ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 226 (2023). С. 80–88
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-226-80-88

УДК 517.16, 517.165

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧ СТАРТОВОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ КЛАССА ВЫРОЖДЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

© 2023 г. **М. В. ПЛЕХАНОВА, Г. Д. БАЙБУЛАТОВА**

Аннотация. Рассматривается класс задач стартового управления системами, состояние которых описывается уравнениями в банаховых пространствах, не разрешимыми относительно старшей дробной производной Герасимова—Капуто и нелинейно зависящими от дробных производных младшего порядка. Получена теорема о существовании оптимального управления. Абстрактные результаты использованы при изучении задачи стартового управления для модифицированного уравнения Соболева дробного порядка по времени.

Ключевые слова: оптимальное управление, стартовое управление, дифференциальное уравнение дробного порядка, производная Герасимова—Капуто, нелинейное эволюционное уравнение, вырожденное эволюционное уравнение.

SOLVABILITY OF START CONTROL PROBLEMS FOR A CLASS OF DEGENERATE NONLINEAR EQUATIONS WITH FRACTIONAL DERIVATIVES

© 2023 **M. V. PLEKHANOVA, G. D. BAYBULATOVA**

Abstract. In this paper, we consider a class of start control problems for systems whose states are described by equations in Banach spaces that are not solvable with respect to the highest Gerasimov–Caputo fractional derivative and depend nonlinearly on lower-order fractional derivatives. A theorem on the existence of an optimal control is obtained. Abstract results are applies to the study of the start control problem for the modified Sobolev equation with a fractional derivative in time.

Keywords and phrases: optimal control, start control, fractional differential equation, Gerasimov–Caputo derivative, nonlinear evolution equation, degenerate evolution equation.

AMS Subject Classification: 26D15

1. Введение. В работе рассматривается задача оптимального управления для операторного уравнения в банаховых пространствах $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$. Пусть заданы линейный непрерывный оператор $L : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $\ker L \neq \{0\}$, линейный замкнутый оператор M с областью определения D_M, плотной в $\mathcal{X}$, действующий в $\mathcal{Y}$ и нелинейный оператор $N : X \to \mathcal{Y}$, где X — открытое множество в $\mathbb{R}\times\mathcal{X}^n$, D_t^β — производные Герасимова—Капуто при различных $\beta > 0$, $m - 1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 <$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-31-90015) и Программы Президента РФ государственной поддержки ведущих научных школ же (проект НШ-2708.2022.1.1).

$\dots < \alpha_n < \alpha$. Основная цель работы — получение условий разрешимости задачи управления

$$LD_t^\alpha x(t) = Mx(t) + N\big(t, D_t^{\alpha_1}x(t), \dots, D_t^{\alpha_n}x(t)\big), \quad t \in (t_0, T), \tag{1}$$

$$(Px)^{(k)}(t_0) = u_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{2}$$

$$u = (u_0, u_1, \dots, u_{m-1}) \in \mathcal{U}_\partial, \tag{3}$$

$$J(x, u) \to \inf. \tag{4}$$

Управляющее воздействие осуществляется в задаче посредством задания начальных данных u_k, $k = 0, 1, \dots, m-1$, в (2); подобные задачи называют задачами стартового управления. Ограничения на управления задаются условием (3) принадлежности непустому выпуклому замкнутому подмножеству $\mathcal{U}_\partial$ пространства управлений, в данной постановке являющемуся подпространством пространства $\mathcal{X}^m$.

Уравнение (1) не разрешимо относительно старшей производной в силу условия $\ker L \neq \{0\}$, поэтому многие авторы называю его вырожденным. Однако структура исследуемого уравнения, определяемая условием $(L, 0)$-ограниченности оператора M, позволяет с помощью использования проектора P задавать начальные условия (2) только для проекции решения на подпространство без вырождения, которые называются обобщенными условиями Шоуолтера—Сидорова. Вырожденные эволюционные уравнения рассматриваемого типа представляют интерес, поскольку часто встречаются при математическом моделировании различных процессов. Отметим работы, посвященные исследованию вырожденных уравнений или систем уравнений целого порядка: [4–6, 11, 15, 23, 34, 35].

Дробные дифференциальные уравнения в последние десятилетия являются предметом активного изучения. Теория дробного интегро-дифференцирования хорошо зарекомендовала себя при описании систем со сложными свойствами, процессов во фрактальных структурах и др. (см. [13, 36]) и расширила классы исследуемых задач. Различные дробные производные и содержащие их уравнения исследовались многими авторами (см. [3, 10, 14, 16, 20, 24–30]. Среди работ, посвященных исследованию задач оптимального управления для дифференциальных уравнений с дробными производными (см., например, [19,21,22,37]), совсем немногие касаются вырожденных эволюционных уравнений. Исключение составляют работы авторов проекта, например, [1,8,9,31].

Работа состоит из введения и трех разделов. Раздел 2 содержит вспомогательные результаты, используемые далее, в частности, полученные М. В. Плехановой и Г. Д. Байбулатовой условия однозначной разрешимости начальной задачи (1), (2) в смысле сильных решений (см. [33]). В разделе3 эти результаты используются для получения условий существования решения задачи стартового управления для соответствующей системы. Под решением задачи управления понимается пара «решение-управление», принадлежащая множеству допустимых пар и минимизирующая целевой функционал. Доказательство существования решения использует [17, теорема 2.4] и по сути сводится к проверке четырех условий: непустоты множества допустимых пар, непрерывности задающих состояние системы управления операторов, условия компактности для нелинейного оператора задачи и коэрцитивности целевого функционала. Полученный абстрактный результат используется при исследовании разрешимости задачи стартового управления для модифицированной нелинейной системы Соболева.

2. Сильное решение нелинейного вырожденного уравнения. Введем следующие обозначения:

$$g_\delta(t) := \Gamma(\delta)^{-1} t^{\delta-1}, \quad \tilde{g}_\delta(t) := \Gamma(\delta)^{-1}(t-t_0)^{\delta-1}, \quad J_t^\delta h(t) := \int\limits_{t_0}^{t} g_\delta(t-s)h(s)ds, \quad \delta > 0,\ t > 0.$$

Здесь и далее D_t^m — обычная производная порядка $m \in \mathbb{N}$, J_t^0 — тождественный оператор. Дробная производная Герасимова—Капуто (см. [2, 20]) функции h определена соотношением

$$D_t^\alpha h(t) := D_t^m J_t^{m-\alpha}\left(h(t) - \sum_{k=0}^{m-1} h^{(k)}(t_0)\tilde{g}_{k+1}(t)\right), \quad t > t_0.$$

Положим, что $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — банаховы пространства, $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ (т.е. L — линейный непрерывный оператор из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$), $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ — линейный замкнутый оператор с областью

определения D_M, плотной в $\mathcal{X}$, действующий в $\mathcal{Y}$; D_M снабжена нормой графика
$$\|\cdot\|_{D_M} := \|\cdot\|_{\mathcal{X}} + \|M\cdot\|_{\mathcal{Y}}.$$

Определим L-резольвентное множество
$$\rho^L(M) := \bigl\{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})\bigr\}$$
оператора M и его L-спектр $\sigma^L(M) := \mathbb{C}\backslash\rho^L(M)$ и введем обозначения
$$R^L_\mu(M) := (\mu L - M)^{-1}L, \quad L^L_\mu := L(\mu L - M)^{-1}.$$
Оператор M называется (L,σ)-*ограниченным*, если
$$\exists a > 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad \bigl(|\mu| > a\bigr) \;\Rightarrow\; \bigl(\mu \in \rho^L(M)\bigr).$$
В случае (L,σ)-ограниченности оператора M можно задать проекторы
$$P := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma R^L_\mu(M)\,d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{X}), \quad Q := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma L^L_\mu(M)\,d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}),$$
где $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$ (см. [35, p. 89, 90]). Положим
$$\mathcal{X}^0 := \ker P, \quad \mathcal{X}^1 := \operatorname{im} P, \quad \mathcal{Y}^0 := \ker Q, \quad \mathcal{Y}^1 := \operatorname{im} Q.$$
Обозначим через L_k и M_k, $k = 0,1$, сужения операторов L и M на $\mathcal{X}^k$ и $D_{M_k} := D_M \cap \mathcal{X}^k$) соответственно.

Теорема 1 (см. [35, p. 90, 91]). *Пусть оператор M является (L,σ)-ограниченным. Справедливы следующие утверждения.*

(i) $M_1 \in \mathcal{L}\bigl(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1\bigr)$, $M_0 \in \mathcal{C}l\bigl(\mathcal{X}^0;\mathcal{Y}^0\bigr)$, $L_k \in \mathcal{L}\bigl(\mathcal{X}^k;\mathcal{Y}^k\bigr)$, $k = 0,1$;

(ii) *существуют операторы* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}\bigl(\mathcal{Y}^0;\mathcal{X}^0\bigr)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}\bigl(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1\bigr)$.

Пусть $G := M_0^{-1}L_0$. Для $p \in \mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$ оператор M называется (L,p)-ограниченным, если он (L,σ)-ограничен, $G^p \neq 0$, $G^{p+1} = 0$.

Рассмотрим обобщенную задачу Шоуолтера—Сидорова для вырожденного полулинейного уравнения
$$D^\alpha_t Lx(t) = Mx(t) + N\bigl(t, D^{\alpha_1}_t x(t), D^{\alpha_2}_t x(t), \ldots, D^{\alpha_n}_t x(t)\bigr), \tag{5}$$
$$(Px)^{(k)}(t_0) = x_k, \quad k = 0,1,\ldots,m-1, \tag{6}$$
где $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha$, $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $m_k - 1 < \alpha_k \leqslant m_k \in \mathbb{N}$, $k = 1,2,\ldots,n$.

Сильным решением задачи (5), (6) называется функция $x \in C^{m_n}([t_0,T];\mathcal{X}) \cap L_q(t_0,T;D_M)$, для которой $Lx \in C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{Y})$, если
$$J^{m-\alpha}_t\left(Lx - \sum_{k=0}^{m-1}(Lx)^{(k)}(t_0)\tilde{g}_{k+1}\right) \in W^m_q(t_0,T;\mathcal{X}),$$
выполнены условия (6) и почти всюду на (t_0,T) верно равенство (5).

Лемма 1 (см. [32]). *Пусть $l-1 < \beta \leqslant l \in \mathbb{N}$, $q > 1$, $q > (l-\beta)^{-1}$ при $\beta < l$, $T > t_0$. Тогда*
$$\exists C_{q,\beta} > 0 \quad \forall h \in C^l([t_0,t];\mathcal{Z}) \quad \|D^\beta_t h\|_{L_q(t_0,t;\mathcal{Z})} \leqslant C_{q,\beta}\|h\|_{W^l_q(t_0,t;\mathcal{Z})}.$$

Теорема 2 (см. [33]). *Пусть $m_n \leqslant (m-1)/2$, $q > (\alpha-m+1)^{-1}$, оператор M $(L,0)$-ограничен, $N : [t_0,T] \times \mathcal{X}^n \to \mathcal{Y}$ для всех $z_1,z_2,\ldots,z_n \in \mathcal{X}$ и почти всех $t \in (t_0,T)$ удовлетворяет условию*
$$N(t,z_1,\ldots,z_n) = N_1(t,Pz_1,\ldots,Pz_n)$$
при некотором отображении $N_1 : [t_0,T] \times (\mathcal{X}^1)^n \to \mathcal{Y}$, для которого $QN_1 : [t_0,T] \times (\mathcal{X}^1)^n \to \mathcal{Y}$ каратеодориево и равномерно липшицево по $(z_1,z_2,\ldots,z_n) \in (\mathcal{X}^1)^n$ при всех $z_1,z_2,\ldots,z_n \in \mathcal{X}^1$ и почти всюду на (t_0,T)
$$\|QN_1(t,z_1,z_2,\ldots,z_n)\|_{\mathcal{Y}} \leqslant a(t) + c\sum_{k=1}^n \|z_k\|_{\mathcal{X}} \tag{7}$$

для некоторых $a \in L_q(t_0,T;\mathbb{R})$, $c > 0$, $(I-Q)N_1 \in C^{m_n}([t_0,T] \times (\mathcal{X}^1)^n;\mathcal{Y})$, $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1} \in \mathcal{X}^1$, *для решения задачи*

$$\begin{gathered} D_t^\alpha v(t) = L_1^{-1}M_1 v(t) + L_1^{-1}QN_1\big(t, D_t^{\alpha_1}v(t), D_t^{\alpha_2}v(t), \ldots, D_t^{\alpha_n}v(t)\big), \\ v^{(k)}(t_0) = x_k, \quad k = 0,1,\ldots,m-1, \end{gathered} \tag{8}$$

при $\alpha_k < m_k$ *выполняются равенства*

$$v^{(m_k+r)}(t_0) = 0, \quad k = 1,2,\ldots,n, \quad r = 0,1,\ldots,m_n-1. \tag{9}$$

Тогда задача (5), (6) *имеет единственное сильное решение.*

3. Задачи стартового управления. Пусть $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha$. Рассмотрим задачу стартового управления для вырожденного нелинейного уравнения

$$LD_t^\alpha x(t) = Mx(t) + N\big(t, D_t^{\alpha_1}x(t), \ldots, D_t^{\alpha_n}x(t)\big), \quad t \in (t_0,T), \tag{10}$$

$$(Px)^{(k)}(t_0) = u_k, \quad k = 0,1,\ldots,m-1, \tag{11}$$

$$u = (u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}) \in \mathcal{U}_\partial, \tag{12}$$

$$J(x,u) \to \inf, \tag{13}$$

где $\mathcal{U}_\partial$ — множество допустимых управлений (подмножество пространства управлений $\mathbb{U}$), J — целевой функционал. Введём в рассмотрение при $q > 1$ пространство

$$\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X}) := \left\{ x \in L_q(t_0,T;D_M) \cap C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{X}) : J_t^{m-\alpha}\left(x - \sum_{k=0}^{m-1} x^{(k)}(t_0)\tilde{g}_{k+1}\right) \in W_q^m(t_0,T;\mathcal{X}) \right\}.$$

Лемма 2 (см. [7]). *Пространство* $\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X})$ *с нормой*

$$\|x\|_{\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X})} = \|x\|_{L_q(t_0,T;D_M)} + \|x\|_{C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{X})} + \|D_t^\alpha x\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{X})}$$

является банаховым.

Лемма 3 (см. [7]). *Пусть* $\mathcal{X}_0$, $\mathcal{X}_1$ — *рефлексивные банаховы пространства,* $\mathcal{X}_0$ *компактно вложено в* $\mathcal{X}_1$, $q \in (1,+\infty)$. *Тогда при* $m \in \mathbb{N}$ *пространство* $W_q^m(t_0,T;\mathcal{X}_0)$ *компактно вложено в* $W_q^{m-1}(t_0,T;\mathcal{X}_1)$.

Множеством допустимых пар $\mathfrak{W}$ для задачи (10)–(13) будем называть такое множество пар (x,u), что функция $x \in \mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X})$ является сильным решением задачи (10), (11) с $u \in \mathcal{U}_\partial$. Решением задачи оптимального управления (10)–(13) называется пара $(\hat{x},\hat{u}) \in \mathfrak{W}$, минимизирующая целевой функционал, т.е. $J(\hat{x},\hat{u}) = \inf\limits_{(x,u)\in\mathfrak{W}} J(x,u)$.

Коэрцитивность функционала J означает, что для любого $R > 0$ множество $\big\{(x,u) \in \mathfrak{W} : J(x,u) \leqslant R\big\}$ ограничено в $\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X}) \times \mathbb{U}$.

Теорема 3. *Пусть* $m_n \leqslant (m-1)/2$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{X}_1$ — *рефлексивные банаховы пространства,* $\mathcal{X}$ *компактно вложено в* $\mathcal{X}_1$, *оператор* M *является* $(L,0)$*-ограниченным,* $N : [t_0,T] \times \mathcal{X}^n \to \mathcal{Y}$ *для всех* $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathcal{X}$ *и почти всех* $t \in (t_0,T)$ *удовлетворяет условию*

$$N(t, z_1, \ldots, z_n) = N_1(t, Pz_1, \ldots, Pz_n)$$

при некотором отображении $N_1 : [t_0,T] \times (\mathcal{X}^1)^n \to \mathcal{Y}$, *для которого* $QN_1 : [t_0,T] \times (\mathcal{X}^1)^n \to \mathcal{Y}$ *каратеодориево и равномерно липшицево по* $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in (\mathcal{X}^1)^n$, *для всех* $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathcal{X}^1$ *и почти всюду на* (t_0,T) *выполнено неравенство* (7) *для некоторых* $a \in L_q(t_0,T;\mathbb{R})$, $c > 0$, $(I-Q)N_1 \in C^{m_n}([t_0,T] \times (\mathcal{X}^1)^n;\mathcal{Y})$, $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1} \in \mathcal{X}^1$, *для решения задачи* (8) *при* $\alpha_k < m_k$ *выполняются равенства* (9). *Предположим, что* $\mathcal{U}_\partial$ — *непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства* $(\mathcal{X}^1)^m$, $\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X})$ *непрерывно вложено в банахово пространство* $\mathbb{Y}$, *которое непрерывно вложено в пространство* $W_q^{m-2}(t_0,T;\mathcal{X}_1)$; *целевой функционал* J *выпуклый, ограниченный снизу и полунепрерывный снизу на* $\mathbb{Y} \times (\mathcal{X}^1)^m$, *коэрцитивный на* $\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X}) \times (\mathcal{X}^1)^m$. *Тогда существует решение* $(\hat{x},\hat{u}) \in \mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X}) \times \mathcal{U}_\partial$ *задачи* (10)–(13).

Доказательство. По теореме 2 множество $\mathfrak{W}$ непусто. Определим пространства

$$\mathbb{Y}_1 := \mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X}), \quad \mathbb{U} := (\mathcal{X}^1)^m, \quad \mathbb{V} := L_q(t_0,T;\mathcal{Y}) \times \mathcal{X}^m$$

и операторы

$$\mathbb{L}(x,u) := \Big(LD_t^\alpha x - Mx,\ \gamma_0(Px) - u_0,\ \gamma_0(Px)^{(1)} - u_1,\ \ldots,\ \gamma_0(Px)^{(m-1)} - u_{m-1}\Big),$$
$$\mathbb{F}(x(\cdot)) := -\Big(N\big(\cdot, D_t^{\alpha_1}x(\cdot), D_t^{\alpha_2}x(\cdot), \ldots, D_t^{\alpha_n}x(\cdot)\big), 0, 0, \ldots, 0\Big).$$

Непрерывность линейного оператора $\mathbb{L} : \mathbb{Y}_1 \times \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ следует из неравенств

$$\|\mathbb{L}(x,u)\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Y})\times\mathcal{X}^m} \leqslant C_L\|D_t^\alpha x\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{X})} + \|Mx\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Y})}+$$
$$+\|\gamma_0(Px)\|_{\mathcal{X}} + \|\gamma_0(Px)^{(1)}\|_{\mathcal{X}} + \cdots + \|\gamma_0(Px)^{(m-1)}\|_{\mathcal{X}} + \|u_0\|_{\mathcal{X}} + \cdots + \|u_{m-1}\|_{\mathcal{X}} \leqslant$$
$$\leqslant C_1\|D_t^\alpha x\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{X})} + \|x\|_{L_q(t_0,T;D_M)} + C_2\|x\|_{C^{m-1}(t_0,T;\mathcal{X})} + \|u\|_{\mathcal{X}^m} \leqslant$$
$$\leqslant C\Big(\|x\|_{\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X})} + \|u\|_{\mathcal{X}^m}\Big) = C\|(x,u)\|_{\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X})\times\mathcal{X}^m}.$$

Докажем непрерывность нелинейного оператора $\mathbb{F} : \mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X}) \to \mathbb{V}$. Из соотношения

$$\|x_j - x\|_{\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X})} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$$

равномерной липшицевости оператора N_1 и леммы 1 следует, что

$$\Big\|N_1\big(\cdot, D_t^{\alpha_1}x_j(\cdot), \ldots, D_t^{\alpha_n}x_j(\cdot)\big) - N_1\big(\cdot, D_t^{\alpha_1}x(\cdot), \ldots, D_t^{\alpha_n}x(\cdot)\big)\Big\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Y})} \leqslant$$
$$\leqslant l\sum_{k=1}^n \big\|D_t^{\alpha_k}x_j - D_t^{\alpha_k}x\big\|_{C([t_0,T];\mathcal{X}_1)} \leqslant C_3 n\|x_j - x\|_{C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{X})} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0.$$

Проверим условие компактности из [17, теорема 2.4]. Пространство $\mathbb{Y}_1 := \mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X})$ непрерывно вложено в $W_q^{m-1}(t_0,T;\mathcal{X})$ и поэтому в силу леммы 3 компактно вложено в $\mathbb{Y}_{-1} := W_q^{m-2}(t_0,T;\mathcal{X}_1)$. Для элемента $v^* \in (L_q(t_0,T;\mathcal{Y}))^*$ в силу равномерной липшицевости оператора N_1 и леммы 1 имеем

$$\Big|v^*\Big(N_1\big(\cdot, D_t^{\alpha_1}x_j(\cdot), \ldots, D_t^{\alpha_n}x_j(\cdot)\big)\Big) - N_1\big(\cdot, D_t^{\alpha_1}x(\cdot), \ldots, D^{\alpha_n}x(\cdot)\big)\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \|v^*\|_{(L_q(t_0,T;\mathcal{Y}))^*}\Big\|N_1\big(\cdot, D_t^{\alpha_1}x_j(\cdot), \ldots, D_t^{\alpha_n}x_j(\cdot)\big) - N_1\big(\cdot, D_t^{\alpha_1}x(\cdot), \ldots, D_t^{\alpha_n}x(\cdot)\big)\Big\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Y})} \leqslant$$
$$\leqslant l\|v^*\|_{(L_q(t_0,T;\mathcal{Y}))^*}\sum_{k=1}^n \big\|D_t^{\alpha_k}x_j - D_t^{\alpha_k}x\big\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{X}_1)} \leqslant C_4 n\|v^*\|_{(L_q(t_0,T;\mathcal{X}_1))^*}\|x_j - x\|_{W_q^{m-2}(t_0,T;\mathcal{X}_1)}.$$

Это позволяет сделать вывод о непрерывной продолжимости функционала $w(\cdot) = v^*(\mathbb{F}(\cdot))$ из $\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X})$ на $\mathbb{Y}_{-1}$. Согласно [17, теорема 2.4] получим существование оптимального управления. □

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J(x,u) = \big\|x - x_d\big\|_{C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{X})}^{q_1} + \big\|D_t^\alpha x - D_t^\alpha x_d\big\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Y})}^{q_2} + \delta\sum_{k=0}^{m-1}\big\|u_k - u_{dk}\big\|_{\mathcal{X}}^{q_3} \to \inf \tag{14}$$

с заданными $q_i \geqslant 1$, $i = 1,2,3$, $\delta \geqslant 0$, $x_d \in \mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X})$, $u_{dk} \in \mathcal{X}$.

Следствие 1. *Пусть $m_n \leqslant (m-1)/2$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{X}_1$ — рефлексивные банаховы пространства, $\mathcal{X}$ компактно вложено в $\mathcal{X}_1$, оператор M является $(L,0)$-ограниченным, $N : [t_0,T] \times \mathcal{X}^n \to \mathcal{Y}$ для всех $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathcal{X}$ и почти всех $t \in (t_0,T)$ удовлетворяет условию*

$$N(t, z_1, \ldots, z_n) = N_1(t, Pz_1, \ldots, Pz_n)$$

при некотором отображении $N_1 : [t_0,T] \times (\mathcal{X}^1)^n \to \mathcal{Y}$, для которого $QN_1 : [t_0,T] \times (\mathcal{X}^1)^n \to \mathcal{Y}$ каратеодориево и равномерно липшицево по $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in (\mathcal{X}^1)^n$, для всех $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathcal{X}^1$ и почти всюду на (t_0,T) выполнено неравенство (7) для некоторых $a \in L_q(t_0,T;\mathbb{R})$, $c > 0$,

$(I-Q)N_1 \in C^{m_n}([t_0,T] \times (\mathcal{X}^1)^n; \mathcal{Y})$, $x_0, x_1, \dots, x_{m-1} \in \mathcal{X}^1$, для решения задачи (8) при $\alpha_k < m_k$ выполняются равенства (9). Предположим, что $\mathcal{U}_\partial$ — непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства $(\mathcal{X}^1)^m$. Тогда существует решение $(\hat{x}, \hat{u}) \in \mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X}) \times \mathcal{U}_\partial$ задачи (10)–(12), (14).

Доказательство. Пусть $\mathbb{Y} = \mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X})$. Выпуклость, непрерывность и ограниченность снизу функционала (14) в пространстве $\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X}) \times \mathcal{X}^m$ при $\delta > 0$ или в пространстве $\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X})$ при $\delta = 0$ очевидны. В силу равномерной липшицевости оператора N_1 и непрерывности оператора L имеем на множестве $\{(x,u) \in \mathfrak{W} : J(x,u) \leqslant R\}$:

$$\begin{gathered}
\|x\|_{\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X})} + \|u\|_{\mathcal{X}^m} = \|x\|_{L_q(t_0,T;D_M)} + \|x\|_{C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{X})} + \|D_t^\alpha x\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{X})} + \|u\|_{\mathcal{X}^m} \leqslant \\
\leqslant C_1\|x\|_{C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{X})} + \|Mx\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Y})} + \|D_t^\alpha x\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{X})} + \|u\|_{\mathcal{X}^m} \leqslant \\
\leqslant C_1\|x\|_{C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{X})} + \left\|LD_t^\alpha x - N\big(t, D_t^{\alpha_1}x, D_t^{\alpha_2}x, \dots, D_t^{\alpha_n}x\big)\right\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Y})} + \|u\|_{\mathcal{X}^m} \leqslant \\
\leqslant C_1\|x\|_{C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{X})} + C_2\|D_t^\alpha x\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{X})} + \|u\|_{\mathcal{X}^m} + \\
+ \left\|N\big(\cdot, D_t^{\alpha_1}x(\cdot), \dots, D_t^{\alpha_n}x(\cdot)\big) - N\big(\cdot, D_t^{\alpha_1}x_d(\cdot), \dots, D_t^{\alpha_n}x_d(\cdot)\big)\right\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Y})} + \\
+ \left\|N\big(\cdot, D_t^{\alpha_1}x_d(\cdot), \dots, D_t^{\alpha_n}x_d(\cdot)\big)\right\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Y})} \leqslant \\
\leqslant C_1\|x\|_{C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{X})} + C_2\|D_t^\alpha x\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{X})} + \|u\|_{\mathcal{X}^m} + l\sum_{k=1}^n \left\|D_t^{\alpha_k}x - D_t^{\alpha_k}x_d\right\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{X})} + C_3 \leqslant \\
\leqslant C_1\left\|x - x_d\right\|_{C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{X})} + C_2\left\|D_t^\alpha x - D_t^\alpha x_d\right\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{X})} + \left\|u - u_d\right\|_{\mathcal{X}^m} + C_4 \leqslant C_5 + C_6 R^{q_1+q_2+q_3}.
\end{gathered}$$

Отсюда следует коэрцитивность целевого функционала. Осталось сослаться на теорему 3. □

4. Стартовое управление для системы Соболева дробного порядка по времени. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial^k v}{\partial t^k}(x,t_0) = v_k(x), \quad x \in \Omega, \quad k = 0,1,\dots,m-1, \tag{15}$$

$$v_n(x,t) := \sum_{i=1}^3 v_i(x,t)n_i(x) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (t_0,T), \tag{16}$$

для модифицированной системы Соболева дробного порядка

$$D_t^\alpha v(x,t) = \big[v(x,t), \overline{\omega}\big] - r(x,t) + g(D_t^{\alpha_1}v), \quad (x,t) \in \Omega \times (t_0,T), \tag{17}$$

$$\nabla \cdot v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (t_0,T), \tag{18}$$

где $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant m_1 \leqslant (m-1)/2 < m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Эта система описывает при $\alpha = 1$, $g \equiv 0$ динамику малых внутренних движений вращающейся стратифицированной жидкости в равновесном состоянии (см. [12]). Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $n = (n_1, n_2, n_3)$ является вектором внешней нормали к границе, $v = (v_1, v_2, v_3)$ — вектор скорости частиц жидкости, $r = (r_1, r_2, r_3) = (p_{x_1}, p_{x_2}, p_{x_3})$ — нестационарный градиент давления, $[\cdot, \overline{\omega}]$ — векторное произведение, где $\overline{\omega} = (0,0,\omega) \in \mathbb{R}^3$, а ω — двойная угловая скорость вращения, $g = (g_1, g_2, g_3)$,

$$\nabla \cdot v := \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3},$$

v и r — неизвестные вектор-функции.

Введем следующие обозначения: $\mathbb{L}_2 := (L_2(\Omega))^3$, $\mathcal{L} := \big\{v \in (C_0^\infty(\Omega))^3 : \nabla \cdot v = 0\big\}$, $\mathbb{H}_\sigma$ — замыкание $\mathcal{L}$ в норме пространства $\mathbb{L}_2$. Имеем гильбертово пространство $\mathbb{L}_2 = \mathbb{H}_\sigma \oplus \mathbb{H}_\pi$ со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\mathbb{H}_\pi$ — ортогонональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$. Обозначим через $\Pi : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{H}_\pi$ соответствующий ортопроектор.

Согласно подходу С. Л. Соболева (см. [12]) заменим уравнение несжимаемости (18) и граничное условие (16) на уравнение

$$\Pi v(\cdot,t) = 0, \quad t \in (t_0,T). \tag{19}$$

Действительно, из плотности множества $\{\nabla\varphi : \varphi \in C^\infty(\Omega)\}$ в пространстве $\mathbb{H}_\pi$ и равенства

$$\int\limits_\Omega \langle v, \nabla\varphi\rangle_{\mathbb{R}^3} dx = \int\limits_{\partial\Omega} v_n \varphi ds - \int\limits_\Omega (\nabla \cdot v)\varphi dx$$

для всех $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ следует, что для $v \in \mathbb{H}^1 := (H^1(\Omega))^3$ совокупность двух условий (16) и (18) эквивалентна включению $v(\cdot, t) \in \mathbb{H}_\sigma$, $t \in (t_0, T)$. Откажемся от ограничения $v \in \mathbb{H}^1$ и получим условие (19).

Очевидно, что оператор $B : v \to [v, \overline{\omega}]$, $\overline{\omega} = (0, 0, \omega)$, непрерывен из $\mathbb{L}_2$ в $\mathbb{L}_2$, $\|B\|_{\mathcal{L}(\mathbb{L}_2)} = |\omega|$. Введем обозначение $B_\sigma := B\Sigma$.

Пусть $\Sigma := I - \Pi$, $\mathbb{H}^2 := (H^2(\Omega))^3$, $\mathbb{H}^2_\sigma := \mathbb{H}_2 \cap \mathbb{H}_\sigma$, $\mathcal{X} = \mathbb{H}^2_\sigma \times \mathbb{H}_\pi$, $\mathcal{Y} = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi$. Тогда задача (15), (17), (19) примет вид (5), (6) с операторами

$$L = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}), \quad M = \begin{pmatrix} \Sigma B & \mathbb{O} \\ \Pi B & -I \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}), \quad N(z) = g(v), \tag{20}$$

где $z = (v, r) \in \mathcal{X}$, $v \in \mathbb{H}^2_\sigma$, $r \in \mathbb{H}_\pi$ (см. подробнее [14]). В [14] показано, что

$$P = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \Pi B_\sigma & \mathbb{O} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}).$$

Теорема 4 (см. [18])**.** *Предположим, что Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^d$ с гладкой границей, $g \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R})$, $l > d/2$, отображение F действует по правилу*

$$F(v_1, v_2, \dots, v_d) = g\big(\cdot, v_1(\cdot), v_2(\cdot), \dots, v_d(\cdot)\big).$$

Тогда $F \in C^\infty((H^l(\Omega))^d; H^l(\Omega))$.

Теорема 5. *Пусть $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant m_1 \leqslant (m-1)/2 < m - 1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $g \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, производная g' ограничена на $\mathbb{R}$, $v_k \in \mathbb{H}_\sigma$, $k = 0, 1, \dots, m-1$; если $\alpha_1 < m_1$, то $v_{m_1+r} = 0$, $r = 0, 1, \dots, m_1 - 1$. Тогда существует единственное сильное решение задачи* (15)*,* (17)*,* (19)*.*

Доказательство. Заметим, что $\mathcal{X}^1 = \operatorname{im} P = \{(v, r) \in \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi : r = \Pi B_\sigma v\}$ (см. [14]). Следовательно, условия (15) для функций $v_k \in \mathbb{H}_\sigma$ эквивалентны обобщенным условиям Шоуолтера—Сидорова (6) с данными из $\mathcal{X}^1$ для уравнения (10) с операторами (20). Кроме того, для всех $z = (v, r) \in \mathcal{X}$ имеем $Pz = (v, \Pi B_\sigma v)$, $v = P_1 P z$, где P_1 — проекция $(v, r) \to v$. Поэтому $N(z) = g(P_1 P z) := N_1(Pz)$. По теореме 4 получим, что $g(w) \in \mathbb{H}^2$ для всех $w \in \mathbb{H}^2_\sigma \subset \mathbb{H}^2$, так как $\dim \Omega = 3$, $2 > 3/2$, поэтому $g \in C^\infty(\mathbb{H}^2; \mathbb{H}^2)$. Оператор N является равномерно липшицевым, так как g' ограничена. Условие (7) выполнено в силу непрерывности оператора N, а условия (9) — в силу равенства нулю элементов $v_{m_1+r} = 0$, $r = 0, 1, \dots, m_1 - 1$. При этом учитывается, что $2m_1 - 1 < 2m_1 \leqslant m - 1$. Остается сослаться на лемму 1 из [14], в которой показана $(L, 0)$-ограниченность оператора M, и теорему 2. $\square$

Теперь перейдем к задаче стартового управления

$$\frac{\partial^k v}{\partial t^k}(x, t_0) = u_k(x), \quad x \in \Omega, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Множество допустимых управлений $\mathcal{U}_\partial$ состоит из функций $u_k \in \mathcal{X}$, удовлетворяющих условию

$$\|u_k\|_{\mathcal{X}} \leqslant R. \tag{21}$$

Пространство $\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{X})$ по определению имеет вид

$$Z_{\alpha,q}(t_0, T; \mathbb{H}^2_\sigma \times \mathbb{H}_\pi) := \Bigg\{ x \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathbb{H}^2_\sigma \times \mathbb{H}_\pi) : \\ J_t^{m-\alpha}\left(x - \sum_{k=0}^{m-1} x^{(k)}(t_0)\tilde{g}_{k+1}\right) \in W_q^m(t_0, T; \mathbb{H}^2_\sigma \times \mathbb{H}_\pi)\Bigg\}.$$

Целевой функционал при заданных $v_d \in Z_{\alpha,q}(t_0,T;\mathbb{H}^2_\sigma)$, $r_d \in Z_{\alpha,q}(t_0,T;\mathbb{H}_\pi)$, $u_{dk} \in \mathbb{H}^2_\sigma \times \mathbb{H}_\pi$, $q > 1$, $\delta \geqslant 0$ имеет вид

$$J(v,r,u) = \left\|v - v_d\right\|^2_{C^{m-1}([t_0,T];\mathbb{H}^2_\sigma)} + \left\|r - r_d\right\|^2_{C^{m-1}([t_0,T];\mathbb{H}_\pi)} + \left\|D^\alpha_t v - D^\alpha_t v_d\right\|^2_{L_2(t_0,T;\mathbb{H}^2_\sigma)} + \\ + \left\|D^\alpha_t r - D^\alpha_t r_d\right\|^2_{L_2(t_0,T;\mathbb{H}_\pi)} + \delta \sum_{k=0}^{m-1} \left\|u_k - u_{dk}\right\|^2_{\mathbb{H}^2_\sigma \times \mathbb{H}_\pi} \to \inf. \quad (22)$$

С учетом проведенной редукции из следствия 1 получим следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть* $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant m_1 \leqslant (m-1)/2 < m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $g \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, *производная* g' *ограничена на* $\mathbb{R}$, $v_k \in \mathbb{H}_\sigma$, $k = 0,1,\ldots,m-1$; *если* $\alpha_1 < m_1$, *то* $v_{m_1+r} = 0$, $r = 0,1,\ldots,m_1-1$. *Тогда существует единственное решение* $(\hat{v},\hat{r},\hat{u}_0,\ldots,\hat{u}_{m-1}) \in \mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;H^2_\sigma \times \mathbb{H}_\pi) \times \mathcal{U}_\partial$ *задачи управления* (15), (17), (19), (21), (22).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Байбулатова Г. Д.* Задачи стартового управления для одного класса вырожденных уравнений с младшими дробными производными// Челяб. физ.-мат. ж. — 2020. — *5*, № 3. — С. 271–284.
2. *Герасимов А. Н.* Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения// Прикл. мат. мех. — 1948. — *12*. — С. 529–539.
3. *Глушак А. В., Авад Х. К.* О разрешимости абстрактного дифференциального уравнения дробного порядка с переменным оператором// Совр. мат. Фундам. напр. — 2013. — *47*. — С. 118–32.
4. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешённые относительно старшей производной. — Новосибирск: Научная книга, 1998.
5. *Егоров И. Е., Пятков С. Г., Попов С. В.* Уравнения и системы, не разрешённые относительно старшей производной. — Новосибирск: Наука, 2000.
6. *Кожанов А. И.* Смешанная задача для одного класса сильно нелинейных уравнений соболевского типа высокого порядка// Докл. РАН. — 2013. — *451*, № 5. — С. 492–494.
7. *Плеханова М. В.* Разрешимость задач управления для вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка// Челяб. физ.-мат. ж. — 2017. — *2*, № 1. — С. 53–65.
8. *Плеханова М. В.* Задачи оптимального управления для линейных вырожденных дробных уравнений// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2018. — *149*. — С. 72–83.
9. *Плеханова М. В., Байбулатова Г. Д., Киен Б. Т.* Распределенное управление для полулинейных уравнений с производными Герасимова—Капуто// Мат. заметки СВФУ. — 2021. — *28*, № 2. — С. 47–67.
10. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.
11. *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. — М.: Физматлит, 2007.
12. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1954. — *18*. — С. 3–50.
13. *Учайкин В. В.* Метод дробных производных. — Ульяновск: Артишок, 2008.
14. *Федоров В. Е., Гордиевских Д. М.* Разрешающие операторы вырожденных эволюционных уравнений с дробной производной по времени// Изв. вузов. Мат. — 2015. — № 1. — С. 71–83.
15. *Федоров В. Е., Плеханова М. В.* Оптимальное управление линейными уравнениями соболевского типа// Диффер. уравн. — 2004. — *40*, № 11. — С. 1548–1556.
16. *Федоров В. Е., Плеханова М. В., Нажимов Р. Р.* Линейные вырожденные эволюционные уравнения с дробной производной Римана—Лиувилля// Сиб. мат. ж. — 2018. — *59*, № 1. — С. 171–184.
17. *Фурсиков А. В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. — Новосибирск: Научная книга, 1999.
18. *Хэссард Б.,Казаринов Н., Вэн И.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла. — М.: Мир, 1985.
19. *Bahaa G. M., Hamiaz A.* Optimal control problem for coupled time-fractional diffusion systems with final observations// J. Taibah Univ. Sci. — 2018. — *13*, № 1. — P. 124–135.
20. *Bajlekova E. G.* Fractional Evolution Equations in Banach Spaces / Ph.D. thesis. — Eindhoven: University Press Facilities, Eindhoven University of Technology, 2001.

21. *Baleanu D., Machado J. A. T., Luo A. C. J.* Fractional Dynamics and Control. — London–New York–Dordrecht–Heidelberg: Springer, 2012.
22. *Debbouche A., Torres D. F. M.* Sobolev-type fractional dynamic equations and optimal multi-integral controls with fractional nonlocal conditions// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2015. — *18.* — P. 95–121.
23. *Fedorov V. E.* Applications of the theory of degenerate operator semigroups to initial-boundary-value problems// J. Math. Sci. — 2005. — № 126. — P. 1658–1663.
24. *Fedorov V. E., Gordievskikh D. M., Plekhanova M. V.* Equations in Banach spaces with a degenerate operator under a fractional derivative// Differ. Equations. — 2015. — *51.* — P. 1360–1368.
25. *Fedorov V. E., Romanova E. A., Debbouche A.* Analytic in a sector resolving families of operators for degenerate evolution fractional equations// J. Math. Sci. — 2018. — *228*, № 4. — P. 380–394.
26. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — Amsterdam–Boston–Heidelberg: Elsevier, 2006.
27. *Mainardi F., Luchko Y. F., Pagnini G.* The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2001. — *4*, № 2. — P. 153–192.
28. *Oldham K. B., Spanier J.* The Fractional Calculus. — Boston: Academic Press, 1974.
29. *Plekhanova M. V.* Nonlinear equations with degenerate operator at fractional Caputo derivative// Math. Meth. Appl. Sci. — 2016. — *40.* — P. 41–44.
30. *Plekhanova M. V.* Sobolev type equations of time-fractional order with periodical boundary conditions// AIP Conf. Proc. — 2016. — *1759.* — 020101.
31. *Plekhanova M. V., Baybulatova G. D.* Problems of hard control for a class of degenerate fractional order evolution equations// Proc. Int. Conf. “Mathematical Optimization Theory and Operations Research (MOTOR 2019)” (Yekaterinburg, Russia, July 08–12, 2019). — Springer, 2019. — P. 501–512.
32. *Plekhanova M. V., Baybulatova G. D.* Semilinear equations in Banach spaces with lower fractional derivatives// Proc. Int. Conf. “Nonlinear Analysis and Boundary Value Problems (NABVP 2018)” (Santiago de Compostela, Spain, September 4–7, 2019). — Springer, 2019. — P. 81–93.
33. *Plekhanova M. V., Baybulatova G. D.* On strong solutions for a class of semilinear fractional degenerate evolution equations with lower fractional derivatives// Math. Meth. Appl. Sci. — 2021. — *44*, № 15. — P. 11810–11819.
34. *Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M.* Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic, 2002.
35. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev-Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. — Utrecht Boston: VSP, 2003.
36. *Tarasov V. E.* Fractional Dynamics. — Beijing: Higher Education Press, 2010.
37. *Wang J. R., Zhou Y.* A class of fractional evolution equations and optimal controls// Nonlin. Anal. Real World Appl. — 2011. — *12*, № 1. — P. 262–272.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-31-90015) и Программы Президента РФ государственной поддержки ведущих научных школ же (проект НШ-2708.2022.1.1).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Плеханова Марина Васильевна
Челябинский государственный университет;
Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет), Челябинск
E-mail: mariner79@mail.ru

Байбулатова Гузель Дамировна
Челябинский государственный университет
E-mail: baybulatova_g_d@mail.ru