ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 226 (2023). С. 89–107
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-226-89-107

УДК 517.958, 517.956.32

О РЕШЕНИИ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛУПОЛОСЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СО СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

© 2023 г. **В. С. РЫХЛОВ**

Аннотация. Исследуется начально-граничная задача для неоднородного гиперболического уравнения второго порядка в полуполосе плоскости с постоянными коэффициентами и смешанной производной, описывающая поперечные колебания конечной струны с закрепленными концами. Введено понятие классического решения начально-граничной задачи, доказана теорема единственности классического решения и получена формула для решения в виде ряда, членами которого являются контурные интегралы, содержащие исходные данные задачи. Дано определение обобщенного решения рассматриваемой задачи и найдены конечные формулы для этого обобщенного решения.

Ключевые слова: уравнение колебаний, гиперболическое уравнение, смешанная производная, начально-граничная задача, классическое решение, обобщенное решение.

ON THE SOLUTION OF THE INITIAL-BOUNDARY PROBLEM IN A HALF-STRIP FOR A HYPERBOLIC EQUATION WITH A MIXED DERIVATIVE

© 2023 **V. S. RYKHLOV**

Abstract. An initial-boundary problem for an inhomogeneous second-order hyperbolic equation in a half-strip of a plane with constant coefficients and a mixed derivative is studied. This problem describes transverse oscillations of a finite string with fixed ends. We introduce the notion of a classical solution of the initial-boundary problem, prove a uniqueness theorem for the classical solution, and obtain a formula for the solution in the form of a series whose terms are contour integrals containing the initial data of the problem. A definition of a generalized solution is given and finite formulas for this generalized solution are found.

Keywords and phrases: oscillation equation, hyperbolic equation, mixed derivative, initial boundary value problem, classical solution, generalized solution.

AMS Subject Classification: 35L20

1. Постановка задачи и краткая историческая справка. Рассмотрим следующую начально-граничную задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + p_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x,t), \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \tag{3}$$

где $(x,t)\in Q=[0,1]\times[0,+\infty)$; $p_1,p_2\in\mathbb{R}$, все функции, входящие в (1)–(3), комплекснозначные, $\varphi,\psi\in L_1[0,1]$, $f\in L_1(Q_T)$ при любом фиксированном $T>0$ (будем далее просто писать, что $f\in L_1(Q_T)$, не поясняя, что $T>0$ — любое фиксированние число), $Q_T=[0,1]\times[0,T]$ при $T>0$.

Рассматривается случай гиперболического уравнения (1), т.е. выполняется условие $p_1^2-4p_2>0$. В этом случае корни ω_1, ω_2 характеристического уравнения

$$\omega^2+p_1\omega+p_2=0$$

вещественны и различны.

Требуется найти решение этой задачи в области Q при как можно более слабых условиях на параметры задачи, т.е. на функции φ, ψ, f.

Уравнение (1) является уравнением поперечных колебаний продольно движущейся конечной струны. Исследование таких уравнений началось около 60 лет назад (см. [36–38]).

Излагаемые в данной статье результаты частично анонсированы в [20–22] и получены с использованием резольвентного и аксиоматического методов решения начально-граничных задач для волнового уравнения в полуполосе плоскости, предложенных А. П. Хромовым и наиболее просто описанных в [30]. Такой подход к решению задачи сформировался не сразу. Историю формирования и развития этого подхода, а также полученные с помощью него результаты можно найти в [2,3,5,25–29,31–33]. Этот подход использует идеи А. Н. Крылова (см. [4]) об ускорении сходимости тригонометрического ряда, а также идеи Л. Эйлера (см. [35]) о расходящихся рядах.

Аналогичный подход решения начально-граничных задач в полуполосе плоскости для телеграфного уравнения при других краевых условиях используется в [6–9]. Другой подход, отличный от используемого в данной и вышеупомянутых статьях и при других постановках начально-граничных задач, в частности, в первой четверти плоскости, получил развитие в [10–15]. Были предложены и другие задачи для уравнения (1), например, задача гашения поперечных колебаний продольно движущейся струны [16, 17].

Под *классическим решением* (или почти классическим решением, классическим решением почти всюду (п.в.), или, более кратко, решением п.в.) понимается функция $u(x,t)$ переменных $(x,t)\in Q$, удовлетворяющая условиям (2)–(3) и п.в. уравнению (1), которая непрерывна вместе с $u_x(x,t)$ и $u_t(x,t)$, при этом $u_x(x,t)$ и $u_t(x,t)$ абсолютно непрерывны по x и t, и п.в. в Q выполняется равенство

$$u_{xt}(x,t)=u_{tx}(x,t). \tag{4}$$

Отметим, что необходимость в условии (4) обусловлена тем, что в случае, когда $u_{xt}(x,t)$ и $u_{tx}(x,t)$ не являются непрерывными функциями, это равенство может не выполняться на множестве положительной меры (см. [23]).

Для классического решения задачи (1)–(3) необходимо выполняются следующие условия:

1) гладкость: $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\psi(x)$ абсолютно непрерывны;
2) согласование: $\varphi(0)=\varphi(1)=\psi(0)=\psi(1)=0$.

Возможны только две принципиально разные ситуации:

$$\omega_1<0<\omega_2, \tag{5}$$

$$0<\omega_1<\omega_2. \tag{6}$$

В случае (5) соответствующая спектральная задача является регулярной по Биркгофу (см. [18, с. 66–67]), а в случае (6) — нерегулярной. Далее будем рассматривать только случай (5).

В случае $p_1=0$ (или, что то же самое, $\omega_2=-\omega_1$) получаем начально-граничную задачу (1)–(3) для классического уравнения колебания струны. Как уже выше отмечено, эта задача подробно исследовалась в [2, 3, 5, 25–33]. Решение, полученное в настоящей статье, при $p_1=0$ имеет другой вид, не использующий сложных продолжений исходных функций φ,ψ,f на всю вещественную ось.

Отметим, что конкретный вид краевых условий (2) не принципиален. Могут быть рассмотрены и более общие, но регулярные по Биркгофу однородные краевые условия.

2. Спектральная задача, соответствующая начально-граничной задаче. С задачей (1)–(3) тесно связана следующая спектральная задача:

$$L(\lambda)y = 0, \tag{7}$$

порожденная оператор-функцией $L(\lambda)$, определяемой дифференциальным выражением с параметром λ

$$\ell(y,\lambda) := y'' + \lambda p_1 y' + \lambda^2 p_2 y \tag{8}$$

и краевыми условиями

$$U_1(y) := y(0) = 0, \quad U_2(y) := y(1) = 0. \tag{9}$$

В качестве фундаментальной системы решений уравнения $\ell(y,\lambda) = 0$ рассмотрим систему решений

$$y_1(x,\lambda) := e^{\lambda\omega_1 x}, \quad y_2(x,\lambda) := e^{\lambda\omega_2 x}.$$

Тогда характеристический определитель $L(\lambda)$ (см. [18, с. 26]) имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\lambda\omega_1} & e^{\lambda\omega_2} \end{vmatrix} = e^{\lambda\omega_2} - e^{\lambda\omega_1};$$

очевидно, его корни равны

$$\lambda_k = \frac{2k\pi i}{\omega_2 - \omega_1}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{10}$$

Эти числа, кроме точки $\lambda_0 = 0$, являются простыми собственными значениями $L(\lambda)$. Число $\lambda_0 = 0$, как легко проверить, не является собственным значением.

Обозначим через γ_k окружности $\{\lambda : |\lambda - \lambda_k| = \delta\}$, где $\delta > 0$ настолько мало, что внутри γ_k находится по одному собственному значению.

Линеаризуем задачу (7) с учетом (8). Положим $z_1 = y$, $z_2 = \lambda y$. Получим следующую задачу в пространстве вектор-функций $Z = (z_1, z_2)^T$:

$$AZ = \lambda Z, \quad BZ(0) + CZ(1) = 0,$$

где

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{p_2} d_x^2 & -\dfrac{p_1}{p_2} d_x \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad d_x := \frac{d}{dx}. \tag{11}$$

Введем в пространстве вектор-функций оператор

$$\mathcal{L}Z := AZ, \quad D_{\mathcal{L}} = \big\{Z := (z_1, z_2)^T : \ z_1'', z_2' \in L_1[0,1], \ BZ(0) + CZ(1) = 0\big\}. \tag{12}$$

Как показано в [34], собственные значения и производные цепочки (см. [18, с. 28]), построенные по собственным функциям оператор-функции $L(\lambda)$, совпадают с собственными значениями и собственными вектор-функциями оператора $\mathcal{L}$; следовательно, двукратное разложение по собственным функциям оператор-функции $L(\lambda)$ есть не что иное, как разложение по собственным вектор-функциям оператора $\mathcal{L}$.

Найдем резольвенту $\mathcal{R}_\lambda = (\mathcal{L} - \lambda\mathcal{E})^{-1}$ оператора $\mathcal{L}$, где $\mathcal{E}$ — единичный оператор в пространстве вектор-функций. Для этого решим задачу

$$\mathcal{L}Z - \lambda Z = H,$$

где $H = (h_1, h_2)^T$; в подробной записи

$$z_2 - \lambda z_1 = h_1, \quad -\frac{1}{p_2} z_1'' - \frac{p_1}{p_2} z_2' - \lambda z_2 = h_2, \quad z_1(0) = z_1(1) = 0. \tag{13}$$

Выразим z_2 из первого уравнения системы (13):

$$z_2 = \lambda z_1 + h_1 \tag{14}$$

и подставим во второе уравнение системы (13):

$$-\frac{1}{p_2} z_1'' - \frac{p_1}{p_2}(\lambda z_1' + h_1') - \lambda(\lambda z_1 + h_1) = h_2$$

или

$$z_1'' + \lambda p_1 z_1' + \lambda^2 p_2 z_1 = h_\lambda,$$

где

$$h_\lambda := -p_1 h_1' - \lambda p_2 h_1 - p_2 h_2. \tag{15}$$

Итак, первая компонента резольвенты $\mathcal{R}$ является решением следующей краевой задачи:

$$z_1'' + \lambda p_1 z_1' + \lambda^2 p_2 z_1 = h_\lambda, \quad z_1(0) = z_1(1) = 0. \tag{16}$$

Пусть R_λ — резольвента оператор-функции $L(\lambda)$, а $G(x, \xi, \lambda)$ — её функция Грина. Тогда из (16) получим представление

$$z_1(x, \lambda) = (R_\lambda h_\lambda)(x) = \int\limits_0^1 G(x, \xi, \lambda) h_\lambda(\xi)\, d\xi, \tag{17}$$

а из (14) найдем

$$z_2(x, \lambda) = \lambda z_1(x, \lambda) + h_1(x) = \lambda (R_\lambda h_\lambda)(x) + h_1(x) = \lambda \int\limits_0^1 G(x, \xi, \lambda) h_\lambda(\xi)\, d\xi + h_1(x). \tag{18}$$

3. Разложение первой компоненты вектор-функции по собственным вектор-функциям спектральной задачи. Из общей теории линейных операторов следует, что двукратное разложение вектор-функции H в ряд по собственным функциям $L(\lambda)$ или, что то же самое, разложение по собственным вектор-функциям оператора $\mathcal{L}$, имеет вид

$$-\frac{1}{2\pi i} \sum_k \int\limits_{\gamma_k} \mathcal{R}_\lambda H\, d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \sum_k \int\limits_{\gamma_k} \begin{pmatrix} z_1(x,\lambda) \\ z_2(x,\lambda) \end{pmatrix} d\lambda =$$
$$= -\frac{1}{2\pi i} \sum_k \int\limits_{\gamma_k} \begin{pmatrix} z_1(x,\lambda) \\ \lambda z_1(x,\lambda) + h_1(x) \end{pmatrix} d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \sum_k \int\limits_{\gamma_k} \begin{pmatrix} z_1(x,\lambda) \\ \lambda z_1(x,\lambda) \end{pmatrix} d\lambda.$$

Найдем условия на компоненты вектор-функции H, при которых имеет место равенство

$$h_1(x) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_k \int\limits_{\gamma_k} \left(\mathcal{R}_\lambda H\right)_1 d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \sum_k \int\limits_{\gamma_k} z_1(x,\lambda)\, d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \sum_k \int\limits_{\gamma_k} (R_\lambda h_\lambda)(x)\, d\lambda =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int\limits_{\gamma_k} \int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda) \Big[p_1 h_1'(\xi) + \lambda p_2 h_1(\xi) + p_2 h_2(\xi)\Big]\, d\xi\, d\lambda.$$

Запись $(\dots)_j$ означает, что рассматривается j-я компонента вектора, стоящего внутри скобок. Преобразуя в этом равенстве первое слагаемое в квадратных скобках, интегрируя по частям и учитывая, что $h_1(0) = h_1(1) = 0$, получим, что нужно найти условия на компоненты вектора H, при которых справедливо равенство

$$h_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int\limits_{\gamma_k} \int\limits_0^1 \Big(\big(-p_1 G_\xi(x,\xi,\lambda) + \lambda p_2 G(x,\xi,\lambda)\big) h_1(\xi) + p_2 G(x,\xi,\lambda) h_2(\xi)\Big)\, d\xi\, d\lambda =: I(x). \tag{19}$$

Имеет место следующая теорема о разложении первой компоненты.

Теорема 1. *Если $h_1', h_2 \in L_p[0,1]$ $(p > 1)$, $h_1(0) = h_1(1) = 0$, то справедливо равенство* (19), *причем ряд сходится абсолютно и равномерно на отрезке* $[0,1]$.

Доказательство. Справедливость теоремы установим не обычным методом контурного интеграла Пуанкаре—Коши (см. [18, с. 91–98]), а более удобным в данном случае методом вычетов.

Для функции Грина $G(x, \xi, \lambda)$ имеет место следующее представление:

$$G(x,\xi,\lambda)=\frac{1}{\lambda(\omega_2-\omega_1)\Delta(\lambda)}\Big(e^{\lambda(\omega_1 x+\omega_2(1-\xi))}-e^{\lambda\omega_1(x+1-\xi)}+e^{\lambda(\omega_1(1-\xi)+\omega_2 x)}-e^{\lambda(\omega_1+\omega_2(x-\xi))}\Big)-$$
$$-\frac{1}{\lambda(\omega_2-\omega_1)}\Big(e^{\lambda\omega_1(x-\xi)}\chi(x-\xi)+e^{\lambda\omega_2(x-\xi)}\chi(\xi-x)\Big), \quad (20)$$

где $\chi(x)$ — функция Хевисайда ($\chi(x)=1$, если $x\geqslant 0$, и $\chi(x)=0$, если $x<0$).

Докажем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Справедливы формулы*

$$r_k(x,\xi):=\operatorname*{res}_{\lambda=\lambda_k}G(x,\xi,\lambda)=\frac{1}{2k\pi i(\omega_2-\omega_1)}\Big(e^{\lambda_k\omega_2 x}-e^{\lambda_k\omega_1 x}\Big)\Big(e^{-\lambda_k\omega_1\xi}-e^{-\lambda_k\omega_2\xi}\Big), \quad (21)$$

$$r_{1k}(x,\xi):=\operatorname*{res}_{\lambda_k}G_\xi(x,\xi,\lambda)=-\frac{1}{(\omega_2-\omega_1)^2}\Big(e^{\lambda_k\omega_2 x}-e^{\lambda_k\omega_1 x}\Big)\Big(\omega_1e^{-\lambda_k\omega_1\xi}-\omega_2e^{-\lambda_k\omega_2\xi}\Big). \quad (22)$$

Доказательство. Так как $G(x,\xi,\lambda)$ — мероморфная функция по λ и λ_k — ее простой полюс, то из формулы (20) получим

$$r_k(x,\xi)=$$
$$=\frac{1}{\lambda_k(\omega_2-\omega_1)\Delta'(\lambda_k)}\Big(e^{\lambda_k(\omega_1 x+\omega_2(1-\xi))}-e^{\lambda_k\omega_1(x+1-\xi)}+e^{\lambda_k(\omega_1(1-\xi)+\omega_2 x)}-e^{\lambda_k(\omega_1+\omega_2(x-\xi))}\Big). \quad (23)$$

На основании (10) для знаменателя справедливо представление

$$\lambda_k(\omega_2-\omega_1)\Delta'(\lambda_k)=\frac{2k\pi i}{\omega_2-\omega_1}(\omega_2-\omega_1)\Big(\omega_2e^{\lambda_k\omega_2}-\omega_1e^{\lambda_k\omega_1}\Big)=$$
$$=2k\pi ie^{\lambda_k\omega_1}\Big(\omega_2e^{\lambda_k(\omega_2-\omega_1)}-\omega_1\Big)=2k\pi ie^{\lambda_k\omega_1}\Big(\omega_2e^{\frac{2k\pi i}{\omega_2-\omega_1}(\omega_2-\omega_1)}-\omega_1\Big)=2k\pi i(\omega_2-\omega_1)e^{\lambda_k\omega_1}.$$

С учетом этого из (23) найдем

$$r_k(x,\xi)=\frac{1}{2k\pi i(\omega_2-\omega_1)}\Big(e^{\lambda_k(\omega_1(x-1)+\omega_2(1-\xi))}-e^{\lambda_k\omega_1(x-\xi)}+e^{\lambda_k(-\omega_1\xi+\omega_2 x)}-e^{\lambda_k\omega_2(x-\xi)}\Big)=$$
$$=\frac{1}{2k\pi i(\omega_2-\omega_1)}\Big(e^{\lambda_k(\omega_2-\omega_1)+\lambda_k(\omega_1 x-\omega_2\xi)}-e^{\lambda_k\omega_1(x-\xi)}+e^{\lambda_k(\omega_2 x-\omega_1\xi)}-e^{\lambda_k\omega_2(x-\xi)}\Big)=$$
$$=\frac{1}{2k\pi i(\omega_2-\omega_1)}\Big(e^{\lambda_k(\omega_1 x-\omega_2\xi)}-e^{\lambda_k\omega_1(x-\xi)}+e^{\lambda_k(\omega_2 x-\omega_1\xi)}-e^{\lambda_k(x-\xi)}\Big)=$$
$$=\frac{1}{2k\pi i(\omega_2-\omega_1)}\bigg(e^{\lambda_k\omega_1 x}\Big(e^{-\lambda_k\omega_2\xi}-e^{-\lambda_k\omega_1\xi}\Big)+e^{\lambda_k\omega_2 x}\Big(e^{-\lambda_k\omega_1\xi}-e^{-\lambda_k\omega_2\xi}\Big)\bigg)=$$
$$=\frac{1}{2k\pi i(\omega_2-\omega_1)}\Big(e^{\lambda_k\omega_2 x}-e^{\lambda_k\omega_1 x}\Big)\Big(e^{-\lambda_k\omega_1\xi}-e^{-\lambda_k\omega_2\xi}\Big).$$

Формула (21) доказана. Формула (22) получается из (21) путем дифференцирования $r_k(x,\xi)$ по ξ. □

Лемма 2. *Если $f(x)\in L_1[0,1]$, то справедливы формулы*

$$\int_0^1 e^{-\lambda_k\omega_1\xi}f(\xi)\,d\xi=-\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_1}\int_0^1 e^{-2k\pi i\xi}f^*(\xi)\,d\xi, \quad (24)$$

$$\int_0^1 e^{-\lambda_k\omega_2\xi}f(\xi)\,d\xi=\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_2}\int_0^1 e^{-2k\pi i\xi}f_*(\xi)\,d\xi, \quad (25)$$

где введены обозначения

$$f^*(\xi)=\begin{cases}0, & \xi\in\left[0,\dfrac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\right),\\ f\left(\dfrac{\omega_2-\omega_1}{\omega_1}(\xi-1)\right), & \xi\in\left[\dfrac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1},1\right];\end{cases}\qquad f_*(\xi)=\begin{cases}f\left(\dfrac{\omega_2-\omega_1}{\omega_2}\xi\right), & \xi\in\left[0,\dfrac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\right),\\ 0, & \xi\in\left[\dfrac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1},1\right].\end{cases}\tag{26}$$

Доказательство. С учетом формул для λ_k (см. (10)) справедливо представление

$$\int\limits_0^1 e^{-\lambda_k\omega_1\xi}f(\xi)\,d\xi=\int\limits_0^1 e^{-2k\pi i\frac{\omega_1\xi}{\omega_2-\omega_1}}f(\xi)\,d\xi.\tag{27}$$

Очевидно, $\dfrac{\omega_1\xi}{\omega_2-\omega_1}\in(-1;0]$. Так как функция $e^{-2k\pi ix}$ является 1-периодичной, то из (27) следует

$$\int\limits_0^1 e^{-\lambda_k\omega_1\xi}f(\xi)\,d\xi=\int\limits_0^1\exp\left\{-2k\pi i\Big(\frac{\omega_1\xi}{\omega_2-\omega_1}+1\Big)\right\}f(\xi)\,d\xi.$$

Сделав в интеграле справа замену

$$\frac{\omega_1\xi}{\omega_2-\omega_1}+1=\xi_1\quad\longleftrightarrow\quad\xi=\frac{(\omega_2-\omega_1)(\xi_1-1)}{\omega_1},$$

получим

$$\int\limits_0^1 e^{-\lambda_k\omega_1\xi}f(\xi)\,d\xi=-\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_1}\int\limits_{\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}}^1 e^{-2k\pi i\xi_1}f\Big(\frac{(\omega_2-\omega_1)(\xi_1-1)}{\omega_1}\Big)\,d\xi_1=$$

$$=-\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_1}\int\limits_0^1 e^{-2k\pi i\xi_1}f^*(\xi_1)\,d\xi_1,$$

т.е. установлена справедливость равенства (24), где функция f^* определяется левой формулой в (26).

Далее, аналогично предыдущему можно получить

$$\int\limits_0^1 e^{-\lambda_k\omega_2\xi}f(\xi)\,d\xi=\int\limits_0^1\exp\left\{-2k\pi i\frac{\omega_2\xi}{\omega_2-\omega_1}\right\}f(\xi)\,d\xi=\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_2}\int\limits_0^{\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}} e^{-2k\pi i\xi_1}f\Big(\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_2}\xi_1\Big)\,d\xi_1=$$

$$=\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_2}\int\limits_0^1 e^{-2k\pi i\xi_1}f_*(\xi_1)\,d\xi_1,$$

т.е. получим формулу (25), где функция f_* определена в (26). □

Перейдем теперь к непосредственному доказательству теоремы 1.

Рассмотрим выражение $I(x)$, введенное в (19). Справедливо представление

$$I(x)=\sum_k\int\limits_0^1\operatorname*{res}_{\lambda=\lambda_k}\Big(-p_1G_\xi(x,\xi,\lambda)h_1(\xi)+\lambda p_2G(x,\xi,\lambda)h_1(\xi)+p_2G(x,\xi,\lambda)h_2(\xi)\Big)\,d\xi=$$

$$=\sum_k\int\limits_0^1\Big(\big(-p_1r_{1k}(x,\xi)+\lambda_kp_2r_k(x,\xi)\big)h_1(\xi)+p_2r_k(x,\xi)h_2(\xi)\Big)\,d\xi.$$

На основании леммы 1 отсюда получим

$$I(x)=\sum_k \big(e^{\lambda_k\omega_2 x}-e^{\lambda_k\omega_1 x}\big)\times$$
$$\times\Bigg(\int\limits_0^1\bigg(\Big(\frac{p_1\omega_1}{(\omega_2-\omega_1)^2}+\frac{\lambda_k p_2}{2k\pi i(\omega_2-\omega_1)}\Big)e^{-\lambda_k\omega_1\xi}-\Big(\frac{p_1\omega_2}{(\omega_2-\omega_1)^2}+\frac{\lambda_k p_2}{2k\pi i(\omega_2-\omega_1)}\Big)e^{-\lambda_k\omega_2\xi}\bigg)h_1(\xi)\,d\xi+$$
$$+\frac{p_2}{2k\pi i(\omega_2-\omega_1)}\int\limits_0^1\Big((e^{-\lambda_k\omega_1\xi}-e^{-\lambda_k\omega_2\xi}\Big)h_2(\xi)\,d\xi\Bigg). \quad (28)$$

Введем обозначение

$$H_2(x):=\int\limits_0^x h_2(\xi)\,d\xi.$$

Интегрируя по частям второй интеграл справа в (28), учитывая, что

$$e^{-\lambda_k\omega_1}-e^{-\lambda_k\omega_2}=e^{-\lambda_k\omega_2}\big(e^{\lambda_k(\omega_2-\omega_1)}-1\big)=e^{-\lambda_k\omega_2}\big(e^{2k\pi i}-1\big)=0, \quad (29)$$

а также используя формулы Виета $p_1=-(\omega_1+\omega_2)$ и $p_1=\omega_1\omega_2$, из (28) получим

$$I(x)=\sum_k\Big(\exp\Big\{2k\pi i\frac{\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\Big\}-\exp\Big\{2k\pi i\Big(\frac{\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}+1\Big)\Big\}\Big)\times$$
$$\times\Big(-\frac{\omega_1^2}{(\omega_2-\omega_1)^2}\int\limits_0^1 e^{-\lambda_k\omega_1\xi}h_1(\xi)\,d\xi+\frac{\omega_2^2}{(\omega_2-\omega_1)^2}\int\limits_0^1 e^{-\lambda_k\omega_2\xi}h_1(\xi)\,d\xi+$$
$$+\frac{\omega_1^2\omega_2}{(\omega_2-\omega_1)^2}\int\limits_0^1 e^{-\lambda_k\omega_1\xi}H_2(\xi)\,d\xi-\frac{\omega_1\omega_2^2}{(\omega_2-\omega_1)^2}\int\limits_0^1 e^{-\lambda_k\omega_2\xi}H_2(\xi)\,d\xi\Big). \quad (30)$$

Затем применим лемму 2. В результате для $I(x)$ получим представление

$$I(x)=\sum_k\Big(\exp\Big\{2k\pi i\frac{\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\Big\}-\exp\Big\{2k\pi i\Big(\frac{\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}+1\Big)\Big\}\Big)\times$$
$$\times\bigg(\Big(\frac{\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^1 e^{-2k\pi i\xi}h_1^*(\xi)\,d\xi+\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^1 e^{-2k\pi i\xi}h_{1*}(\xi)\,d\xi\Big)-$$
$$-\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^1 e^{-2k\pi i\xi}\Big(H_2^*(\xi)+H_{2*}(\xi)\Big)\,d\xi\bigg). \quad (31)$$

Лемма 3. *Если*

$$f\in W_p^1[0,1],\quad p\geqslant 1,\quad f(0)=f(1)=0, \quad (32)$$

то

$$f^*,f_*\in W_p^1[0,1], \quad (33)$$
$$f^*(0)=f^*(1)=f_*(0)=f_*(1)=0. \quad (34)$$

Доказательство. Введем обозначение $a=\dfrac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}$. Из формул (26) видно, что в случае выполнения условий (32) для доказательства (33) достаточно доказать равенства

$$f^*(a+0)-f^*(a-0)=0,\quad f_*(a+0)-f_*(a-0)=0. \quad (35)$$

Из первой формулы в (26) и (32) получим

$$f^*(a+0) - f^*(a-0) = f\Big(\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_1}\Big(\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1} - 1\Big)\Big) - 0 = f\Big(\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_1}\frac{\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\Big) = f(1) = 0.$$

Аналогично, из второй формулы в (26) найдем

$$f_*(a+0) - f_*(a-0) = 0 - f\Big(\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_2}\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\Big) = -f(1) = 0.$$

Тем самым соотношения (35) установлены, и, следовательно, доказано свойство (33)

Далее, опять с учетом первой формулы в (26) будем иметь

$$f^*(1) = f\Big(\frac{(\omega_2-\omega_1)(1-1)}{\omega_1}\Big) = f(0) = 0, \quad f^*(0) = f(0) = 0.$$

Аналогично, учитывая вторую формулу в (26), получим

$$f_*(0) = f(0) = 0, \quad f_*(0) = 0.$$

Тем самым, соотношения (34) также доказаны. □

Лемма 4. *Если $f \in L_p[0,1]$, $p \geqslant 1$, то сумма $F^* + F_*$ принадлежит пространству $W_p^1[0,1]$, где*

$$F(x) = \int\limits_0^x f(\xi)\,d\xi,$$

и справедливо равенство

$$\big(F^* + F_*\big)(0) = \big(F^* + F_*\big)(1).$$

Доказательство. Если $f \in L_p[0,1]$, то $F(x) \in W_p^1[0,1]$ и для доказательства того, что

$$(F^* + F_*) \in W_p^1[0,1],$$

достаточно установить непрерывность этой суммы в точке a. На основании (26) справедливы равенства

$$\begin{aligned}\big(F^*(a+0) + F_*(a+0)\big) - \big(F^*(a-0) + F_*(a-0)\big) &= \\ = \Big(F\Big(\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_1}\Big(\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1} - 1\Big)\Big) + 0\Big) - \Big(0 - F\Big(\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_2}\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\Big)\Big) &= \\ = F\Big(\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_1}\frac{\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\Big) - F(1) = F(1) - F(1) &= 0.\end{aligned}$$

Равенство значений суммы $F^* + F_*$ в концах отрезка $[0,1]$ следует из равенства в точках 0 и 1 каждого слагаемого. В самом деле, на основании (26) имеем

$$F^*(1) - F^*(0) = F(0) - 0 = 0 - 0 = 0, \quad F_*(1) - F_*(0) = 0 - F(0) = 0 - 0 = 0.$$ □

Завершим доказательство теоремы 1.

Согласно следствию 2 из теоремы Зигмунда (см. [1, с. 613]), если $f(x)$ абсолютно непрерывна, $f(0) = f(1)$ и ее производная принадлежит L_p, $p > 1$, то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к ней абсолютно, а значит, и равномерно (см. [1, с. 275]).

Используя указанное следствие и учитывая леммы 3 и 4, получим из (31)

$$I(x) = \frac{\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\sum_k \exp\Big\{2k\pi i\frac{\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\Big\}\int\limits_0^1 e^{-2k\pi i\xi}h_1^*(\xi)\,d\xi +$$

$$+ \frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\sum_k \exp\Big\{2k\pi i\frac{\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\Big\}\int\limits_0^1 e^{-2k\pi i\xi}h_{1*}(\xi)\,d\xi -$$

$$
-\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\sum_k \exp\Big\{2k\pi i\frac{\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\Big\}\int\limits_0^1 e^{-2k\pi i\xi}\Big(H_2^*(\xi)+H_{2*}(\xi)\Big)\,d\xi-
$$
$$
-\frac{\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\sum_k \exp\Big\{2k\pi i\Big(\frac{\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}+1\Big)\Big\}\int\limits_0^1 e^{-2k\pi i\xi}h_1^*(\xi)\,d\xi-
$$
$$
-\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\sum_k \exp\Big\{2k\pi i\Big(\frac{\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}+1\Big)\Big\}\int\limits_0^1 e^{-2k\pi i\xi}h_{1*}(\xi)\,d\xi+
$$
$$
+\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\sum_k \exp\Big\{2k\pi i\Big(\frac{\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}+1\Big)\Big\}\int\limits_0^1 e^{-2k\pi i\xi}\Big(H_2^*(\xi)\,d\xi+H_{2*}(\xi)\Big)\,d\xi=
$$
$$
=\frac{\omega_1}{\omega_2-\omega_1}h_1^*\Big(\frac{\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\Big)+\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}h_{1*}\Big(\frac{\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\Big)-\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\Big(H_2^*\Big(\frac{\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\Big)-H_{2*}\Big(\frac{\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\Big)\Big)-
$$
$$
-\frac{\omega_1}{\omega_2-\omega_1}h_1^*\Big(\frac{\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}+1\Big)-\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}h_{1*}\Big(\frac{\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}+1\Big)+
$$
$$
+\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\Big(H_2^*\Big(\frac{\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}+1\Big)+H_{2*}\Big(\frac{\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}+1\Big)\Big), \quad (36)
$$

причем сходимость рядов абсолютная и равномерная. Учитывая, что при $x\in[0,1]$

$$
\frac{\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\in\Big[0,\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\Big],\quad \frac{\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}+1\in\Big[\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1},1\Big],
$$

на основании (26) из (36) получим

$$
I(x)=\frac{\omega_1}{\omega_2-\omega_1}0+\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}h_1\Big(\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_2}\frac{\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\Big)-\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\Big(0+H_2\Big(\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_2}\frac{\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\Big)\Big)-
$$
$$
-\frac{\omega_1}{\omega_2-\omega_1}h_1\Big(\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_1}\frac{\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\Big)-\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}0+\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\Big(H_2\Big(\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_1}\frac{\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\Big)+0\Big)=
$$
$$
=\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}h_1(x)-\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_2-\omega_1}H_2(x)-\frac{\omega_1}{\omega_2-\omega_1}h_1(x)+\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_2-\omega_1}H_2(x)=\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_2-\omega_1}h_1(x)=h_1(x).
$$

Итак, доказано, что ряд $I(x)$ сходится абсолютно и равномерно к $h_1(x)$. □

4. Единственность классического решения начально-граничной задачи и формула для решения в виде ряда. Сформулируем и докажем важный для дальнейшего изложения результат. Пусть $R_{1\lambda}$ — интегральный оператор с ядром $G_\xi(x,\xi,\lambda)$.

Теорема 2. *Если $u(x,t)$ — классическое решение задачи (1)–(3), $f\in L_1(Q_T)$ и дополнительно выполняется условие $u_{tt}\in L_1(Q_T)$, то это решение единственно и находится по формуле*

$$
u(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\sum_k\int\limits_{\gamma_k}\Big(-p_1e^{\lambda t}R_{1\lambda}\varphi+p_2e^{\lambda t}\lambda R_\lambda\varphi+p_2e^{\lambda t}R_\lambda\psi+\int\limits_0^t e^{\lambda(t-\tau)}R_\lambda f(\cdot,\tau)\,d\tau\Big)\,d\lambda; \quad (37)
$$

ряд сходится абсолютно и равномерно по $x\in[0,1]$ при любом фиксированном $t>0$.

Доказательство. Запишем задачу (1)–(3) иначе. Введем обозначения

$$
v_1=u,\quad v_2=\frac{d}{dt}v_1=\frac{d}{dt}u; \quad (38)
$$

тогда уравнение (1) примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}v_1 = v_2, \\ \dfrac{d}{dt}v_2 = -\dfrac{1}{p_2}d_x^2 v_1 - \dfrac{p_1}{p_2}d_x v_2 + \dfrac{1}{p_2}f, \end{cases} \tag{39}$$

где, как и раньше, $d_x := d/dx$. Пусть

$$V := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad F := \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{p_2}f \end{pmatrix}.$$

Используя введенный ранее оператор A (см. (11)), запишем систему (39) в виде

$$\frac{d}{dt}V(\cdot,t) = AV(\cdot,t) + F(\cdot,t), \tag{40}$$

где по предположению теоремы $V_t, F \in L_1(Q_T)$. Используя оператор $\mathcal{L}$ (см. (12)) и учитывая формулы (40), запишем задачу (1)–(3) в виде

$$\frac{d}{dt}V(\cdot,t) = \mathcal{L}V(\cdot,t) + F(\cdot,t), \tag{41}$$

$$V(x,0) = \Xi(x), \tag{42}$$

где $\Xi(x) = (\varphi(x), \psi(x))^T$. При этом вектор-функция V удовлетворяет уравнению (41) п.в. в области Q и всюду на $[0,1]$ удовлетворяет равенству (42).

Если $u(x,t)$ — классическое решение задачи (1)–(3), то $V(x,t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 о разложении по собственным вектор-функциям оператора $\mathcal{L}$ для первой компоненты, т.е. имеет место представление

$$v_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\sum_k \int\limits_{\gamma_k} \big(\mathcal{R}_\lambda V(\cdot,t)\big)_1\, d\lambda, \tag{43}$$

где ряд сходится абсолютно и равномерно по переменной $x \in [0,1]$ при любом фиксированном $t > 0$.

По построениею для вектор-функции V п.в. выполняется соотношение (41). Подействуем оператором $\mathcal{R}_\lambda$ на обе части этого соотношения. Получим равенство

$$\mathcal{R}_\lambda V_t = \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{L}V) + \mathcal{R}_\lambda F. \tag{44}$$

Пусть

$$Y(x,t,\lambda) := \mathcal{R}_\lambda V(\cdot,t) \tag{45}$$

и $\mathcal{G}$ — функция Грина оператора $\mathcal{L}$. Из (45) тогда получим представление

$$Y(x,t,\lambda) = \int\limits_0^1 \mathcal{G}(x,\xi,\lambda)V(\xi,t)\,d\xi. \tag{46}$$

Покажем, что

$$\frac{d}{dt}Y(x,t,\lambda) = \int\limits_0^1 \mathcal{G}(x,\xi,\lambda)V_t(\xi,t)\,d\xi = \mathcal{R}_\lambda V_t(\cdot,t). \tag{47}$$

Будем рассуждать аналогично [31, с. 287–288].

Так как по построению $V(\xi,t)$ является абсолютно непрерывной функцией переменнойЁt, то из (46) получим

$$Y(x,t,\lambda) = \int\limits_0^1 \mathcal{G}(x,\xi,\lambda)V(\xi,0)\,d\xi + \int\limits_0^1 \mathcal{G}(x,\xi,\lambda)\int\limits_0^t V_t(\xi,\tau)\,d\tau\,d\xi. \tag{48}$$

Как уже отмечалось выше, на основании предположения теоремы и обозначения (38) имеем $V_t(\xi,\tau)\in L_1(Q_T)$. Следовательно, $\mathcal{G}(x,\xi,\lambda)V_t(\xi,\tau)\in L_1(Q_T)$ по переменным ξ и τ. Поэтому по теореме Фубини

$$\int\limits_0^1 \mathcal{G}(x,\xi,\lambda)V_t(\xi,\tau)\,d\xi \in L_1[0,T] \quad \text{по } \tau.$$

Значит, (48) можно представить в виде

$$Y(x,t,\lambda)=\int\limits_0^1 \mathcal{G}(x,\xi,\lambda)V(\xi,0)\,d\xi+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \mathcal{G}(x,\xi,\lambda)V_t(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

Отсюда следует, что функция $Y(x,t,\lambda)$ абсолютно непрерывна по t и почти при всех t выполняется равенство (47).

Далее, преобразуем первое слагаемое справа в (44) следующим образом:

$$\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{L}V)=\mathcal{R}_\lambda\big((\mathcal{L}-\lambda\mathcal{E}+\lambda\mathcal{E})V\big)=V+\lambda\mathcal{R}_\lambda V=V+\lambda Y. \tag{49}$$

Из (44), (47), (49) тогда получим, что при фиксированных x и λ вектор-функция $Y(x,t,\lambda)$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}Y(x,t,\lambda)-\lambda Y(x,t,\lambda=V(x,t)+\mathcal{R}_\lambda F(\cdot,t). \tag{50}$$

Кроме того, на основании (42)

$$Y(x,0,\lambda)=\mathcal{R}_\lambda V(\cdot,0)=\mathcal{R}_\lambda\Xi. \tag{51}$$

Таким образом, $Y(x,t,\lambda)$ при любых фиксированных x и λ является решением задачи Коши (50)–(51). Общее решение уравнения (50) имеет вид

$$Y_{\text{о.н.}}(x,t,\lambda)=\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0\\ 0 & e^{\lambda t}\end{pmatrix}C+\int\limits_0^t e^{\lambda(t-\tau)}\big(V(x,\tau)+\mathcal{R}F(\cdot,\tau)\big)\,d\tau, \tag{52}$$

где $C=(C_1,C_2)^T$ — вектор, не зависящий от переменной t, т.е. $C_j=C_j(x,\lambda)$, $j=1,2$. Удовлетворим решение (52) начальному условию (51):

$$Y_{\text{о.н.}}(x,0,\lambda)=\begin{pmatrix} C_1\\ C_2\end{pmatrix}=\mathcal{R}_\lambda\Xi.$$

Отсюда следует, что

$$C_1(x,\lambda)=(\mathcal{R}_\lambda\Xi)_1,\quad C_2(x,\lambda)=(\mathcal{R}_\lambda\Xi)_2. \tag{53}$$

Используя формулы (52)–(53), получим следующее представление решения задачи Коши (50)–(51):

$$Y(x,t,\lambda)=\begin{pmatrix} e^{\lambda t}(\mathcal{R}_\lambda\Xi)_1\\ e^{\lambda t}(\mathcal{R}_\lambda\Xi)_2\end{pmatrix}+\int\limits_0^t e^{\lambda(t-\tau)}\big(V(x,\tau)+\mathcal{R}_\lambda F(\cdot,\tau)\big)\,d\tau, \tag{54}$$

причем это решение единственно. Нас интересует только первая компонента равенства (54) (см. формулу (43)), т.е. если $Y(x,t,\lambda)=\big(y_1(x,t,\lambda),y_2(x,t,\lambda)\big)^T$, то из (54) получим с учетом (45)

$$y_1(x,t,\lambda)=\big(\mathcal{R}_\lambda V(\cdot,t)\big)_1=e^{\lambda t}(\mathcal{R}_\lambda\Xi)_1+\int\limits_0^t e^{\lambda(t-\tau)}\Big(v_1(x,\tau)+\big(\mathcal{R}F(\cdot,\tau)\big)_1\Big)\,d\tau. \tag{55}$$

Учитывая, что $u(x,t)=v_1(x,t)$, из формул (43) и (55) получим

$$u(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\sum_k\int\limits_{\gamma_k} e^{\lambda t}\big(\mathcal{R}_\lambda\Xi\big)_1\,d\lambda-\frac{1}{2\pi i}\sum_k\int\limits_{\gamma_k}\left(\int\limits_0^t e^{\lambda(t-\tau)}\Big(u(x,\tau)+\big(\mathcal{R}_\lambda F(\cdot,\tau)\big)_1\Big)\,d\tau\right)d\lambda.$$

Так как
$$\int\limits_0^t e^{\lambda(t-\tau)}u(x,\tau)\,d\tau$$
— целая аналитическая функция по λ, то все интегралы по контурам γ_k от нее равны нулю. В результате получим
$$u(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\sum_k\int\limits_{\gamma_k}e^{\lambda t}\big(\mathcal{R}_\lambda\Xi\big)_1\,d\lambda-\frac{1}{2\pi i}\sum_k\int\limits_{\gamma_k}\bigg(\int\limits_0^t e^{\lambda(t-\tau)}\big(\mathcal{R}_\lambda F(\cdot,\tau)\big)_1\,d\tau\bigg)\,d\lambda. \tag{56}$$

Запишем эту формулу в другом, более удобном для применения виде, используя следующее представление, которое следует из (17), (18) и (15):
$$\mathcal{R}_\lambda H=\mathcal{R}_\lambda\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_\lambda\big(-p_1h_1'-\lambda p_2h_1-p_2h_2\big)\\ \lambda R_\lambda\big(-p_1h_1'-\lambda p_2h_1-p_2f_2\big)+h_1\end{pmatrix}. \tag{57}$$
С учетом того, что $\Xi=(\varphi,\psi)^T$, из (57) найдем
$$\big(\mathcal{R}_\lambda\Xi\big)_1=R_\lambda\big(-p_1\varphi'-\lambda p_2\varphi-p_2\psi\big). \tag{58}$$
Учитывая, что $F=\Big(0,\dfrac{1}{p_2}f\Big)^T$, из (57) найдем
$$\big(\mathcal{R}_\lambda F\big)_1=R_\lambda\big(-f(\cdot,\tau)\big). \tag{59}$$
Тогда из (56), (58), (59) получим
$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\sum_k\int\limits_{\gamma_k}e^{\lambda t}R_\lambda\big(p_1\varphi'+\lambda p_2\varphi+p_2\psi\big)\,d\lambda+\frac{1}{2\pi i}\sum_k\int\limits_{\gamma_k}\int\limits_0^t e^{\lambda(t-\tau)}R_\lambda f(\cdot,\tau)\,d\tau\,d\lambda. \tag{60}$$
Имеет место равенство
$$R_\lambda\varphi'=\int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda)\varphi'(\xi)\,d\xi=G(x,1,\lambda)\varphi(1)-G(x,0,\lambda)\varphi(0)-$$
$$-\int\limits_0^1 G_\xi(x,\xi,\lambda)\varphi(\xi)\,d\xi=-\int\limits_0^1 G_\xi(x,\xi,\lambda)\varphi(\xi)\,d\xi=-R_{1\lambda}\varphi, \tag{61}$$
так как
$$G(x,1,\lambda)=G(x,0,\lambda)=0,$$
ввиду того, что функция Грина $G(x,\xi,\lambda)$ по ξ удовлетворяет краевым условиям, сопряженным к условиям (9) (см. [18, с. 20–21]).

Учитывая (61) в (60), получим в результате формулу (37) из формулировки доказываемой теоремы, причем ряд в этой формуле сходится абсолютно и равномерно по $x\in[0,1]$ при любом фиксированном $t>0$. Итак, теорема 2 полностью доказана. □

Так как ряд в формуле (37) сходится абсолютно и равномерно по $x\in[0,1]$, то этот ряд равен сумме рядов, соответствующих каждому слагаемому суммы, стоящей во внутренних круглых скобках. Ряды в (37), соответствующие первому и второму слагаемым, обозначим $u_{11}(x,t)$ и $u_{12}(x,t)$, соответственно. Пусть $u_1(x,t)=u_{11}(x,t)+u_{12}(x,t)$. Этот ряд соответствует задаче (1)–(3), в которой $\psi(x)\equiv0$ и $f(x,t)\equiv0$. Ряд, соответствующий третьему слагаемому во внутренних скобках формулы (37), обозначим $u_2(x,t)$. Этот ряд соответствует задаче (1)–(3), в которой $\varphi(x)\equiv0$ и $f(x,t)\equiv0$. Ряд в формуле (37), соответствующий четвертому слагаемому, обозначим $u_3(x,t)$. Этот ряд соответствует задаче (1)–(3), в которой $\varphi(x)\equiv0$ и $\psi(x)\equiv0$. Следовательно, классическое решение $u(x,t)$ можно представить в виде
$$u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)+u_3(x,t). \tag{62}$$

5. Обобщенное решение и конечная формула для обобщенного решения. Таким образом, установлено, что задача (1)–(3) и ряд в (37) тесно связаны. Аналогично [30] расширим понятие этой связи.

Ряд справа в (37) имеет смысл для любых функций $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0,1]$, $f(x,t) \in L_1(Q_T)$, хотя теперь он может быть и расходящимся. Тем не менее будем считать, что он является формальным решением задачи (1)–(3), но понимаемой теперь чисто формально. Эту задачу (1)–(3) в случае $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0,1]$, $f(x,t) \in L_1(Q_T)$ будем называть *обобщенной начально-граничной задачей*, а ее решение, т.е. ряд справа в (37) — *обобщенным решением задачи* (1)–(3). Найти решение обобщенной начально-граничной задачи — значит найти «сумму» расходящегося ряда в (37) (слово «сумма» в кавычках означает, что это сумма именно расходящегося ряда).

В [24, с. 19] для расходящихся рядов введены три аксиомы:

(A) $\sum a_n = s \Longrightarrow \sum k a_n = ks$;

(B) $\sum a_n = s,\ \sum b_n = t \Longrightarrow \sum (a_n + b_n) = s + t$;

(C) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = s \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s - a_0$.

В дополнение к этим аксиомам А. П. Хромов предложил для расходящихся рядов еще одну аксиому (см. [30]):

(D) $\int \sum = \sum \int$, где $\int$ — определенный интеграл.

Используя аксиомы (A) и (B), нетрудно убедиться, что для обобщенного решения (37) справедливо представление (62). Более того, для каждого слагаемого справа в (62) можно найти суммы рядов и получить конечную формулу для обобщенного решения.

5.1. Формула для обобщенного решения в случае $\psi = 0$ и $f = 0$. В данном разделе речь идет о получении конечной формулы для обобщенного решения (см. (62))

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int\limits_{\gamma_k} \left(e^{\lambda t} \int\limits_0^1 \big(-p_1 G_\xi(x,\xi,\lambda)\varphi(\xi) + \lambda p_2 G(x,\xi,\lambda)\varphi(\xi) \big)\, d\xi \right) d\lambda. \tag{63}$$

Используя обозначения леммы 1, получим

$$u_1(x,t) = \sum_k \int\limits_0^1 \operatorname*{res}_{\lambda=\lambda_k} \Big(e^{\lambda t} \big(-p_1 G_\xi(x,\xi,\lambda)\varphi(\xi) + \lambda p_2 G(x,\xi,\lambda)\varphi(\xi) \big) \Big)\, d\xi =$$

$$= \sum_k \int\limits_0^1 \Big(e^{\lambda_k t} \big(-p_1 r_{1k}(x,\xi) + \lambda_k p_2 r_k(x,\xi) \big) \varphi(\xi) \Big)\, d\xi. \tag{64}$$

Далее проводим рассуждения, аналогичные рассуждениям при выводе формулы (30). На основании леммы 1, формул Виета и аксиом (A), (B) из (64) получим

$$u_1(x,t) = \sum_k \big(e^{\lambda_k (t+\omega_2 x)} - e^{\lambda_k (t+\omega_1 x)} \big) \times$$

$$\times \left(\int\limits_0^1 \left(\Big(\frac{p_1 \omega_1}{(\omega_2-\omega_1)^2} + \frac{\lambda_k p_2}{2k\pi i(\omega_2-\omega_1)} \Big) e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} - \Big(\frac{p_1 \omega_2}{(\omega_2-\omega_1)^2} + \frac{\lambda_k p_2}{2k\pi i(\omega_2-\omega_1)} \Big) e^{-\lambda_k \omega_2 \xi} \right) \varphi(\xi)\, d\xi \right) =$$

$$= \sum_k \big(e^{\lambda_k (t+\omega_2 x)} - e^{\lambda_k (t+\omega_1 x)} \big) \left(-\frac{\omega_1^2}{(\omega_2-\omega_1)^2} \int\limits_0^1 e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} \varphi(\xi)\, d\xi + \frac{\omega_2^2}{(\omega_2-\omega_1)^2} \int\limits_0^1 e^{-\lambda_k \omega_2 \xi} \varphi(\xi)\, d\xi \right) =$$

$$= \frac{\omega_1^2}{(\omega_2-\omega_1)^2}\Bigg(-\sum_k e^{\lambda_k(t+\omega_2 x)}\int\limits_0^1 \varphi(\xi)e^{-\lambda_k\omega_1\xi}d\xi - \sum_k e^{\lambda_k(t+\omega_1 x)}\int\limits_0^1 \varphi(\xi)e^{-\lambda_k\omega_1\xi}d\xi\Bigg)+$$

$$+\frac{\omega_2^2}{(\omega_2-\omega_1)^2}\Bigg(\sum_k e^{\lambda_k(t+\omega_2 x)}\int\limits_0^1 \varphi(\xi)e^{-\lambda_k\omega_2\xi}\,d\xi - \sum_k e^{\lambda_k(t+\omega_1 x)}\int\limits_0^1 \varphi(\xi)e^{-\lambda_k\omega_2\xi}\,d\xi\Bigg). \quad (65)$$

Далее применяем лемму 2 и аксиому (A). В результате получим

$$u_1(x,t) = \frac{\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\Bigg(\sum_k e^{2k\pi i\frac{t+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}}\int\limits_0^1 \varphi^*(\xi)e^{-2k\pi i\xi}\,d\xi - \sum_k e^{2k\pi i\frac{t+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}}\int\limits_0^1 \varphi^*(\xi)e^{-2k\pi i\xi}\,d\xi\Bigg)+$$

$$+\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\Bigg(\sum_k e^{2k\pi i\frac{t+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}}\int\limits_0^1 \varphi_*(\xi)e^{-2k\pi i\xi}\,d\xi - \sum_k e^{2k\pi i\frac{t+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}}\int\limits_0^1 \varphi_*(\xi)e^{-2k\pi i\xi}\,d\xi\Bigg). \quad (66)$$

Отсюда следует, что для нахождения «суммы» ряда (63) надо найти «суммы» тригонометрических рядов функций $\varphi^*(x)$ и $\varphi_*(x)$ или, обобщенно, «сумму» тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)\in L_1[0,1]$:

$$\sum_k e^{2k\pi ix}\int\limits_0^1 f(\xi)e^{-2k\pi i\xi}\,d\xi. \quad (67)$$

Пусть «сумма» ряда (67) при $x\in[0,1]$ есть какая-либо функция $g(x)\in L_1[0,1]$ (ограничимся именно такими функциями). Тогда в соответствии с аксиомой (D) имеем

$$\int\limits_0^x g(\eta)\,d\eta = \sum_k \Bigg(\int\limits_0^1 f(\xi)e^{-2k\pi i\xi}\,d\xi\Bigg)\int\limits_0^x e^{2k\pi i\eta}\,d\eta. \quad (68)$$

По теореме 3 из [19, с. 277] ряд вЁ(68) сходится при любом $x\in[0,1]$ и его сумма есть

$$\sum_k \Bigg(\int\limits_0^1 f(\xi)e^{-2k\pi i\xi}\,d\xi\Bigg)\int\limits_0^x e^{2k\pi i\eta}\,d\eta = \int\limits_0^x f(\eta)\,d\eta. \quad (69)$$

Таким образом, из (68) и (69) получим, что

$$\int\limits_0^x g(\eta)\,d\eta = \int\limits_0^x f(\eta)\,d\eta.$$

Отсюда следует, что $g(x)=f(x)$ для п.в. $x\in[0,1]$, т.е. найдена «сумма» $g(x)$ расходящегося ряда (67).

Так как функция $e^{2k\pi ix}$ есть 1-периодическая функция с равными значениями на концах отрезка $[0,1]$, то с учетом найденной «суммы» ряда (67) получим следующее представление для для правой части формулы (66):

$$u_1(x,t) = \frac{\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\Bigg(\varphi^*\Bigg(\Bigg\{\frac{t+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\Bigg\}\Bigg) - \varphi^*\Bigg(\Bigg\{\frac{t+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\Bigg\}\Bigg)\Bigg)+$$

$$+\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\Bigg(\varphi_*\Bigg(\Bigg\{\frac{t+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\Bigg\}\Bigg) - \varphi_*\Bigg(\Bigg\{\frac{t+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\Bigg\}\Bigg)\Bigg), \quad (70)$$

где $\{\cdot\}$ обозначает дробную часть числа $x\in\mathbb{R}$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $\varphi \in L_1[0,1]$ *и выполняется условие* (5)*. Тогда функция* $u_1(x,t)$*, определенная формулой* (70)*, является обобщенным решением задачи* (1)–(3) *в случае* $\psi(x) \equiv 0$*,* $f(x,t) \equiv 0$*.*

5.2. Формула для обобщенного решения в случае $\varphi = 0$ *и* $f = 0$. В данном разделе речь идет о получении конечной формулы для обобщенного решения (см. (62))

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int\limits_{\gamma_k} \left(e^{\lambda t} \int\limits_0^1 p_2 G(x,\xi,\lambda)\psi(\xi)\,d\xi \right) d\lambda. \tag{71}$$

Используя обозначения леммы 1, получим

$$u_2(x,t) = \sum_k \int\limits_0^1 \operatorname*{res}_{\lambda=\lambda_k} \left(e^{\lambda t} p_2 G(x,\xi,\lambda)\psi(\xi) \right) d\xi = \sum_k \int\limits_0^1 e^{\lambda_k t} p_2 r_k(x,\xi)\psi(\xi)\,d\xi. \tag{72}$$

Далее проводим рассуждения, аналогичные рассуждениям при выводе формул (30) и (65).

На основании леммы 1, формул Виета и аксиомы (A) из (72) получим

$$u_2(x,t) = \sum_k \left(e^{\lambda_k(t+\omega_2 x)} - e^{\lambda_k(t+\omega_1 x)} \right) \int\limits_0^1 \frac{\omega_1\omega_2}{2k\pi i(\omega_2-\omega_1)} \left(e^{-\lambda_k\omega_1\xi} - e^{-\lambda_k\omega_2\xi} \right) \psi(\xi)\,d\xi. \tag{73}$$

Введем обозначение

$$\Psi(x) = \int\limits_0^x \psi(\xi)\,d\xi$$

и проведем в интеграле справа в (73) один раз интегрирование по частям и учтем равенство (29) и аксиомы (A)–(B). Получим

$$\begin{gathered}
u_2(x,t) = \sum_k \left(e^{\lambda_k(t+\omega_2 x)} - e^{\lambda_k(t+\omega_1 x)} \right) \times \\
\times \left(\frac{\omega_1^2\omega_2}{(\omega_2-\omega_1)^2} \int\limits_0^1 \Psi(\xi) e^{-\lambda\omega_1\xi}\,d\xi - \frac{\omega_1\omega_2^2}{(\omega_2-\omega_1)^2} \int\limits_0^1 \Psi(\xi) e^{-\lambda\omega_2\xi}\,d\xi = \right. \\
= \frac{\omega_1^2\omega_2}{(\omega_2-\omega_1)^2} \left(\sum_k e^{\lambda_k(t+\omega_2 x)} \int\limits_0^1 \Psi(\xi) e^{-\lambda_k\omega_1\xi} d\xi - \sum_k e^{\lambda_k(t+\omega_1 x)} \int\limits_0^1 \Psi(\xi) e^{-\lambda_k\omega_1\xi} d\xi \right) - \\
- \frac{\omega_1\omega_2^2}{(\omega_2-\omega_1)^2} \left(\sum_k e^{\lambda_k(t+\omega_2 x)} \int\limits_0^1 \Psi(\xi) e^{-\lambda_k\omega_2\xi}\,d\xi - \sum_k e^{\lambda_k(t+\omega_1 x)} \int\limits_0^1 \Psi(\xi) e^{-\lambda_k\omega_2\xi}\,d\xi \right).
\end{gathered} \tag{74}$$

Далее применяем лемму 2 и аксиому (A). В результате получим

$$\begin{gathered}
u_2(x,t) = \frac{\omega_1\omega_2}{\omega_2-\omega_1} \left(-\sum_k e^{2k\pi i \frac{t+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}} \int\limits_0^1 \Psi^*(\xi) e^{-2k\pi i\xi}\,d\xi + \sum_k e^{2k\pi i \frac{t+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}} \int\limits_0^1 \Psi^*(\xi) e^{-2k\pi i\xi}\,d\xi \right) - \\
- \frac{\omega_1\omega_2}{\omega_2-\omega_1} \left(\sum_k e^{2k\pi i \frac{t+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}} \int\limits_0^1 \Psi_*(\xi) e^{-2k\pi i\xi}\,d\xi - \sum_k e^{2k\pi i \frac{t+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}} \int\limits_0^1 \Psi_*(\xi) e^{-2k\pi i\xi}\,d\xi \right).
\end{gathered} \tag{75}$$

Используя уже найденную «сумму» ряда (67) (в данном случае это будет уже обычная сумма, так как если $f(x) \in W_1^1[0,1]$, то ряд (67) сходится для п.в. $x \in [0,1]$ к функции $f(x)$), получим следующее представление для правой части формулы (75):

$$u_2(x,t) = -\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\Bigg(\Psi^*\left(\left\{\frac{t+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right) - \Psi^*\left(\left\{\frac{t+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right) - \\ - \Psi_*\left(\left\{\frac{t+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right) + \Psi_*\left(\left\{\frac{t+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)\Bigg). \quad (76)$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть $\psi \in L_1[0,1]$ и выполняется условие* (5). *Тогда функция $u_2(x,t)$, определенная формулой* (76), *является обобщенным решением задачи* (1)–(3) *в случае $\varphi(x) \equiv 0$, $f(x,t) \equiv 0$.*

5.3. Формула для обобщенного решения в случае $\varphi = 0$ и $\psi = 0$. В данном разделе речь идет о получении конечной формулы для обобщенного решения (см. (62))

$$u_3(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\sum_k \int_{\gamma_k}\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau\,d\lambda. \quad (77)$$

Используя обозначения леммы 1, получим

$$u_3(x,t) = \sum_k \int_0^t\int_0^1 \operatorname*{res}_{\lambda=\lambda_k}\Big(e^{\lambda(t-\tau)}G(x,\xi,\lambda)f(\xi,\tau)\Big)\,d\xi\,d\tau = \sum_k \int_0^t\int_0^1 e^{\lambda_k(t-\tau)}r_k(x,\xi)f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau. \quad (78)$$

Далее проводим рассуждения, аналогичные рассуждениям при выводе формул (30), (65) и (74).

На основании леммы 1 из (78) получим

$$u_3(x,t) = \sum_k \frac{1}{2k\pi i(\omega_2-\omega_1)}\int_0^t \left(e^{\lambda_k(t-\tau+\omega_2 x)} - e^{\lambda_k(t-\tau+\omega_1 x)}\right)\times \\ \times \int_0^1 \frac{\omega_1\omega_2}{2k\pi i(\omega_2-\omega_1)}\Big(e^{-\lambda_k\omega_1\xi} - e^{-\lambda_k\omega_2\xi}\Big)f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau. \quad (79)$$

Введем обозначение

$$F(x) = \int_0^x f(\xi,\tau)\,d\xi$$

и проведем во внутреннем интеграле справа в (79) один раз интегрирование по частям и учтем равенство (29) и аксиомы (A)–(B). Получим

$$u_3(x,t) = \sum_k \int_0^t \left(e^{\lambda_k(t-\tau+\omega_2 x)} - e^{\lambda_k(t-\tau+\omega_1 x)}\right)\times \\ \times \left(\frac{\omega_1}{(\omega_2-\omega_1)^2}\int_0^1 F(\xi,\tau)e^{-\lambda\omega_1\xi}\,d\xi - \frac{\omega_2}{(\omega_2-\omega_1)^2}\int_0^1 F(\xi,\tau)e^{-\lambda\omega_2\xi}\,d\xi\right) = \\ = \frac{\omega_1}{(\omega_2-\omega_1)^2}\Bigg(\sum_k \int_0^t e^{\lambda_k(t-\tau+\omega_2 x)}\int_0^1 F(\xi,\tau)e^{-\lambda_k\omega_1\xi}d\xi\,d\tau - \\ - \sum_k \int_0^t e^{\lambda_k(t-\tau+\omega_1 x)}\int_0^1 F(\xi,\tau)e^{-\lambda_k\omega_1\xi}\,d\xi\,d\tau\Bigg) -$$

$$-\frac{\omega_2}{(\omega_2-\omega_1)^2}\Bigg(\sum_k\int_0^t e^{\lambda_k(t-\tau+\omega_2 x)}\int_0^1 F(\xi,\tau)e^{-\lambda_k\omega_2\xi}\,d\xi\,d\tau-$$

$$-\sum_k\int_0^t e^{\lambda_k(t-\tau+\omega_1 x)}\int_0^1 F(\xi,\tau)e^{-\lambda_k\omega_2\xi}\,d\xi\,d\tau\Bigg).$$

Далее применяем лемму 2 и аксиомы (A) и (D). В результате получим

$$u_3(x,t)=$$

$$=-\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int_0^t\Bigg(\sum_k e^{2k\pi i\frac{t-\tau+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}}\int_0^1 F^*(\xi,\tau)e^{-2k\pi i\xi}\,d\xi-\sum_k e^{2k\pi i\frac{t-\tau+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}}\int_0^1 F^*(\xi,\tau)e^{-2k\pi i\xi}\,d\xi-$$

$$-\sum_k e^{2k\pi i\frac{t-\tau+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}}\int_0^1 F_*(\xi,\tau)e^{-2k\pi i\xi}\,d\xi+\sum_k e^{2k\pi i\frac{t-\tau+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}}\int_0^1 F_*(\xi,\tau)e^{-2k\pi i\xi}\,d\xi\Bigg)\,d\tau. \quad (80)$$

Используя уже найденную «сумму» ряда (67) (в данном случае это будет уже обычная сумма, так как если $f(x)\in W_1^1[0,1]$, то ряд (67) сходится для п.в. $x\in[0,1]$ к функции $f(x)$), получим следующее представление для правой части формулы (80):

$$u_3(x,t)=-\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int_0^t\Bigg(F^*\left(\left\{\frac{t-\tau+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\right\},\tau\right)-F^*\left(\left\{\frac{t-\tau+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\right\},\tau\right)-$$

$$-F_*\left(\left\{\frac{t-\tau+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\right\},\tau\right)-F_*\left(\left\{\frac{t-\tau+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\right\},\tau\right)\Bigg)\,d\tau. \quad (81)$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть* $f\in L_1(Q_T)$ *и выполняется условиеЁ(5). Тогда функция* $u_3(x,t)$*, определенная формулойЁ(81), является обобщенным решением задачи* (1)–(3) *в случае* $\varphi(x)\equiv 0$, $\psi(x)\equiv 0$.

В заключение данного раздела сформулируем итоговую теорему, в которой дается конечная формула для обобщенного решения задачи (1)–(3).

Теорема 6. *Пусть* $\varphi,\psi\in L_1[0,1]$, $f\in L_1(Q_T)$ *и выполняется условие* (5)*. Тогда функция* $u(x,t)$*, определенная формулой*

$$u(x,t)=\frac{\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\left(\varphi^*\left(\left\{\frac{t+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)-\varphi^*\left(\left\{\frac{t+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)\right)+$$

$$+\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\left(\varphi_*\left(\left\{\frac{t+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)-\varphi_*\left(\left\{\frac{t+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)\right)-$$

$$-\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\left(\Psi^*\left(\left\{\frac{t+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)-\Psi^*\left(\left\{\frac{t+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)-\Psi_*\left(\left\{\frac{t+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)+\Psi_*\left(\left\{\frac{t+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)\right)-$$

$$-\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int_0^t\Bigg(F^*\left(\left\{\frac{t-\tau+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\right\},\tau\right)-F^*\left(\left\{\frac{t-\tau+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\right\},\tau\right)-$$

$$-F_*\left(\left\{\frac{t-\tau+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\right\},\tau\right)-F_*\left(\left\{\frac{t-\tau+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\right\},\tau\right)\Bigg)\,d\tau,$$

является обобщенным решением задачи (1)–(3).

Справедливость теоремы следует из формулы (5) и уже доказанных теоерем 3–5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. — М.: Физматгиз, 1961.
2. *Корнев В. В.* О применении расходящихся рядов в смешанных задачах, не имеющих классического решения// Мат. Междунар. конф. Воронеж. весенняя мат. школа «Понтрягинские чтения–XXXIII. Современные методы теории краевых задач» (Воронеж, 3-9 мая 2022 г.). — Воронеж, 2022. — С. 132–137.
3. *Корнев В. В., Хромов А. П.* Классическое решение смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2019. — *172.* — С. 119—133.
4. *Крылов А. Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
5. *Курдюмов В. П., Хромов А. П., Халова В. А.* Смешанная задача для однородного волнового уравнения с ненулевой начальной скоростью с суммируемым потенциалом// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инф. — 2020. — *20*, № 4. — С. 444–456.
6. *Ломов И. С.* Эффективное применение метода Фурье для построения решения смешанной задачи для телеграфного уравнения// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. мат. киберн. — 2021. — № 4. — С. 37–42.
7. *Ломов И. С.* Обобщенная формула Даламбера для телеграфного уравнения// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2021. — *199.* — С. 66–79.
8. *Ломов И. С.* Эффективное применение метода Фурье к решению смешанной задачи для телеграфного уравнения// Мат. 21 Междунар. Саратов. зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения». — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2022. — С. 178–180.
9. *Ломов И. С.* Новый метод построения обобщенного решения смешанной задачи для телеграфного уравнения// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. мат. киберн. — 2022. — № 3. — С. 33–40.
10. *Ломовцев Ф. Е.* Метод корректировки пробных решений волнового уравнения в криволинейной первой четверти плоскости для минимальной гладкости правой части// Ж. Белорус. гос. ун-та. Мат. Инф. — 2017. — *3.* — С. 38—52.
11. *Ломовцев Ф. Е.* Глобальная теорема корректности по Адамару первой смешанной задачи для волнового уравнения в полуполосе плоскости// Весн. ГрДУ iм. Янкi Купалы. Сер. 2. Мат. Фiз. Iнфарм. Вылiч. тэхн. кiраванне.. — *11*, № 1. — С. 68–82.
12. *Ломовцев Ф. Е.* Первая смешанная задача для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на полупрямой// Ж. Белорус. гос. ун-та. Мат. Инф. — 2021. — *1.* — С. 18—38.
13. *Ломовцев Ф. Е.* Глобальная теорема корректности первой смешанной задачи для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на отрезке// Пробл. физ. мат. техн. — 2022. — *1 (50).* — С. 62–73.
14. *Ломовцев Ф. Е., Лысенко В. Н.* Смешанная задача для общего одномерного волнового уравнения в полуполосе плоскости при нестационарных нехарактеристических вторых производных// Весн. МДУ iм. А. А. Куляшова. Сер. В. Прыродазнаўчыя навукi: мат. фiз. бiялогiя. — 2021. — № 2 (58). — С. 28–55.
15. *Моисеев Е. И., Ломовцев Ф. Е., Новиков Е. Н.* Неоднородное факторизованное гиперболическое уравнение второго порядка в четверти плоскости при полунестационарной факторизованной второй косой производной в граничном условии// Докл. РАН. — 2014. — *459*, № 5. — С. 544.
16. *Муравей Л. А., Петров В. М., Романенков А. М.* О задаче гашения поперечных колебаний продольно движущейся струны// Вестн. Мордов. ун-та. — 2018. — *28*, № 4. — С. 472–485.
17. *Муравей Л. А. Романенков А. М.* Численные методы гашения колебаний движущегося бумажного полотна// Сб. мат. Междунар. конф. «Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы» (Белгород, 25-–29 октября 2021 г.). — Белгород, 2021. — С. 194–196.
18. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.
19. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974.
20. *Рыхлов В. С.* Метод расходящихся рядов решения смешанной задачи для гиперболического уравнения// Сб. мат. Междунар. конф. «XXXII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам». — Симферополь: Полипринт, 2021. — С. 22.

21. *Рыхлов В. С.* Решение начально-граничной задачи для уравнения гиперболического типа со смешанной производной// Мат. 21 Междунар. Саратов. зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения». — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2022. — С. 252–255.
22. *Рыхлов В. С.* О решении начально-граничной задачи для гиперболического уравнения со смешанной производной// Мат. Междунар. конф. Воронеж. весенняя мат. школа «Понтрягинские чтения–XXXIII. Современные методы теории краевых задач» (Воронеж, 3-9 мая 2022 г.). — Воронеж, 2022. — С. 209–212.
23. *Толстов Г. П.* О второй смешанной производной// Мат. сб. — 1949. — *24 (66)*, № 1. — С. 27–51.
24. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. — М.: ИЛ, 1951.
25. *Хромов А. П.* Поведение формального решения смешанной задачи для волнового уравнения// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2016. — *56*, № 2. — С. 239–251.
26. *Хромов А. П.* О классическом решении смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами и нулевой начальной скоростью// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инф.. — *19*, № 3. — С. 280–288.
27. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и функциональные уравнения, связанные с аналогами геометрической прогрессии// Мат. Междунар. конф. Воронеж. весенняя мат. школа «Понтрягинские чтения–XXX. Современные методы теории краевых задач» (Воронеж, 3-9 мая 2019 г.). — Воронеж, 2019. — С. 291–300.
28. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и метод Фурье для волнового уравнения// Мат. 20 Междунар. Саратов. зимней шк. «Современные проблемы теории функций и их приложения». — Саратов: Научная книга, 2020. — С. 433–439..
29. *Хромов А. П. Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача* в кн.: Математика. Механика. № 23. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2021. — С. 63–67.
30. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для волнового уравнения// Мат. 21 Междунар. Саратов. зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения». — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2022. — С. 319–324.
31. *Хромов А. П., Корнев В. В.* Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2019. — *59*, № 2. — С. 286–300.
32. *Хромов А. П., Корнев В. В.* Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения// Тр. ин-та мат. мех. УрО РАН.. — *27*, № 4. — С. 215–238.
33. *Хромов А. П., Корнев В. В.* Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача, не допускающая разделения переменных// в кн.: Тр. Мат. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 60. — Казань, 2021. — С. 325–328.
34. *Шкаликов А. А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях// Тр. семин. им. И. Г. Петровского — 1983. — № 9. — С. 190–229.
35. *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1949.
36. *Archibald F. R., Emslie A. G.* The vibration of a string having a uniform motion along its length// J. Appl. Mech. — 1958. — *25*, № 1. — P. 347–348.
37. *Mahalingam S.* Transverse vibrations of power transmission chains// British J. Appl. Phys. — 1957. — *8*, № 4. — P. 145–148.
38. *Sack R. A.* Transverse oscillations in traveling strings// British J. Appl. Phys. — 1954. — *5*, № 6. — P. 224–226.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Рыхлов Виктор Сергеевич

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

E-mail: `rykhlovvs@yandex.ru`