ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 226 (2023). С. 120–126
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-226-120-126

УДК 517.9

ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ОДНОГО НЕСАМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ

© 2023 г. **Р. Г. ФАРЗУЛЛАЗАДЕ, Х. Р. МАМЕДОВ**

Аннотация. Рассмотрена задача рассеяния для одного класса дифференциальных уравнений второго порядка на полубесконечном интервале с нелинейным спектральным параметром в граничном условии. Определены данные рассеяния задачи и получено фундаментальное уравнение обратной задачи рассеяния.

Ключевые слова: нормализационный многочлен, функция рассеяния, данные рассеяния, фундаментальное уравнение.

SCATTERING PROBLEM FOR ONE NON-SELF-ADJOINT STURM–LIOUVILLE OPERATOR

© 2023 **R. G. FARZULLAZADEH, Kh. R. MAMEDOV**

Abstract. The scattering problem is considered for a class of second-order differential equations on a semi-infinite interval with a nonlinear spectral parameter in the boundary condition. The scattering data of the problem are determined and the fundamental equation of the inverse scattering problem is obtained.

Keywords and phrases: normalization polynomial, scattering function, scattering data, fundamental equation.

AMS Subject Classification: 34L25, 34B07, 34B08

1. Введение. На положительной полуоси $[0,\infty)$ рассмотрим краевую задачу

$$-u'' + q(x)u = \eta^2 u, \tag{1}$$

$$(a + b\eta^2)u'(0) - (c_0 + c_1\eta + c_2\eta^2)u(0) = 0, \tag{2}$$

где $q(x)$ — вещественнозначная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^\infty (1+x)|q(x)|dx < \infty, \tag{3}$$

η — спектральный параметр, a, b, c_j $(j = 0,1,2)$ — вещественные числа, $ac_0 > 0$, $b \geqslant 0$.

Краевые задачи со спектральным параметром в граничных условиях встречаются как в математических задачах, так и в их приложениях. Физические приложения этих типов краевых задач на полупрямой $[0,\infty)$ приведены в [8, 9, 14, 15].

В данной работе исследуется задача рассеяния для краевой задачи (1)–(3). Отметим, что прямая и обратная задача рассеяния для краевой задачи в случае $b = c_1 = c_2 = 0$ полностью решена в [1, 2, 6]. Также в [4, 5, 10–13, 16] исследована прямая и обратная задача рассеяния для уравнения (1) со спектральным параметром в граничном условии.

В зависимости от спектрального параметра в граничном условии встречаются самосопряженные и несамосопряженные случаи. Поэтому при решении задачи необходимо использовать разные методы.

Обозначим через $e(x,\eta)$ решение уравнения (1), обладающее асимптотикой

$$\lim_{x\to\infty} e^{-i\eta x} e(x,\eta) = 1, \quad \operatorname{Im}\eta \geqslant 0.$$

Известно (см. [6]), что если выполнено условие (3), то при всех $\operatorname{Im}\eta \geqslant 0$ существует единственное решение $e(x,\eta)$, регулярное по η в полуплоскости $\operatorname{Im}\eta > 0$ и непрерывное на вещественной оси, которое может быть представлено в виде

$$e(x,\eta) = e^{i\eta x} + \int_x^\infty K(x,t) e^{i\eta t} dt. \tag{4}$$

Ядро $K(x,t)$ удовлетворяет неравенству

$$|K(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right) \exp\left\{\sigma_1(x) - \sigma_1\left(\frac{x+t}{2}\right)\right\}, \tag{5}$$

а также условию

$$K(x,x) = \frac{1}{2}\int_x^\infty q(t)dt, \tag{6}$$

где

$$\sigma(x) \equiv \int_x^\infty |q(t)|dt, \quad \sigma_1(x) \equiv \int_x^\infty \sigma(t)dt.$$

Функция $e(x,\eta)$ обладает следующими свойствами в области $\operatorname{Im}\eta \geqslant 0$ (см. [6]):

$$|e(x,\eta)| \leqslant \exp\{-\operatorname{Im}\eta x + \sigma_1(x)\}, \tag{7}$$

$$|e(x,\eta) - e^{i\eta x}| \leqslant \left\{\sigma_1(x) - \sigma_1\left(x + \frac{1}{|\eta|}\right)\right\} \exp\{-\operatorname{Im}\eta x + \sigma_1(x)\}, \tag{8}$$

$$|e'(x,\eta) - i\eta e^{i\eta x}| \leqslant \sigma(x) \exp\{-\operatorname{Im}\eta x + \sigma_1(x)\}. \tag{9}$$

Используя указанные выше свойства, можно показать, что для вещественных $\eta \neq 0$ функции $e(x,\eta)$ и $\overline{e(x,\eta)} = e(x,-\eta)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1), а их вронскиан не зависит от переменной x и равен $2i\eta$ (см. [6, с. 168]):

$$W\{e(x,\eta), \overline{e(x,\eta)}\} = e'(x,\eta)\overline{e(x,\eta)} - e(x,\eta)\overline{e'(x,\eta)} = 2i\eta. \tag{10}$$

Обозначим через $\psi(x,\eta)$ решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\psi(0,\eta) = a + b\eta^2, \quad \psi'(0,\eta) = c_0 + c_1\eta + c_2\eta^2. \tag{11}$$

Пусть

$$E(\eta) \equiv (a + b\eta^2)e'(0,\eta) - (c_0 + c_1\eta + c_2\eta^2)e(0,\eta),$$
$$E_1(\eta) \equiv (a + b\eta^2)e'(0,-\eta) - (c_0 + c_1\eta + c_2\eta^2)e(0,-\eta).$$

2. Данные рассеяния. Введем данные рассеяния для краевой задачи (1)–(3).

Лемма 1. *Для вещественных $\eta \neq 0$ выполняется неравенство $E(\eta) \neq 0$.*

Доказательство. Предположим противное: пусть $E(\eta_0) = 0$ для $\eta_0 \in \mathbb{R}$, $\eta_0 \neq 0$. Тогда

$$e'(0,\eta_0) = \frac{c_0 + c_1\eta_0 + c_2\eta_0^2}{a + b\eta_0^2} e(0,\eta_0). \tag{12}$$

Из (10), (12) имеем

$$\frac{c_0+c_1\eta_0+c_2\eta_0^2}{a+b\eta_0^2}e(0,\eta_0)\overline{e(0,\eta_0)}-\frac{c_0+c_1\eta_0+c_2\eta_0^2}{a+b\eta_0^2}\overline{e(0,\eta_0)}e(0,\eta_0)=2i\eta_0,$$

$$\left[\frac{c_0+c_1\eta_0+c_2\eta_0^2}{a+b\eta_0^2}-\frac{c_0+c_1\eta_0+c_2\eta_0^2}{a+b\eta_0^2}\right]|e(0,\eta_0)|^2=2i\eta_0,$$

или $0=2i\eta_0$; при $\eta_0\neq 0$ противоречие. □

Лемма 2. *Для вещественных $\eta\neq 0$ справедливо тождество*

$$\frac{2i\eta\psi(x,\eta)}{E(\eta)}=e(x,-\eta)-S(\eta)e(x,\eta), \tag{13}$$

где

$$S(\eta)=\frac{E_1(\eta)}{E(\eta)},\quad |S(\eta)|=1. \tag{14}$$

Доказательство. Поскольку функции $e(x,\eta)$ и $e(x,-\eta)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1) для всех вещественных $\eta\neq 0$, можно записать

$$\psi(x,\eta)=d_1(\eta)e(x,\eta)+d_2(\eta)e(x,-\eta). \tag{15}$$

Используя (10) и (11), получим

$$d_1(\eta)=-\frac{E_1(\eta)}{2i\eta},\quad d_2(\eta)=\frac{E(\eta)}{2i\eta}.$$

Подставляя эти соотношения в (15) и учитывая неравенство $E(\eta)\neq 0$, $\eta\neq 0$, получаем (13). Здесь $S(\eta)$ выражается формулой (14). Поскольку для вещественных $\eta\neq 0$ имеем

$$\overline{E(\eta)}=(a+b\eta^2)\overline{e'(0,\eta)}-(c_0+c_1\eta+c_2\eta^2)\overline{e(0,\eta)}=$$
$$=(a+b\eta^2)e'(0,-\eta)-(c_0+c_1\eta+c_2\eta^2)e(0,-\eta)=E_1(\eta),$$

ясно, что $|S(\eta)|=1$. □

Функция $S(\eta)$ называется *функцией рассеяния* краевой задачи (1)–(3).

Лемма 3. *Функция $E(\eta)$ может иметь только конечное число нулей в полуплоскости $\operatorname{Im}\eta>0$. Функция $\eta[E(\eta)]^{-1}$ ограничена в окрестности точки $\eta=0$.*

Доказательство. Поскольку $E(\eta)\neq 0$ для $\eta\in\mathbb{R}$, $\eta\neq 0$, точка $\eta=0$ является возможным вещественным нулем функции $E(\eta)$. Из аналитичности функции $E(\eta)$ в верхней полуплоскости следует, что ее нули образуют не более чем счетное множество. Покажем, что это множество ограничено. Предположим, что $E(\eta_k)=0$ и $|\eta_k|\to\infty$ при $k\to\infty$. Тогда получим

$$e'(0,\eta_k)=\frac{c_0+c_1\eta_k+c_2\eta_k^2}{a+b\eta_k^2}e(0,\eta_k). \tag{16}$$

Для $x=0$ и $\eta=\eta_k$ из (9) следует, что

$$\left|\frac{c_0+c_1\eta_k+c_2\eta_k^2}{a+b\eta_k^2}e(0,\eta_k)-i\eta_k\right|\leqslant\sigma(0)\exp\{\sigma_1(0)\}.$$

Отсюда

$$|\eta_k|\leqslant\left|\frac{c_0+c_1\eta_k+c_2\eta_k^2}{a+b\eta_k^2}e(0,\eta_k)\right|+\sigma(0)\exp\{\sigma_1(0)\}.$$

Поскольку $|\eta_k|\to\infty$ при $k\to\infty$, заключаем из (7) и (8), что $e(0,\eta_k)=1$ при $k\to\infty$. Итак, правая часть последнего неравенства имеет конечный предел. Полученное противоречие показывает, что множество $\{\eta_k\}$ ограничено. Следовательно, нули функции $E(\eta)$ образуют не более чем счетное и ограниченное множество, имеющее $\eta=0$ в качестве возможной предельной точки.

Теперь покажем, что функция $E(\eta)$ может иметь конечное число нулей в полуплоскости $\operatorname{Im}\eta > 0$. Предположим обратное, т.е. $E(\eta)$ имеет бесконечно много нулей $\eta = \eta_n$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда функции $u_n = u(x, \eta_n)$ удовлетворяют уравнению

$$-u_n'' + q(x)u_n = \eta_n^2 u_n \tag{17}$$

и граничным условиям

$$(a + b\eta_n^2)u_n'(0) - (c_0 + c_1\eta_n + c_2\eta_n^2)u_n(0) = 0. \tag{18}$$

Умножим обе части (17) на $\overline{u_n}$ и проинтегрируем это уравнение по x от 0 до ∞. В связи с этим, используя (18) и интегрируя по частям, имеем

$$\eta_n^2 - \frac{c_0 + c_1\eta_n + c_2\eta_n^2}{a + b\eta_n^2}|u_n(0)|^2 - L(u_n, u_n) = 0, \tag{19}$$

где

$$L(u_n, u_n) = \int\limits_0^\infty (|u_n'|^2 + q(x)|u_n|^2)dx \equiv \Omega(u_n), \quad \langle u_n, u_n\rangle = 1.$$

Уравнение (19) имеет хотя бы один вещественный корень, а вещественный корень функции $E(\eta)$ может быть только нулем. Поэтому из (19) получаем

$$\frac{c_0}{a}|u_n(0)|^2 = -\Omega(u_n), \quad n = 1, 2, \dots .$$

Поскольку $ac_0 > 0$, имеем $\Omega(u_n) < 0$, $n = 1, 2, \dots$.

Из асимптотических формул (при $x \to \infty$) для решений уравнения (1) следует, что система функций $\{u_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ линейно независима (см. [7, с. 327]).

Теперь построим последовательность функций

$$v_j(x) = \alpha_j u_j(x) + \beta_j u_{j+1}(x), \quad j = 1, 2, \dots,$$

где α_j, β_j $(j = 1, 2, \dots)$ — комплексные числа, которые можно выбрать так, чтобы выполнялось условие $v_j(0) = 0$. В этом случае функции $v_j(x)$ линейно независимы. Таким образом, выполняются соотношения

$$-v_n'' + q(x)v_n = \eta_n v_n, \quad v_n(0) = 0. \tag{20}$$

Обозначим через L_η оператор в пространстве $L_2(0, \infty)$, действующий по правилу $L_\eta u = -u'' + q(x)u$ в области

$$D(L_\eta) = \Big\{u(x) \;\Big|\; u'(x) \in AC[0, \infty),\ -u'' + q(x)u \in L_2(0, \infty),\ u(0) = 0\Big\}.$$

Ясно, что $v_n(x) \in D(L_\eta)$ и $\langle L_\eta v_n, v_n\rangle < 0$. Получаем, что оператор L_η имеет лишь отрицательные собственные значения, а их число бесконечно. Но это невозможно в силу условия (3) на $q(x)$ (см. [6]); противоречие. Отсюда следует, что функция $E(\eta)$ может иметь конечное число нулей в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\eta > 0$.

Аналогично (см. [6, лемма 3.1.6]) получаем, что функция $\eta[E(\eta)]^{-1}$ ограничена в области $\big\{\eta \;\big|\; |\eta| \leqslant \varepsilon,\ \operatorname{Im}\eta \geqslant 0\big\}$. □

Следствие 1. *Нули функций $E(\eta)$ и $E_1(\eta)$ комплексно сопряжены, причем число этих нулей равно.*

Доказательство. Согласно 3 функция $E(\eta)$ имеет конечное число нулей η_j, $j = 1, 2, \dots, n$, в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\eta > 0$. Из свойств

$$\overline{e(0, \eta_j)} = e(0, -\overline{\eta_j}), \quad \overline{e'(0, \eta_j)} = e'(0, -\overline{\eta_j})$$

функции $e(x, \eta)$ получаем

$$\overline{E(\eta_j)} = \big(a + b\overline{\eta_j^2}\big)e'(0, -\overline{\eta_j}) - \big(c_0 + c_1\overline{\eta_j} + c_2\overline{\eta_j^2}\big)e(0, -\overline{\eta_j}) = E_1(\overline{\eta_j}), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Следовательно, нули функций $E(\eta)$ и $E_1(\eta)$ комплексно сопряжены, и число этих нулей равно. □

Лемма 4. *Из свойств функции $E(\eta)$ при $|\eta| \to \infty$ получаем*

$$S(\eta) = -1 + O\left(\frac{1}{\eta}\right).$$

Таким образом, для $\operatorname{Im}\eta \geqslant 0$ получаем $-1 - S(\eta) \in L_2(-\infty, \infty)$ и, следовательно, функция

$$F_s(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \big[-1 - S(\eta)\big] e^{i\eta x} d\eta$$

также принадлежит пространству $L_2(-\infty, \infty)$.

Известно (см. [7, с. 448]), что для любых $\theta > 0$ и $\delta > 0$ уравнение (1) имеет такое решение $\hat{e}(x, \eta)$, что при $x \to \infty$

$$\hat{e}(x, \eta) = e^{-i\eta x}\big[1 + o(1)\big]$$

равномерно в области $\operatorname{Im}\eta \geqslant \theta$, $|\eta| \geqslant \delta$. Введем обозначение

$$p_j(x) = i \operatorname*{Res}_{\eta=\eta_j} \frac{\hat{E}(\eta)}{E(\eta)} e^{i\eta x}, \tag{21}$$

где $\hat{E}(\eta) = (a + b\eta^2)\hat{e}'(0, \eta) - (c_0 + c_1\eta + c_2\eta^2)\hat{e}(0, \eta)$ и $j = 1, 2, \ldots, n$.

Согласно [3] (см. также [7, с. 441]) будем называть многочлен

$$P_j(x) = e^{-i\eta_j x} p_j(x), \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

степени $k_j - 1$ *нормализационным многочленом* для краевой задачи (1)–(3), где k_j — кратность числа η_j, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Множество величин $\big\{S(\eta);\ \eta_j;\ P_j(x)\ (j = 1, 2, \ldots, n)\big\}$ называется *данными рассеяния* краевой задачи (1)–(3). Обратная задача рассеяния для краевой задачи (1)–(3) состоит в восстановлении коэффициента $q(x)$ по данным рассеяния.

Аналогично, для решений $e(x, \eta)$ и $\hat{e}(x, \eta)$ получим

$$\frac{2i\eta\psi(x, \eta)}{E(\eta)} = \hat{e}(x, \eta) - \frac{\hat{E}(\eta)}{E(\eta)} e(x, \eta). \tag{22}$$

3. Фундаментальное уравнение. Фундаментальное уравнение играет важную роль в решении обратной задачи теории рассеяния. Воспользуемся тождеством (13), полученным в лемме 2. Подставляя (4) в (13), перепишем это тождество в следующем виде:

$$\frac{2i\eta\psi(x, \eta)}{E(\eta)} - e^{i\eta x} - e^{-i\eta x} =$$
$$= \big[-1 - S(\eta)\big]\left\{e^{i\eta x} + \int\limits_x^{\infty} K(x, t)e^{i\eta t} dt\right\} + \int\limits_x^{\infty} K(x, t)e^{-i\eta t} dt + \int\limits_x^{\infty} K(x, t)e^{i\eta t} dt.$$

Умножая обе части последнего соотношения на $\dfrac{1}{2\pi}e^{i\eta\tau}$ $(\tau > x)$ и интегрируя по η от $-\infty$ до ∞, получим

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(x, \eta)\left[\frac{i\eta}{E(\eta)} - \frac{1}{b\eta}\right] e^{i\eta\tau} d\eta + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\psi(x, \eta)}{b\eta} - \cos\eta x\right] e^{i\eta\tau} d\eta =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \big[-1 - S(\eta)\big] e^{i\eta(x+\tau)} d\eta + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{\big[-1 - S(\eta)\big]\int\limits_x^{\infty} K(x, t)e^{i\eta(t+\tau)} dt\right\} d\eta +$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{\int\limits_x^{\infty} K(x, t)e^{-i\eta t} dt\right\} d\eta. \tag{23}$$

Поскольку $K(x,t)=0$ при $x>t$, то в правой части (23) получаем

$$F_s(x+\tau)+K(x,\tau)+\int\limits_x^\infty K(x,t)F_s(t+\tau)dt, \tag{24}$$

где

$$F_s(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\big[-1-S(\eta)\big]e^{i\eta x}d\eta.$$

Учитывая (22) в первом интеграле (23), находим

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(x,\eta)\left[\frac{i\eta}{E(\eta)}-\frac{1}{b\eta}\right]e^{i\eta\tau}d\eta=i\sum_{\operatorname{Im}\eta>0}\operatorname*{Res}_{\eta=\eta_j}\left[\hat{e}(x,\eta)-\frac{\hat{E}(\eta)}{E(\eta)}e(x,\eta)-\frac{2i}{b\eta}\psi(x,\eta)\right]e^{i\eta\tau}.$$

Очевидно, что для $\operatorname{Im}\eta>0$ функция $\hat{e}(x,\eta)$ голоморфна и $\psi(x,\eta)$ — целая функция переменной η. Согласно лемме 3 получим

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(x,\eta)\left[\frac{i\eta}{E(\eta)}-\frac{1}{b\eta}\right]e^{i\eta\tau}d\eta&=\\ =-i\left\{\sum_{\operatorname{Im}\eta>0}\operatorname*{Res}_{\eta=\eta_j}\frac{\hat{E}(\eta)}{E(\eta)}e^{i\eta(x+\tau)}\right\}-i\int\limits_x^\infty K(x,t)\left\{\operatorname*{Res}_{\eta=\eta_j}\frac{\hat{E}(\eta)}{E(\eta)}e^{i\eta(t+\tau)}\right\}dt&=\\ =-\sum_{j=1}^n p_j(x+\tau)-\int\limits_x^\infty K(x,t)\sum_{j=1}^n p_j(t+\tau)dt,&\end{aligned} \tag{25}$$

где $p_j(x)$ определена формулой (21). Следовательно, учитывая (24) и (25), для $\tau>x$ из (23) получаем соотношение

$$-\sum_{j=1}^n p_j(x+\tau)-\int\limits_x^\infty K(x,t)\sum_{j=1}^n p_j(t+\tau)dt=F_s(x+\tau)+K(x,\tau)+\int\limits_x^\infty K(x,t)F_s(t+\tau)dt.$$

Наконец, получаем фундаментальное уравнение

$$F(x+\tau)+K(x,\tau)+\int\limits_x^\infty K(x,t)F(t+\tau)dt=0,\quad x<\tau<\infty, \tag{26}$$

где

$$F(x)=\sum_{j=1}^n p_j(x)+F_s(x). \tag{27}$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Для каждого фиксированного* $x\geqslant 0$ *ядро* $K(x,t)$ *интегрального представления* (4) *удовлетворяет фундаментальному уравнению* (26).

Интегральное уравнение (26) называется фундаментальным уравнением, или уравнением Гельфанда—Левитана—Марченко обратной задачи теории рассеяния для краевой задачи (1)–(3).

Таким образом, в данной работе для одной несамосопряженной краевой задачи определена данные рассеяния и получена фундаментальное уравнение, играющее важную роль при решении обратной задачи рассеяния.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Левитан Б. М.* К решению обратной задачи квантовой теории рассеяния// Мат. заметки. — 1975. — *17*, № 4. — С. 611–624.
2. *Левитан Б. М.* Обратные задачи Штурма—Лиувилля. — М.: Наука, 1984.
3. *Лянце В. Э.* Аналог обратной задачи теории рассеяния для несамосопряженного оператора// Мат. сб. — 1967. — *72*, № 4. — С. 537–557.
4. *Мамедов Х. Р.* Единственность решения обратной задачи теории рассеяния для оператора Штурма—Лиувилля со спектральным параметром в граничном условии// Мат. заметки. — 2003. — *74*, № 1. — С. 142–146.
5. *Мамедов Х. Р., Демирбилек У.* Об обратной задаче рассеяния для одного класса операторов Штурма—Лиувилля// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2021. — *200*. — С. 81–86.
6. *Марченко В. А.* Операторы Штурма—Лиувиля и их приложения. — Киев: Наукова думка, 1977.
7. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.
8. *Юрко В. А.* Обратная задача для пучков дифференциальных операторов// Мат. сб. — 2000. — *191*, № 10. — С. 137–160.
9. *Cohen D. S.* An integral transform associated with boundary conditions containing an eigenvalue parameter// SIAM J. Appl. Math. — 1966. — *14*. — P. 1164–1175.
10. *Col A., Mamedov Kh. R.* On an inverse scattering problem for a class of Dirac operators with spectral parameter in the boundary condition// J. Math. Anal. Appl. — 2012. — *393*. — P. 470–478.
11. *Mamedov Kh. R.* On the inverse problem for Sturm-Liouville operator with a nonlinear spectral parameter in the boundary condition// J. Korean Math. Soc. — 2009. — *46*. — P. 1243–1254.
12. *Mamedov Kh. R., Kosar P. A.* Inverse scattering problem for Sturm–Liouville operator with a nonlinear dependence on the spectral parameter in the boundary condition// 2011. — *34*, № 2. — P. 231–241.
13. *Mamedov Kh. R., Menken H.* On the inverse problem of scattering theory for a differential operator of the second order// Funct. Anal. Appl. — 2004. — *197*. — P. 185–194.
14. *McLaughlin J. R., Polyakov P. L.* On the uniqueness of a spherically symmetric speed of sound from transmission eigenvalues// J. Differ. Equations. — 1994. — *107*. — P. 351–382.
15. *Megrabov A. G.* Forward and Inverse Problems for Hyperbolic, Elliptic and Mixed Type Equations. — Boston–Utrecht: VSP, 2003.
16. *Yang Q., Wang W.* Asymptotic behavior of a discontinuous differential operator with transmission conditions// Math. Appl. — 2011. — *24*. — P. 15–24.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Фарзуллазаде Рамин Галиб оглы
Ленкоранский государственный университет, Ленкорань, Азербайджан
E-mail: framin1992@mail.ru

Мамедов Ханлар Рашид
Igdir University, Igdir, Turkey
E-mail: hanlar.residoglu@igdir.edu.tr