в работе будем использовать этот термин. Отметим, что такое употребление термина — это упрощенный (краткий) вариант терминологии из [14]. Если строго следовать работе [14], то при $\nu = 1$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ многообразие $M_2(\varepsilon)$ следует называть неустойчиво центральным, при $\nu = 0$ — центральным, а при $\nu = -1$ — устойчиво центральным. Поскольку такой вариант слишком громоздок, большинство авторов используют укороченную терминологию.

Следуя методике работ [9, 10, 15–17], будем искать решения краевой задачи (11), (12) в виде

$$w(t, x, y, \overline{y}, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} w_1(t, x, y, \overline{y}) + \varepsilon w_2(t, x, y, \overline{y}) + \varepsilon^{3/2} w_3(t, x, y, \overline{y}) + o(\varepsilon^{3/2}), \tag{15}$$

где $y = y(s)$ — решение нормальной формы (14), а

$$w_1(t, x, y, \overline{y}) = yq + \overline{yq}, \quad q = q(t, x) = \exp(i\sigma_1 t + ix),$$

т.е. по переменной t она имеет период $2\pi/\sigma_1$. Функции $w_2(t, x, y, \overline{y})$, $w_3(t, x, y, \overline{y})$ принадлежат классу W_δ функций $\Psi(t, x, y, \overline{y})$, обладающих следующими свойствами:

(a) функция $\Psi(t, x, y, \overline{y})$ достаточно гладко зависит от своих аргументов при всех $t > 0$, всех x и малых y, $\overline{y}$;
(b) функция $\Psi(t, x, y, \overline{y})$ по совокупности переменных $y, \overline{y}$ имеет порядок малости в нуле выше первого;
(c) функция $\Psi(t, x, y, \overline{y})$ имеет период $2\pi/\sigma_1$ по t и период 2π по x;
(d) $M_0(\Psi) = M_\pm(\Psi) = 0$, где среднее $M_0(\Psi)$ было определено ранее и

$$M_\pm(\Psi) = \frac{\sigma_1}{(2\pi)^2}\int\limits_{\pi/\sigma_1}^{\pi/\sigma_1}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Psi q_\pm\, dx\, dt,$$

где $q_- = \overline{q}_+$, $q_+ = q(t,x)$ — функция, определенная ранее.

Члены в правой части равенства (15), обозначенные $o(\varepsilon^{3/2})$, обладают свойствами, которые характерны для w_2, w_3, и гладко зависят от μ ($\mu = \varepsilon^{1/2}$). Равенство (15) — это уравнение, определяющее $M_2(\varepsilon)$ в параметрической форме.

Подставим сумму (15) в краевую задачу (11), (12) и выделим слагаемые при одинаковых степенях $\varepsilon^{1/2}$. В нашем случае при $\varepsilon^{1/2}$ получаем линейную однородную краевую задачу

$$w_{1t} = A_0 w_1, \quad w_1(t, x + 2\pi, y, \overline{y}) = w_1(t, x, y, \overline{y}),$$

решение которой было выбрано ранее. При ε, $\varepsilon^{3/2}$ формируются уже содержательные линейные неоднородные краевые задачи для нахождения функций w_2, w_3:

$$w_{2t} - A_0 w_2 = \Phi_2(t, x, y, \overline{y}), \tag{16}$$

$$w_2(t, x + 2\pi) = w_2(t, x), \quad M_0(w_2) = M_\pm(w_2) = 0, \tag{17}$$

$$w_{3t} - A_0 w_3 = \Phi_3(t, x, y, \overline{y}), \tag{18}$$

$$w_3(t, x + 2\pi) = w_3(t, x), \quad M_0(w_3) = M_\pm(w_3) = 0, \tag{19}$$

где

$$\Phi_2(t, x, y, \overline{y}) = -w_1 w_{1x}, \quad \Phi_3(t, x, y, \overline{y}) = -(w_1 w_{2x} + w_2 w_{1x}) - \nu w_{1xx} - (y' q + \overline{y}' \overline{q}).$$

Наконец, при формировании краевой задачи (16), (17); (18), (19) следует учитывать, что

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \varepsilon y'(s) = \varepsilon \psi(y, \overline{y}).$$

Замечание 2. Напомним достаточно хорошо известный факт, который принято называть условием разрешимости неоднородной краевой задачи. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$v_t - A_0 v = f(t, x), \quad v(t, x + 2\pi) = v(t, x), \quad M_0(v) = M_\pm(v) = 0,$$

где функция $f(t, x)$ непрерывна по совокупности переменных, имеет период $2\pi/\sigma_1$ по t и период 2π по x. Указанная неоднородная краевая задача имеет решение, принадлежащее W_σ, тогда и только тогда, если $M_0(f) = M_\pm(f) = 0$.

Краевая задача (16), (17) разрешима в классе функций W_σ, причем соответствующее решение имеет вид

$$w_2(t, x) = \eta y^2 q^2 + \overline{\eta} \overline{y}^2 \overline{q}^2, \quad \eta = \eta_1 + i\eta_2, \quad \eta_1 = \frac{a}{6(4 + a^2)}, \quad \eta_2 = -\frac{1}{3(4 + a^2)}.$$

Краевая задача (18), (19) уже не является автоматически разрешимой, как задача (16), (17): для ее разрешимости необходимо и достаточно выполнения условия

$$\psi(y, \overline{y}) = \nu y + (l_1 + il_2) y |y|^2, \quad l_1 = -\frac{1}{3(4 + a^2)}, \quad l_2 = -\frac{a}{6(4 + a^2)}.$$

Нормальную форму (14) следует считать записанной в виде

$$y' = \nu y + (l_1 + il_2) y |y|^2. \tag{20}$$

При таком выборе $\psi(y, \overline{y})$ задача (18), (19) имеет решение

$$w_3(t, x, y, \overline{y}) = \beta y^3 q^3 + \overline{\beta} \overline{y}^3 \overline{q}^3,$$

где

$$\beta = \beta_1 + i\beta_2, \quad \beta_1 = \frac{a^2 - 6}{48(9 + a^2)(4 + a^2)}, \quad \beta_2 = -\frac{5a}{48(9 + a^2)(4 + a^2)}.$$

4. Анализ нормальной формы. Рассмотрим нормальную форму (20) и положим

$$y(s) = \rho(s)\exp(i\omega(s)), \quad \rho(s) > 0. \tag{21}$$

В результате замены (21) вместо уравнения (20) получим два уравнения

$$\rho' = \nu\rho + l_1\rho^3, \tag{22}$$

$$\omega' = l_2\rho^2. \tag{23}$$

Если $\nu/l_1 < 0$, уравнение (22) имеет положительное состояние равновесия E: $\rho_0 = \sqrt{-\nu/l_1}$. При этом $l_1 < 0$, т.е. $\nu > 0$ $(\nu = 1)$. Состоянию равновесия E соответствует решение дифференциального уравнения (23) $\omega(s) = \omega_0 s + h$, где $\omega_0 = -(l_2/l_1)$, $h \in \mathbb{R}$ — произвольное число. В результате получим, что состоянию равновесия E уравнения (22) соответствует однопараметрическое семейство периодических решений нормальной формы (20):

$$y(s) = \rho_0\exp(i\omega(s)) = \rho_0\exp(i\omega_0 s + ih). \tag{24}$$

Это однопараметрическое семейство периодических по t решений образует цикл C_0 нормальной формы (20). Цикл C_0 устойчив (орбитально асимптотически устойчив), так как состояние равновесия E асимптотически устойчиво в силу теоремы А. М. Ляпунова об устойчивости по первому (линейному) приближению, потому что в нашем случае $(\rho + l_1\rho^3)'\big|_{\rho=\rho_0} < 0$.

В иной терминологии цикл C_0 нормальной формы (20) является локальным аттрактором. Отметим, что при $a = 0$ получаем $l_2 = 0$ и, следовательно, $\omega_0 = 0$. В таком случае вместо периодических решений (24) нормальная форма (20) имеет однопараметрическое семейство состояний равновесия, которые образуют локальный аттрактор C_0.

Пусть теперь $\nu \leqslant 0$ $(\nu = 0$ или $\nu = -1)$. Нетрудно заметить, что все решения дифференциального уравнения (22) с течением времени приближаются к состоянию равновесия $\rho = 0$, которое соответствует нулевому состоянию равновесия нормальной формы (20). Итак, справедливо следующее утверждение.

Лемма 5. *При $\nu = 1$ нормальная форма* (20) *имеет притягивающий цикл C_0, а нулевое решение при этом неустойчиво. Если $\nu = 0$ или $\nu = -1$, то нормальная форма* (20) *не имеет предельных циклов, и все его решения приближаются к нулевому состоянию равновесия, которое, следовательно, асимптотически устойчиво.*

Напомним, что случай $\nu = 0$ соответствует выбору $b = 1$.

5. Основной результат. Используя утверждения, приведенные в [3–5], и методику работ [9, 10,15–17], примененную в предшествующих разделах, можно сформулировать основной результат для краевой задачи (11), (12).

Теорема 2. *Существует такая положительная постоянная $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и $b = 1 + \varepsilon$ краевая задача* (11), (12) *имеет притягивающий цикл $C(\varepsilon)$. Для образующих его решений имеет место асимптотическая формула*

$$\begin{aligned} w(t,x,\varepsilon,h) = \varepsilon^{1/2}\rho_0\Big(&\exp(i\Theta(t,x) + ih) + \exp(-i\Theta(t,x) - ih)\Big) + \\ &+ \varepsilon\rho_0^2\Big(\eta\exp(2i\Theta(t,x) + 2ih) + \overline{\eta}\exp(-2i\Theta(t,x) - 2ih)\Big) + \\ &+ \varepsilon^{3/2}\rho_0^3\Big(\beta\exp(3i\Theta(t,x) + 3ih) + \overline{\beta}\exp(-3i\Theta(t,x) - 3ih)\Big) + o(\varepsilon^{3/2}), \end{aligned} \tag{25}$$

где h — произвольная действительная постоянная,

$$\rho_0 = \sqrt{-\frac{1}{l_1}} = \sqrt{3(4 + a^2)}, \quad \eta = \eta_1 + i\eta_2, \quad \beta = \beta_1 + i\beta_2,$$

$$\eta_1 = \frac{a}{6(4 + a^2)}, \quad \eta_2 = -\frac{1}{3(4 + a^2)}, \quad \beta_1 = \frac{a^2 - 6}{48(9 + a^2)(4 + a^2)}, \quad \beta_2 = -\frac{5a}{48(9 + a^2)(4 + a^2)},$$

$$\Theta = (\sigma_1 + \omega_1(\varepsilon))t + x, \quad \sigma_1 = a - c, \quad \omega_1(\varepsilon) = -\frac{a}{2}\varepsilon + o(\varepsilon).$$

Подчеркнем, что при любом выбранном ε формула (25) определяет однопараметрическое семейство решений, так как постоянная h произвольна.

Замечание 3. Если $a = c = 0$, то, конечно, $\sigma_1 = 0$; более того, можно показать, что $\omega_1(\varepsilon) = 0$. В этом случае краевая задача (11), (12) имеет одномерное инвариантное многообразие, заполненное состояниями равновесия; оно является локальным аттрактором для решений задачи (11), (12). Для состояний равновесия, образующих этот аттрактор, имеет место асимптотическая формула

$$w(x,\varepsilon,h) = \varepsilon^{1/2}\rho_0\Big(\exp(ix+ih) + \exp(-ix-ih)\Big) + \\ + \varepsilon\rho_0^2\Big(\eta_1\exp(2ix+2ih) + \eta_1\exp(-2ix-2ih)\Big) + \\ + \varepsilon^{3/2}\rho_0^3\Big(\beta_1\exp(3ix+3ih) + \beta_1\exp(-3ix-3ih)\Big) + o(\varepsilon^{3/2}).$$

Подчеркнем, что в этом случае $\eta_2 = \beta_2 = 0$.

Отметим еще один особый случай, возникающий при изучении бифуркационной задачи. Пусть $a - c = 0$, но $a \neq 0$; в таком случае $\sigma_1 = 0$. Поэтому функция $\Theta(t,x)$ из асимптотической формулы (25) имеет вид

$$\Theta(t,x) = \omega_1(\varepsilon)t + x,$$

где $\omega_1(\varepsilon) = (-a/2)\varepsilon + o(\varepsilon)$. Ясно, что теперь решения представленные формулой (25), будут периодическими функциями с частотой $\omega_1(\varepsilon)$ и периодом $T(\varepsilon) = 2\pi/\omega_1(\varepsilon)$. Добавим, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\omega_1(\varepsilon) = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} T(\varepsilon) = \infty.$$

Итак, в последнем случае получаем периодические по переменной t решения, но с периодом, который стремится к бесконечности, если уменьшается ε. В данном случае получаем так называемые «длиннопериодические» по эволюционной переменной t решения краевой задачи (11), (12).

При помощи замены (6) результаты, полученные для задачи (11), (12), можно перенести на основную краевую задачу (3), (4).

Следствие 1. *Пусть $b = 1 + \varepsilon$. Тогда краевая задача* (3), (4) *имеет двупараметрическое семейство решений*

$$u(t,x,\varepsilon,h,c) = c + w(t,x,\varepsilon,h), \tag{26}$$

где функция $w(t,x,\varepsilon,h,c)$ определена равенством (25).

Решения (26) в фазовом пространстве решений задачи (3), (4) образуют двумерное инвариантное многообразие $V_2(\varepsilon)$ ($\dim V_2(\varepsilon) = 2$), которое для решений задачи (3), (4) является аттрактором. Все решения, принадлежащие $V_2(\varepsilon)$, являются периодическими функциями переменной t, но имеют, как правило, разные периоды

$$T(\varepsilon,c,a) \approx \frac{2\pi}{\sigma_1} + O(\varepsilon), \quad \sigma_1 = a - c,$$

где c — произвольная постоянная. В силу последнего обстоятельства все эти решения орбитально асимптотически устойчивы, но не могут быть устойчивыми в силу основного определения устойчивости А. М. Ляпунова (см. [2]). Более детальное доказательство последнего замечания можно найти в [10,17]. Подчеркнем, что (устойчивость) неустойчивость согласно основному определению устойчивости (неустойчивости) является следствием зависимости частоты найденных периодических решений от c.

6. О некоторых возможных обобщениях.

Рассмотрим еще раз краевую задачу (7), (8) и линейный дифференциальный оператор $A = A(a,b,c)$. Как уже отмечалось в разделе 1, он имеет счетный набор собственных значений

$$\lambda_n(a,b,c) = \tau_n + i\sigma_n, \quad \tau_n = -n^4 + bn^2, \quad \sigma_n = an^3 - cn, \quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

т.е. τ_n зависит только от параметра b. Напротив, мнимая часть собственных значений зависит только от a и c.

Пусть $b = b_m = m^2$ ($m = \pm 2, \pm 3, \ldots$). Элементарно проверяется, что при таком выборе b спектр линейного дифференциального оператора A разделяется на три части:

(i) Собственные числа с номерами $n^2 > m^2$ $(n = \pm(m+1), \pm(m+2), \dots)$ лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости $(\operatorname{Re}\lambda_n \leqslant -\gamma_1 < 0)$.

(ii) При $n = m$, $n = -m$ получаем пару чисто мнимых собственных значений $\lambda_{\pm m} = \pm i(am^3 - cm)$ (или двукратное нулевое собственное значение, если выполнено равенство $am^3 - cm = 0$).

(iii) При $n = \pm 1, \dots, \pm(m-1)$ имеется набор из $2(m-1)$ собственных чисел, для которых справедливы неравенства $\operatorname{Re}\lambda_n \geqslant \gamma_2 > 0$.

Пусть $b = b_m(1+\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$; в этом случае краевую задачу (7), (8) можно записать в виде

$$w_t = A_0(m)w + \varepsilon A_1(m)w - ww_x, \tag{27}$$

$$w(t, x+2\pi) = w(t,x),\ M_0(w) = 0, \tag{28}$$

где

$$A_0(m)w = -w_{xxxx} - m^2 w_{xx} - aw_{xxx} - cw_x, \quad A_1(m)w = -m^2 w_{xx}.$$

В такой ситуации краевая задача (27), (28) имеет гладкое седловое инвариантное двумерное многообразие $M_2(\varepsilon, n)$. Подчеркнем, что в рассматриваемом в этом разделе варианте постановки задачи спектр линейного дифференциального оператора $A = A(a,b,c)$ при $b = b_m(1+\varepsilon)$ (т.е. $A = A_0(m) + \varepsilon A_1(m)$) разделяется на три части: часть собственных чисел этого оператора лежит в левой полуплоскости, а пара комплексно сопряженных значений находится вблизи мнимой оси. Следуя терминологии работы [14], назовём $M_2(\varepsilon, n)$ центральным инвариантным многообразием.

Решения на этом двумерном инвариантном многообразии можно искать в форме, аналогичной (15), когда m^2 было равно 1. Естественно, в данном случае соответствующая сумма будет выбрана с некоторыми, но небольшими, изменениями:

$$w(t,x,z,\overline{z},m,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2} w_1(t,x,z,\overline{z},m) + \varepsilon w_2(t,x,z,\overline{z},m) + \varepsilon^{3/2} w_3(t,x,z,\overline{z},m) + o(\varepsilon^{3/2}), \tag{29}$$

где

$$w_1(t,x,z,\overline{z},m) = z(s)q_m(t,x) + \overline{z}(s)\overline{q}_m(t,x), \quad q_m(t,x) = \exp(i\sigma_m t + imx), \sigma_m = am^3 - cm.$$

Для достаточно гладких функций w_2, w_3 выполнены равенства

$$M_0(w_j) = 0, M_\pm(w_3) = \frac{\sigma_m}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\pi/\sigma_m}^{\pi/\sigma_m} \int\limits_{-\pi}^{\pi} w_j q_\pm(m)dx = 0, \quad j = 2, 3, \dots. \tag{30}$$

Наконец, $q_+(m) = q_m(t,x)$, $q_-(m) = \overline{q}_m(t,x)$.

Подставляя сумму (29) в краевую задачу (27), (28), как и в разделе 3, получаем линейные неоднородные краевые задачи для определения w_2, w_3. При этом функции $z = z(s)$, $s = \varepsilon t$ удовлетворяют уравнению

$$z' = \psi(z, \overline{z}, m) \tag{31}$$

— «укороченному варианту» нормальной формы. Последовательно повторяя построения раздела 3, которые были проделаны в частном случае $b = 1$, $m^2 = 1$, получаем, что в случае произвольного m справедливы следующие равенства:

$$w_2(t,x,z,\overline{z},m) = \eta_m z^2 q_m^2 + \overline{\eta}_m \overline{z}^2 \overline{q}_m^2, \quad \eta_m = \eta_{1m} + i\eta_{2m},$$

$$\eta_{1m} = \frac{a}{6m^2(4m^2+a^2)}, \quad \eta_{2m} = -\frac{1}{3m(4m^2+a^2)},$$

$$w_3(t,x,z,\overline{z},m) = \beta_m z^3 q_m^3 + \overline{\beta}_m \overline{z}^3 \overline{q}_m^3, \quad \beta_m = \beta_{1m} + i\beta_{2m},$$

$$\beta_{1m} = \frac{a^2 - 6m^2}{48m^4(9m^2+a^2)(4m^2+a^2)}, \quad \beta_{2m} = -\frac{5a}{48m^3(9m^2+a^2)(4m^2+a^2)},$$

$$\psi(z,\overline{z},m) = m^2 z + (l_1(m) + il_2(m))z|z|^2, \quad l_1(m) = -\frac{1}{3(4m^2+a^2)}, \quad l_2(m) = -\frac{a}{6m(4m^2+a^2)}.$$

Итак, в рассматриваемых вариантах, когда $m = \pm 2, \pm 3, \dots$, нормальная форма приобретает вид

$$z' = m^2 z + (l_1(m) + il_2(m))z|z|^2. \tag{32}$$

Это уравнение имеет притягивающий цикл

$$z(s) = \rho_0(m)\exp(i\omega_0(m)s + ih), \tag{33}$$

где $\rho_0(m) = \sqrt{3m^2(4m^2 + a^2)}$, $\omega_0(m) = -am/2$, $h \in \mathbb{R}$.

Для краевой задачи (27), (28) можно сформулировать аналогичное теореме 2 утверждение.

Теорема 3. *Существует такая положительная постоянная $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(m)$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и $b = b_m(1+\varepsilon)$ краевая задача (27), (28) имеет однопараметрическое семейство периодических решений (цикл $C_m(\varepsilon)$ в ситуации общего положения, если $\sigma_m = am^3 - cm \neq 0$). Для таких решений справедлива асимптотическая формула*

$$\begin{aligned} w(t,x,\varepsilon,m,h) &= \varepsilon^{1/2}\rho_0(m)\Big(\exp(i\Theta_m(t,x) + ih) + \exp(-i\Theta_m(t,x) - ih)\Big) + \\ &+ \varepsilon\rho_0^2(m)\Big(\eta_m \exp(2i\Theta_m(t,x) + 2ih) + \overline{\eta}_m \exp(-2i\Theta_m(t,x) - 2ih)\Big) + \\ &+ \varepsilon^{3/2}\rho_0^3(m)\Big(\beta_m \exp(3i\Theta_m(t,x) + 3ih) + \overline{\beta}_m \exp(-3i\Theta_m(t,x) - 3ih)\Big) + o(\varepsilon^{3/2}), \end{aligned} \tag{34}$$

где постоянные $\rho_0(m)$, η_m, β_m были указаны ранее, число $h \in \mathbb{R}$ произвольно и

$$\Theta_m(t,x) = (\sigma_m - \varepsilon\frac{a}{2}m + o(\varepsilon))t + mx.$$

В отличие от цикла $C(\varepsilon)$ для краевой задачи (11), (12), полученный в этом разделе цикл $C_m(\varepsilon)$ краевой задачи (27), (28) неустойчив при любом выборе коэффициентов. Последнее утверждение теоремы 3 — следствие того факта, что двумерное инвариантное многообразие $M_2(\varepsilon, m)$ является седловым.

Наконец, краевая задача (3), (4) при условии $b = b_m(1+\varepsilon)$ имеет уже двумерное инвариантное многообразие $V_2(\varepsilon, m)$, которое образовано решениями

$$u(t,x,\varepsilon,c,m,h) = c + w(t,x,\varepsilon,m,h).$$

В данном случае, безусловно, все решения, принадлежащие $V_2(\varepsilon, m)$ являются седловыми (неустойчивы). Подчеркнем, что при выводе формулы (34) при произвольном m были использованы равенства (30), (31), (32), (33); в целом он аналогичен выводу формулы (25) в случае $m = 1$.

7. Заключение. В работе дан ответ на ряд вопросов, которые возникают при анализе поведения решений рассмотренной эволюционной краевой задачи. В частности, изучен вопрос о возможности бифуркаций пространственно неоднородных решений при соответствующем выборе параметров краевой задачи. Подчеркнем, что основным управляющим параметром служит коэффициент b, который играет некоторую роль при описании бифурцирующих решений, но эта роль второстепенная. Ответ на вопрос о существовании и устойчивости таких решений зависит только от выбора параметра b. Так, например, при $b = 1 + \varepsilon$ у соответствующей краевой задачи существуют устойчивые периодические по t решения (или одномерное инвариантное многообразие, образованное пространственно неоднородными решениями). При $b = b_m(1+\varepsilon)$ ($b_m = m^2$), если $m = \pm 2, \pm 3, \ldots$, краевая задача (27), (28) имеет циклы, но они неустойчивы, а период их близок к $2\pi/\sigma_m, \sigma_m = am^3 - cm$, если $\sigma_m \neq 0$.

От a и c (выбора однородного состояния равновесия у краевой задачи (3), (4)) зависят такие характеристики, как амплитуда волновых решений и частота колебаний. Отметим, что при $a = 0$, $c = 0$ вместо периодических решений получаем не периодические по t решения, а неоднородные по пространству состояния равновесия, а при $a = c$, $a \neq 0$ получаем циклы, но с большим периодом (малой частотой), т.е. медленно осциллирующие решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.
2. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
3. *Колесов А. Ю., Куликов А. Н.* Инвариантные торы нелинейных эволюционных уравнений. — Ярославль: Ярослав. гос. ун-т им. П. Г. Демидова, 2003.

4. *Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х.* Инвариантные торы одного класса точечных отображений: принцип кольца// Диффер. уравн. — 2003. — *39*, № 5. — С. 584–601.
5. *Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х.* Инвариантные торы одного класса точечных отображений: сохранение инвариантного тора при возмущениях// Диффер. уравн. — 2003. — *39*, № 6. — С. 738—753.
6. *Кудряшов Н. А., Рябов П. Н., Петров Б. А.* Особенности формирования диссипативных структур, описываемых уравнением Курамото—Сивашинского// Модел. анал. информ. сист. — 2015. — *22*, № 1. — С. 105–113.
7. *Куликов А. Н.* О гладких инвариантных многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаховом пространстве// в кн.: Исследования по устойчивости и теории колебаний. — Ярославль, 1976. — С. 114–129.
8. *Куликов А. Н.* Инерциальные инвариантные многообразия нелинейной полугруппы операторов в гильбертовом пространстве// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — *186*. — С. 57–66.
9. *Куликов А. Н., Куликов Д. А.* Формирование волнообразных наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2012. — *52*, № 5. — С. 930–945.
10. *Куликов А. Н., Куликов Д. А.* Локальные бифуркации в уравнениях Кана—Хилларда, Курамото—Сивашинского и их обобщениях// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2019. — *59*, № 4. — С. 670–683.
11. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.
12. *Соболевский П. Е.* Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве// Тр. Моск. мат. о-ва. — 1967. — *10*. — С. 297–370.
13. *Guckenheimer J., Holmes P. J.* Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. — New York: Springer, 1983.
14. *Kelley A.* The stable, center-stable, center, center-unstable, unstable manifolds// J. Differ. Equations. — 1967. — *3*, № 4. — P. 546–570.
15. *Kulikov A. N., Kulikov D. A.* Bifurcations in Kuramoto—Sivashinsky equation// Pliska Stud. Math. — 2015. — *25*. — P. 101–110.
16. *Kulikov A. N., Kulikov D. A.* Bifuration in a boundary-value problem of nanoelectronics// J. Math. Sci. — 2015. — *208*, № 2. — P. 211–221.
17. *Kulikov A. N., Kulikov D. A.* The Kuramoto–Sivashinsky equation. A local attractor filled with unstable periodic solutions// Automat. Control Comput. Sci. — 2018. — *52*, № 7. — P. 708–713.
18. *Marsden J. E., McCraken M.* The Hopf Bifurcations and Its Applications. — New York: Springer, 1976.
19. *Temam R.* Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. — New York: Springer, 1997.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2022-886).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Куликов Анатолий Николаевич
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: `anat_kulikov@mail.ru`

Куликов Дмитрий Анатольевич
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: `kulikov_d_a@mail.ru`