ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 226 (2023). С. 127–137
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-226-127-137

УДК 517.95, 517.986.7

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ГЕРАСИМОВА—КАПУТО. СЕКТОРИАЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ

© 2023 г. **В. Е. ФЕДОРОВ, Т. А. ЗАХАРОВА**

Аннотация. Исследуются начальные задачи для квазилинейных уравнений с дробными производными Герасимова—Капуто в банаховых пространствах с линейной частью, обладающей аналитическим в секторе разрешающим семейством операторов. Нелинейный оператор предполагается локально липшицевым. Рассмотрены как уравнения, разрешенные относительно старшей производной, так и уравнения, содержащие вырожденный линейный оператор при ней. Полученная теорема об однозначной разрешимости задачи Коши использована для исследования однозначной разрешимости задачи Шоуолтера—Сидорова для вырожденных уравнений. Абстрактные результаты использованы при рассмотрении начально-краевой задачи для уравнения в частных производных, не разрешимого относительно старшей производной дробного порядка по времени.

Ключевые слова: квазилинейное уравнение, дробная производная Герасимова—Капуто, секториальный оператор, задача Коши, начально-краевая задача.

QUASILINEAR EQUATIONS WITH FRACTIONAL GERASIMOV–CAPUTO DERIVATIVE. SECTORIAL CASE

© 2023 **V. E. FEDOROV, T. A. ZAKHAROVA**

Abstract. We study initial-value problems for quasilinear equations with Gerasimov–Caputo fractional derivatives in Banach spaces whose linear part has an analytic resolving family of operators in the sector. The nonlinear operator is assumed to be a locally Lipschitz operator. We consider equations that are solved with respect to the highest derivative and equations containing a degenerate linear operator acting on the highest derivative. The theorem on the unique solvability of the Cauchy problem proved in the paper is used for the study of the unique solvability of the Showalter–Sidorov problem for degenerate equations. Abstract results are applied to the initial-boundary-value problem for partial differential equations that are not solvable with respect to the highest fractional derivative in time.

Keywords and phrases: quasilinear equation, Gerasimov–Caputo fractional derivative, sectorial operator, Cauchy problem, initial boundary value problem.

AMS Subject Classification: 35R11, 34G20, 34A08

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для ведущих научных школ (проект НШ-2708.2022.1.1), Российского фонда фундаментальных исследований (проект 21-51-54003) и Вьетнамской Академии науки и технологии (проект QTRU 01-01/21-22).

1. Введение. С середины XX в. уравнения, не разрешимые относительно старшей производной, привлекают повышенный интерес исследователей (см. [2, 3, 7, 14, 16, 17, 26–28]). Помимо работ о вырожденных (т.е. имеющих вырожденный линейный оператор при старшей производной) уравнений целых порядков в последние годы появляется большое количество работ, касающихся вырожденных уравнений с дробными производными (см. работы [5, 21] и библиографию в них). Отметим работы, в которых исследуются вырожденные линейные [4, 9–11] и квазилинейные [6, 22, 23] уравнения с дробными производными Герасимова—Капуто или Римана—Лиувилля, в которых спектр пары линейных операторов ограничен. Более широким является класс вырожденных уравнений, в которых пара линейных операторов секториальна (см. [1, 8, 12, 13]). В этом случае квазилинейное уравнение рассматривалось только в специальном случае, когда целая часть порядков младших дробных производных сопадает с целой частью порядка старшей производной Римана—Лиувилля (см. [18, 19]).

В данной работе рассматривается квазилинейное уравнение

$$D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t) + N\big(t, D_t^{\alpha_1}x(t), D_t^{\alpha_2}x(t), \dots, D_t^{\alpha_n}x(t)\big), \tag{1}$$

с произвольными, в том числе отрицательными α_k, $k = 1, 2, \dots, n$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leqslant m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, D_t^β — производная Римана—Лиувилля при $\beta > 0$ и интеграл Римана—Лиувилля при $\beta < 0$. Предполагается, что пара линейных замкнутых операторов (L, M), действующих из банахова пространства $\mathcal{X}$ в банахово пространство $\mathcal{Y}$, порождает аналитическое в секторе разрешающее семейство операторов соответствующего линейного однородного уравнения (см. [12, 13]; для краткости такая пара иногда называется секториальной), $\ker L \neq \{0\}$, X — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^n$, $N : X \to \mathcal{X}$. Для уравнения (1) исследована однозначная разрешимость задачи Шоуолтера—Сидорова

$$D_t^{\alpha-m+k}Lx(t_0) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

В разделе 2 приведены предварительные результаты, используемые в работе далее. В разделе 3 получена теорема об однозначной разрешимости задачи Коши для невырожденного уравнения, т.е. для уравнения (1) в случае, когда $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, $L = I$, M порождает разрешающее семейство операторов невырожденного линейного уравнения. Раздел 4 начинается с изложения полученных ранее результатов о секториальных парах операторов (см. [12, 13]), после чего доказаны четыре варианта теоремы об однозначной разрешимости задачи Шоуолтера—Сидорова для вырожденного уравнения (1). В первых двух вариантах нелинейный оператор действует в подпространство без вырождения, при этом используются различные условия на линейные операторы. В третьем и четвертом вариантах не содержится ограничений на образ нелинейного оператора, но предполагается его зависимость только от элементов подпространства без вырождения. В этом разделе также отмечено, что аналогичным образом может быть исследована разрешимость задачи Коши, но в отличие от задачи Шоуолтера—Сидорова, она является переопределенной, и условия ее разрешимости будут содержать условия согласования начальных данных с правой частью уравнения. В последнем разделе 5 начально-краевая задача для вырожденного квазилинейного уравнения в частных производных с дробными производными по времени редуцирована к задаче Шоуолтера—Сидорова для абстрактного уравнения (1).

2. Невырожденное линейное уравнение. Обозначим при $\beta > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$,

$$J_t^\beta h(t) := \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\beta-1} h(s)ds, \quad t > t_0.$$

Пусть $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, D_t^m — обычная производная порядка $m \in \mathbb{N}$, D_t^α — дробная производная Герасимова — Капуто:

$$D_t^\alpha h(t) := D_t^m J_t^{m-\alpha} \left(h(t) - \sum_{k=0}^{m-1} h^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!} \right).$$

Для $\beta < 0$ введем обозначение $D_t^\beta h(t) := J_t^{-\beta} h(t)$.

Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство; обозначим через $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ банахово пространство всех линейных операторов на $\mathcal{Z}$, а через $\mathcal{Cl}(\mathcal{Z})$ — множество всех линейных замкнутых операторов, плотно определенных в пространстве $\mathcal{Z}$, действующих в $\mathcal{Z}$. Снабдим область определения D_A оператора $A \in \mathcal{Cl}(\mathcal{Z})$ нормой графика

$$\|\cdot\|_{D_A} := \|\cdot\|_{\mathcal{Z}} + \|A\cdot\|_{\mathcal{Z}}.$$

В силу замкнутости A множество D_A с такой нормой является банаховым пространством.

Будем использовать обозначения

$$\mathbb{R}_+ := \{c \in \mathbb{R} : c > 0\}, \quad \mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}, \quad S_{\theta_0,a_0} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - a_0)| < \theta_0,\ \lambda \neq a_0\},$$
$$\Sigma_\varphi := \{\tau \in \mathbb{C} : |\arg\tau| < \varphi,\ \tau \neq 0\},$$

$R_\mu(A) := (\mu I - A)^{-1}$ — резольвента оператора A.

При $\theta_0 \in (0, \pi/2)$, $a_0 \geqslant 0$ обозначим через $\mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ класс операторов $A \in \mathcal{Cl}(\mathcal{Z})$, удовлетворяющих следующим условиям:

(i) при всех $\lambda \in S_{\theta_0,a_0}$ выполняется условие $\lambda^\alpha \in \rho(A) := \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})\}$;

(ii) для каждого $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$ и $a > a_0$ найдется такая константа $K(\theta, a) > 0$, что

$$\|R_{\lambda^\alpha}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \frac{K(\theta, a)}{|\lambda^{\alpha-1}(\lambda - a)|}$$

для всех $\lambda \in S_{\theta,a}$.

Здесь и далее под дробной степенью комплексного числа λ^α подразумевается значение главной ветви степенной функции.

Замечание 1. В [15, 25] было показано, что линейный замкнутый плотно определенный оператор принадлежит классу $\mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, если и только если он порождает аналитическое в секторе $\Sigma_{\theta_0-\pi/2}$ разрешающее семейство операторов уравнения $D_t^\alpha z(t) = Az(t)$.

Лемма 1 (см. [8]). *Пусть $\alpha > 0$, $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $\beta \in \mathbb{R}$,*

$$Z_\beta(t) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \mu^{\alpha-1-\beta} R_{\mu^\alpha}(A) e^{\mu t} d\mu, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_- \cup \Gamma_0,$$

$$\Gamma_\pm = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = a + re^{\pm i\theta},\ r \in (\delta, \infty)\}, \quad \Gamma_0 = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = a + \delta e^{i\varphi},\ \varphi \in (-\theta, \theta)\}$$

при некоторых $\delta > 0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$. Тогда семейство $\{Z_\beta \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ аналитически продолжимо в сектор $\Sigma_{\theta_0-\pi/2}$ и при любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ найдется такое $C_\beta = C_\beta(\theta, a)$, что для всех $t \in \Sigma_{\theta-\pi/2}$

$$\|Z_\beta(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant C_\beta(\theta, a) e^{a\Re t}(|t|^{-1} + a)^{-\beta}, \quad \beta \leqslant 0, \tag{2}$$

$$\|Z_\beta(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant C_\beta(\theta, a) e^{a\Re t}|t|^{\beta}, \quad \beta > 0. \tag{3}$$

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + f(t), \quad t \in (t_0, T], \tag{4}$$

с заданной функцией $f \in C([t_0, T]; \mathcal{Z})$. Решением задачи Коши

$$z^{(k)}(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{5}$$

для уравнения (4) называется такая функция $z \in C((t_0, T]; D_A) \cap C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})$, что $D_t^\alpha z \in C((t_0, T]; \mathcal{Z})$, выполняются условия (5) и при всех $t \in (t_0, T]$ — равенство (4).

Теорема 1 (см. [8]). *Пусть $\alpha > 0$, $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $f \in C([t_0, T]; D_A)$. Тогда при любых $z_0, z_1, \ldots, z_{m-1} \in D_A$ функция*

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Z_k(t - t_0) z_k + \int_{t_0}^{t} Z_{\alpha-1}(t - s) f(s) ds$$

является единственным решением задачи (4), (5).

3. Невырожденное квазилинейное уравнение. Пусть $m-1<\alpha\leqslant m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$, $\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_n<\alpha$, Z — открытое множество в $\mathbb{R}\times\mathcal{Z}^n$, $B:Z\to\mathcal{Z}$, $z_k\in\mathcal{Z}$, $k=0,1,\dots,m-1$, $t_0\in\mathbb{R}$. Решением задачи Коши

$$z^{(k)}(t_0)=z_k,\quad k=0,1,\dots,m-1, \tag{6}$$

для квазилинейного уравнения

$$D_t^\alpha z(t)=Az(t)+B\big(t,D_t^{\alpha_1}z(t),D_t^{\alpha_2}z(t),\dots,D_t^{\alpha_n}z(t)\big) \tag{7}$$

на отрезке $[t_0,t_1]$ будем называть такую функцию $z\in C((t_0,t_1];D_A)\cap C^{m-1}([t_0,t_1];\mathcal{Z})$, что

$$D_t^\alpha z\in C((t_0,t_1];\mathcal{Z}),\quad D_t^{\alpha_k}z\in C([t_0,t_1];\mathcal{Z}),\quad k=1,2,\dots,n,$$

выполняются условия (6), при $t\in(t_0,t_1]$ выполняются включение

$$(t,D_t^{\alpha_1}z(t),D_t^{\alpha_2}z(t),\dots,D_t^{\alpha_n}z(t))\in Z$$

и равенство (7).

Отметим, что на знаки α_k, $k=1,2,\dots,n$, ограничений не предполагается, при $\alpha_k<0$ нелинейный оператор зависит от дробного интеграла $J_t^{-\alpha_k}z(t)$.

Введем обозначения

$$\overline{x}:=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathcal{Z}^n,\quad S_\delta(\overline{x})=\big\{\overline{y}\in\mathcal{Z}^n:\|y_l-x_l\|_{\mathcal{Z}}\leqslant\delta,\ l=1,2,\dots,n\big\}.$$

Используя начальные данные $z_0,z_1,\dots,z_{m-1}$, определим

$$\widetilde{z}(t)=z_0+(t-t_0)z_1+\frac{(t-t_0)^2}{2!}z_2+\dots+\frac{(t-t_0)^{m-1}}{(m-1)!}z_{m-1},\quad \widetilde{z}_k=D_t^{\alpha_k}\big|_{t=t_0}\widetilde{z}(t),\quad k=1,2,\dots,n.$$

Отображение $B:Z\to\mathcal{Z}$ называется локально липшицевым по $\overline{x}$, если при любом $(t,\overline{x})\in Z$ существуют такие $\delta>0$, $q>0$, что $[t-\delta,t+\delta]\times S_\delta(\overline{x})\subset Z$, и при всех $(s,\overline{y}),(s,\overline{v})\in[t-\delta,t+\delta]\times S_\delta(\overline{x})$ выполняется неравенство

$$\big\|B(s,\overline{y})-B(s,\overline{v})\big\|_{\mathcal{Z}}\leqslant q\sum_{l=1}^n\|y_l-v_l\|_{\mathcal{Z}}.$$

Лемма 2 (см. [24])**.** *Пусть $l-1<\beta\leqslant l\in\mathbb{N}$. Тогда существует такое $C>0$, что при всех $h\in C^l([t_0,t_1];\mathcal{Z})$ выполняется неравенство*

$$\big\|D_t^\beta h\big\|_{C([t_0,t_1];\mathcal{Z})}\leqslant C\|h\|_{C^l([t_0,t_1];\mathcal{Z})}.$$

Лемма 3. *Пусть $A\in\mathcal{A}_\alpha(\theta_0,a_0)$ при некоторых $\theta_0\in(\pi/2,\pi)$, $a_0\geqslant 0$, $z_k\in D_A$, $k=0,1,\dots,m-1$, Z — открытое множество в $\mathbb{R}\times\mathcal{Z}^n$, $B\in C(Z;D_A)$, $(t_0,\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2,\dots,\widetilde{z}_n)\in Z$. При этих условиях функция z является решением задачи (6), (7) на отрезке $[t_0,t_1]$, если и только если $D_t^{\alpha_k}z\in C([t_0,t_1];\mathcal{Z})$, $k=1,2,\dots,n$, и при всех $t\in(t_0,t_1]$ выполняется включение*

$$(t,D_t^{\alpha_1}z(t),D_t^{\alpha_2}z(t),\dots,D_t^{\alpha_n}z(t))\in Z$$

и равенство

$$z(t)=\sum_{k=0}^{m-1}Z_k(t-t_0)z_k+\int\limits_{t_0}^t Z_{\alpha-1}(t-s)B\big(s,D_t^{\alpha_1}z(s),D_t^{\alpha_2}z(s),\dots,D_t^{\alpha_n}z(s)\big)ds. \tag{8}$$

Доказательство. Если z — решение задачи (6), (7), то отображение

$$t\to B\big(t,D_t^{\alpha_1}z(t),D_t^{\alpha_2}z(t),\dots,D_t^{\alpha_n}z(t)\big) \tag{9}$$

непрерывно действует из $[t_0,t_1]$ в пространство D_A. По теореме 1 выполняется равенство (8).

Пусть $D_t^{\alpha_k}z\in C([t_0,t_1];\mathcal{Z})$, $k=1,2,\dots,n$, при всех $t\in(t_0,t_1]$ выполняется включение $(t,D_t^{\alpha_1}z(t),D_t^{\alpha_2}z(t),\dots,D_t^{\alpha_n}z(t))\in Z$ и z удовлетворяет уравнению (8). Тогда (9) принадлежит классу $C([t_0,t_1];D_A)$. Как при доказательстве теоремы 1, можно доказать (см. [8]), что z — решение задачи (6), (7). $\square$

Теорема 2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n \leqslant m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ при некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geqslant 0$, $z_k \in D_A$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, Z — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^n$, отображение $B \in C(Z; D_A)$ локально липшицево по $\overline{x}$, $(t_0, \widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2, \ldots, \widetilde{z}_n) \in Z$. Тогда при некотором $t_1 > t_0$ задача (6), (7) имеет единственное решение на отрезке $[t_0, t_1]$.*

Доказательство. В силу леммы 3 достаточно доказать, что интегро-дифференциальное уравнение (8) имеет единственное решение $z \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$ при некотором $t_1 > t_0$. Здесь использован тот факт, что $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n \leqslant m-1$, и поэтому согласно лемме 2 имеем $D_t^{\alpha_k} z \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $k = 1, 2, \ldots, n$, при $z \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$.

Выберем такие $\tau > 0$ и $\delta > 0$, что $[t_0, t_0+\tau] \times S_\delta(\overline{z}) \subset Z$, где $\overline{z} = (\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2, \ldots, \widetilde{z}_n)$. Обозначим через $\mathcal{S}$ множество таких функций $z \in C^{m-1}([t_0, t_0+\tau]; \mathcal{Z})$, что $\|z^{(k)}(t) - z_k\|_{\mathcal{Z}} \leqslant \delta$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \tau$, где z_k — начальные данные задачи Коши, $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Определим на $\mathcal{S}$ метрику

$$d(y, v) := \sum_{k=0}^{m-1} \sup_{t \in [t_0, t_0+\tau]} \big\|y^{(k)}(t) - v^{(k)}(t)\big\|_{\mathcal{Z}};$$

тогда S — полное метрическое пространство. Заметим, что $\widetilde{z} \in \mathcal{S}$ при малом $\tau > 0$.

При $z \in \mathcal{S}$ определим оператор

$$G(z)(t) := \sum_{k=0}^{m-1} Z_k(t-t_0) z_k + \int_{t_0}^{t} Z_{\alpha-1}(t-s) B\big(s, D_t^{\alpha_1} z(s), D_t^{\alpha_2} z(s), \ldots, D_t^{\alpha_n} z(s)\big)\, ds, \quad t \in [t_0, t_0+\tau].$$

Рассуждая, как при доказательстве теоремы 1, получим, что $G(z) \in C^{m-1}([t_0, t_0+\tau]; \mathcal{Z})$, $[G(z)]^{(l)}(t_0) = z_l$ для $l = 0, 1, \ldots, m-1$. Следовательно, при $t \in [t_0, t_0+\tau]$ имеем

$$\|[G(z)]^{(l)}(t) - z_l\|_{\mathcal{Z}} \leqslant \delta$$

при малом $\tau > 0$, поэтому $G : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$. Введем обозначение

$$B^z(t) = B\big(t, D_t^{\alpha_1} z(t), D_t^{\alpha_2} z(t), \ldots, D_t^{\alpha_n} z(t)\big).$$

В силу (3) имеем

$$\|Z_{\alpha-1-l}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant C_{\alpha-1-l}(\theta, a) e^{at} |t|^{\alpha-1-l},$$

поэтому $Z_{\alpha-1-l}(0) = 0$, $l = 0, 1, \ldots, m-2$,

$$D_t^l \int_{t_0}^{t} Z_{\alpha-1}(t-s) B^z(s) ds = \int_{t_0}^{t} Z_{\alpha-1-l}(t-s) B^z(s) ds, \quad l = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Кроме того, согласно (2) и обобщенному неравенству Бернулли, так как $m - \alpha \in (0, 1)$,

$$\|Z_{\alpha-m}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant C_{\alpha-m}(\theta, a) e^{at} (t^{-1} + a)^{m-\alpha} = \\ = C_{\alpha-m}(\theta, a) e^{at} (1 + at)^{m-\alpha} t^{\alpha-m} \leqslant C_{\alpha-m}(\theta, a) e^{at} (t^{\alpha-m} + (m-\alpha) a t^{\alpha-m+1}).$$

При $y, v \in \mathcal{S}$, $l = 0, 1, \ldots, m-2$ имеем

$$\|[G(y)]^{(l)}(t) - [G(v)]^{(l)}(t)\|_{\mathcal{Z}} = \left\| \int_{t_0}^{t} Z_{\alpha-1-l}(t-s) \big[B^y(s) - B^v(s)\big] ds \right\|_{\mathcal{Z}} \leqslant \\ \leqslant c_1 \tau^{\alpha-l} e^{a\tau} q \sum_{k=1}^{n} \sup_{t \in [t_0, t_0+\tau]} \big\|D_t^{\alpha_k} (y(t) - v(t))\big\|_{\mathcal{Z}} \leqslant c_1 \tau^{\alpha-l} e^{a\tau} q \|y - v\|_{C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})} \leqslant \frac{d(y, v)}{2m},$$

$$\Big\|\big[G(y)\big]^{(m-1)}(t) - \big[G(v)\big]^{(m-1)}(t)\Big\|_{\mathcal{Z}} \leqslant c_2 \tau^{\alpha-m+1} e^{a\tau} q \|y - v\|_{C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})} \leqslant \frac{d(y, v)}{2m}$$

при достаточно малом $\tau > 0$. При этом использована лемма 2. Таким образом, $d(G(y), G(v)) \leqslant d(y, v)/2$ и оператор G имеет единственную неподвижную точку z в метрическом пространстве $\mathcal{S}$.

Она и является единственным решением уравнения (8), а значит, и задачи Коши (6), (7) на выбранном отрезке $[t_0, t_0+\tau]$. $\square$

4. Вырожденное квазилинейное уравнение. Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — банаховы пространства. Обозначим через $\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ банахово пространство всех линейных операторов, непрерывно действующих из $\mathcal{X}$ в пространство $\mathcal{Y}$, а через $\mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ — множество всех линейных операторов с плотными в пространстве $\mathcal{X}$ областями определения, действующих в $\mathcal{Y}$. Будем также использовать обозначения

$$R^L_\mu(M) := (\mu L - M)^{-1}L, \quad L^L_\mu(M) := L(\mu L - M)^{-1},$$

$\rho^L(M)$ — множество таких $\mu \in \mathbb{C}$, что отображение $\mu L - M : D_L \cap D_M \to \mathcal{Y}$ инъективно, при этом $R^L_\mu(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $L^L_\mu(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})$.

Пусть $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $L, M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, X — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^n$, $N : X \to \mathcal{Y}$, $T > t_0$, $f : [t_0, T] \to \mathcal{Y}$. Решением на отрезке $[t_0, t_1]$ задачи Шоуолтера—Сидорова

$$(Lx)^{(k)}(t_0) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{10}$$

для квазилинейного уравнения

$$D^\alpha_t Lx(t) = Mx(t) + N\big(t, D^{\alpha_1}_t x(t), D^{\alpha_2}_t x(t), \dots, D^{\alpha_n}_t x(t)\big) + f(t) \tag{11}$$

будем называть такую функцию $x : [t_0, t_1] \to D_M \cap D_L$, для которой

$$Lx \in C^{m-1}([t_0, t_1];\mathcal{Y}), \quad D^\alpha_t Lx \in C((t_0, t_1];\mathcal{Y}), \quad Mx \in C((t_0, t_1];\mathcal{Y}),$$

выполняются условия (10), при всех $t \in (t_0, t_1]$ выполняются включение

$$\big(t, D^{\alpha_1}_t x(t), D^{\alpha_2}_t x(t), \dots, D^{\alpha_n}_t x(t)\big) \in X$$

и равенство (11).

Предполагается, что $\ker L \neq \{0\}$, поэтому уравнение (11) будем называть вырожденным эволюционным уравнением. Также отметим, что, как и в предыдущем разделе, некоторые из α_k в уравнении (11) могут быть отрицательными, т.е. нелинейный оператор в уравнении может зависеть от дробных интегралов.

Определение 1 (см. [13])**.** Пусть $L, M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$. Будем говорить, что пара (L, M) принадлежит классу $\mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, если

(i) существуют такие $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$ и $a_0 \geqslant 0$, что при всех $\lambda \in S_{\theta_0, a_0}$ выполняется включение $\lambda^\alpha \in \rho^L(M)$;

(ii) при любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует такая постоянная $K = K(\theta, a) > 0$, что при всех $\lambda \in S_{\theta,a}$

$$\max\Big\{\big\|R^L_{\lambda^\alpha}(M)\big\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})},\ \big\|L^L_{\lambda^\alpha}(M)\big\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y})}\Big\} \leqslant \frac{K(\theta, a)}{|\lambda^{\alpha-1}(\lambda - a)|}.$$

Замечание 2. Если существует обратный оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, то включение $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$ выполняется тогда и только тогда, когда $L^{-1}M \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ и $ML^{-1} \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$.

Используя θ_0, a_0 из определения 1, зададим контур $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_- \cup \Gamma_0$ при $\delta > 0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$, как в лемме 1.

Используя псевдорезольвентное тождество и тот факт, что $\ker R^L_\mu(M)$ и $\ker L^L_\mu(M)$ — псевдорезольвенты, нетрудно показать, что $\ker R^L_\mu(M) = \ker L$, множества $\operatorname{im} R^L_\mu(M)$, $\ker L^L_\mu(M)$, $\operatorname{im} L^L_\mu(M)$ не зависят от $\mu \in \rho^L(M)$. Введем обозначения $\ker R^L_\mu(M) := \mathcal{X}^0$, $\ker L^L_\mu(M) := \mathcal{Y}^0$. Через $\mathcal{X}^1$ и $\mathcal{Y}^1$ обозначим замыкания образов $\operatorname{im} R^L_\mu(M)$ и $\operatorname{im} L^L_\mu(M)$ в норме пространств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, соответственно, а через L_k и M_k — сужения операторов L и M на $D_{L_k} := D_L \cap \mathcal{X}^k$ и $D_{M_k} := D_M \cap \mathcal{Y}^k$, соответственно, $k = 0, 1$.

Используя начальные данные $y_0, y_1, \dots, y_{m-1}$, определим

$$\widetilde{y}(t) = y_0 + \frac{(t-t_0)}{1!}y_1 + \dots + \frac{(t-t_0)^{m-1}}{(m-1)!}y_{m-1}, \quad \widetilde{y}_k = D^{\alpha_k}_t|_{t=t_0}\widetilde{y}(t), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Теорема 3 (см. [13]). *Пусть банаховы пространства* $\mathcal{X}$ *и* $\mathcal{Y}$ *рефлексивны,* $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

(i) $\mathcal{X} = \mathcal{X}^0 \oplus \mathcal{X}^1$, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^0 \oplus \mathcal{Y}^1$;

(ii) *проекторы* P *и* Q *на подпространства* $\mathcal{X}^1$ *и* $\mathcal{Y}^1$ *вдоль* $\mathcal{X}^0$ *и* $\mathcal{Y}^0$ *соответственно имеют вид*
$$P = s\text{-}\lim_{n\to\infty} nR_n^L(M), \quad Q = s\text{-}\lim_{n\to\infty} nL_n^L(M);$$

(iii) $L_0 = 0$, $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^0; \mathcal{Y}^0)$, $L_1, M_1 \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$;

(iv) *существуют обратные операторы* $L_1^{-1} \in \mathcal{C}l(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0; \mathcal{X}^0)$;

(v) $Px \in D_L$ *и* $LPx = QLx$ *для всех* $x \in D_L$;

(vi) $Px \in D_M$ *и* $MPx = QMx$ *для всех* $x \in D_M$;

(vii) *пусть* $S := L_1^{-1}M_1 : D_S \to \mathcal{X}^1$; *тогда* $D_S := \{x \in D_{M_1} : M_1x \in \operatorname{im} L_1\}$ *плотно в* $\mathcal{X}$;

(viii) *пусть* $T := M_1L_1^{-1} : D_T \to \mathcal{Y}^1$; *тогда* $D_T := \{y \in \operatorname{im} L_1 : L_1^{-1}y \in D_{M_1}\}$ *плотно в* $\mathcal{Y}$;

(ix) *если* $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$ *или* $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$, *то* $S \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^1)$; *при этом* $S \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$;

(x) *если* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$ *или* $M_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, *то* $T \in \mathcal{C}l(\mathcal{Y}^1)$; *при этом* $T \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$.

Теорема 4. *Пусть банаховы пространства* $\mathcal{X}$ *и* $\mathcal{Y}$ *рефлексивны,* $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$ *или* $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leqslant m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, X *— открытое множество в* $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^n$, $N : X \to \operatorname{im} L$, *отображение* $L_1^{-1}N \in C\big(X; D_S\big)$ *локально липшицево по* $\overline{x}$, $f : [t_0, T] \to \mathcal{Y}^0 \dot{+} \operatorname{im} L$ *при некотором* $T > t_0$, $f \in C([t_0, T]; \mathcal{Y})$, $L_1^{-1}Qf \in C([t_0, T]; D_S)$, $M_0^{-1}(I - Q)f \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{X})$, $y_k \in L[D_S]$ *при* $k = 0, 1, \dots, m-1$,
$$\big(t_0, L_1^{-1}\widetilde{y}_1 - D_t^{\alpha_1}M_0^{-1}(I - Q)f(t_0), \dots, L_1^{-1}\widetilde{y}_n - D_t^{\alpha_n}M_0^{-1}(I - Q)f(t_0)\big) \in X.$$
Тогда существует единственное решение задачи (10), (11) *на отрезке* $[t_0, t_1]$ *при некотором* $t_1 \in (t_0, T]$.

Доказательство. Положим $x^0(t) := (I - P)x(t)$, $x^1(t) := Px(t)$. По теореме 3 в силу условия $\operatorname{im} N \subset \operatorname{im} L \subset \mathcal{Y}^1$ уравнение (11) может быть редуцировано к системе
$$x^0(t) = -M_0^{-1}(I - Q)f(t), \tag{12}$$
$$D_t^\alpha x^1(t) = Sx^1(t) + L_1^{-1}N\big(t, D^{\alpha_1}x(t), D_t^{\alpha_2}x(t), \dots, D_t^{\alpha_n}x(t)\big) + L_1^{-1}Qf(t). \tag{13}$$
Если $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$ или $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$, то по теореме 3(ix) $S \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$. Теорема 2 влечет существование единственного решения задачи Коши $D_t^k x^1(0) = L_1^{-1}y_k \in D_S$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, для уравнения (13) на некотором отрезке $[t_0, t_1]$. Действительно, отображение
$$(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \to L_1^{-1}N\big(t, x_1 - D_t^{\alpha_1}M_0^{-1}(I - Q)f(t), \dots, x_n - D_t^{\alpha_n}M_0^{-1}(I - Q)f(t)\big) + L_1^{-1}Qf(t)$$
непрерывно в норме графика оператора S и локально липшицево по $x_1, x_2, \dots, x_n$. $\square$

Теорема 5. *Пусть банаховы пространства* $\mathcal{X}$ *и* $\mathcal{Y}$ *рефлексивны,* $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leqslant m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, X *— открытое множество в* $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^n$, $N : X \to \mathcal{Y}^1$, $N \in C\big(X; D_T\big)$ *локально липшицево по* $\overline{x}$, $f \in C([t_0, T]; \mathcal{Y})$ *при некотором* $T > t_0$, $Qf \in C([t_0, T]; D_T)$, $M_0^{-1}(I - Q)f \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{X})$, $y_k \in D_T$, $k = 0, 1, \dots, m-1$,
$$\big(t_0,\ L_1^{-1}\widetilde{y}_1 - D_t^{\alpha_1}M_0^{-1}(I - Q)f(t_0),\ L_1^{-1}\widetilde{y}_2 - D_t^{\alpha_2}M_0^{-1}(I - Q)f(t_0),\ \dots,$$
$$L_1^{-1}\widetilde{y}_n - D_t^{\alpha_n}M_0^{-1}(I - Q)f(t_0)\big) \in X.$$
Тогда существует единственное решение задачи (10), (11) *на отрезке* $[t_0, t_1]$ *при некотором* $t_1 \in (t_0, T]$.

Доказательство. Вместо уравнения (13) получим теперь эквивалентное ему уравнение
$$D_t^\alpha y^1(t) = Ty^1(t) +$$
$$+ N\big(t,\ D_t^{\alpha_1}\big(L_1^{-1}y^1(t) - M_0^{-1}(I - Q)f(t)\big),\ \dots,\ D_t^{\alpha_n}\big(L_1^{-1}y^1(t) - M_0^{-1}(I - Q)f(t)\big)\big) + Qf(t),$$

где $y^1(t) = L_1x^1(t)$. По теореме 3(x) $T \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, поэтому согласно теореме 2 существует единственное решение задачи Коши $D_t^k y^1(0) = y_k \in D_T$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, для этого уравнения на отрезке $[t_0, t_1]$. Действительно, в силу условия $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, непрерывности в норме графика оператора T и локальной липшицевости отображения

$$(t, z_1, z_2, \dots, z_n) \to N\big(t,\ L_1^{-1}z_1 - D_t^{\alpha_1}M_0^{-1}(I-Q)f(t),\ \dots,\ L_1^{-1}z_n - D_t^{\alpha_n}M_0^{-1}(I-Q)f(t)\big) + Qf(t)$$

нелинейный оператор в рассматриваемом уравнении удовлетворяет условиям теоремы 2. □

Замечание 3. Задача Коши $x^{(k)}(0) = x_k$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, для уравнения (11) может быть исследована аналогичным образом. Но при этом уравнение (12) влечет необходимые для разрешимости условия согласования

$$(I-P)x_k = -D_t^k\big|_{t=t_0} M_0^{-1}(I-Q)f(t), \quad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

начальных данных и функции f.

Рассмотрим прежнюю задачу для вырожденного уравнения, не используя условие $\operatorname{im} N \subset \mathcal{X}^1$. При этом будет предполагаться, что оператор N не зависит от элементов подпространства $\mathcal{X}^0$. В этом случае без потери общности можно считать $f \equiv 0$:

$$D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t) + N\big(t,\ D_t^{\alpha_1}x(t),\ D_t^{\alpha_2}x(t),\ \dots,\ D_t^{\alpha_n}x(t)\big). \tag{14}$$

Обозначим $V := X \cap (\mathbb{R} \times (\mathcal{X}^1)^n)$.

Теорема 6. *Пусть банаховы пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$ или $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leqslant m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, множество V открыто в $\mathbb{R} \times (\mathcal{X}^1)^n$, $N : X \to \mathcal{Y}$, для всех $(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$, таких, что $(t, Px_1, Px_2, \dots, Px_n) \in V$, выполняется $N(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = N_1(t, Px_1, Px_2, \dots, Px_n)$ при некотором $N_1 \in C\big(V; \mathcal{X}\big)$, $\operatorname{im} QN_1 \subset \operatorname{im} L$, $L_1^{-1}QN_1 \in C\big(V; D_S\big)$ локально липшицево по $\overline{x}$, $y_k \in L[D_S]$ при $k = 0, 1, \dots, m-1$, $(t_0, L_1^{-1}\widetilde{y}_1, L_1^{-1}\widetilde{y}_2, \dots, L_1^{-1}\widetilde{y}_n) \in V$. Тогда существует единственное решение задачи* (10), (14) *на отрезке $[t_0, t_1]$ при некотором $t_1 > t_0$.*

Доказательство. Как при доказательстве теоремы 4, получаем систему двух уравнений

$$\begin{gathered} x^0(t) = -M_0^{-1}(I-Q)N_1\big(t,\ D_t^{\alpha_1}x^1(t),\ D_t^{\alpha_2}x^1(t),\ \dots,\ D_t^{\alpha_n}x^1(t)\big), \\ D_t^\alpha x^1(t) = Sx^1(t) + L_1^{-1}QN_1\big(t,\ D_t^{\alpha_1}x^1(t),\ D_t^{\alpha_2}x^1(t),\ \dots,\ D_t^{\alpha_n}x^1(t)\big), \end{gathered} \tag{15}$$

используем теоремы 3(ix) и 2. □

Определим отображение $QN_1 \circ L_1^{-1} : \mathbb{R} \times (\mathcal{Y}^1)^n \to \mathcal{Y}$, которое на элементы $(t, z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R} \times (\mathcal{Y}^1)^n$ действует по правилу

$$QN_1 \circ L_1^{-1}(t, z_1, z_2, \dots, z_n) := QN_1\big(t,\ L_1^{-1}z_1,\ L_1^{-1}z_2,\ \dots,\ L_1^{-1}z_n\big).$$

Теорема 7. *Пусть банаховы пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, V — открытое множество в $\mathbb{R} \times (\mathcal{X}^1)^n$, $N : X \to \mathcal{Y}$, для всех $(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$, таких, что $(t, Px_1, Px_2, \dots, Px_n) \in V$, выполняется $N(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = N_1(t, Px_1, Px_2, \dots, Px_n)$, где $N_1 \in C\big(V; \mathcal{X}\big)$, $QN_1 \in C\big(V; D_T\big)$ локально липшицево по $\overline{x}$, $y_k \in D_T$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $(t_0, L_1^{-1}\widetilde{y}_1, L_1^{-1}\widetilde{y}_2, \dots, L_1^{-1}\widetilde{y}_n) \in V$. Тогда существует единственное решение задачи* (10), (14) *на отрезке $[t_0, t_1]$ при некотором $t_1 > t_0$.*

Доказательство. Вместо уравнения (15) в данном случае получаем задачу Коши $D_t^k y^1(0) = y_k \in D_T$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, для уравнения

$$D_t^\alpha y^1(t) = Ty^1(t) + QN_1\big(t,\ D_t^{\alpha_1}L_1^{-1}y^1(t),\ D_t^{\alpha_2}L_1^{-1}y^1(t),\ \dots,\ D_t^{\alpha_n}L_1^{-1}y^1(t)),$$

где $y^1(t) = L_1x^1(t)$, как при доказательстве теоремы 5. □

5. Пример. При $\alpha \in (1,2)$ рассмотрим начально-краевую задачу

$$\left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right) v(s,t_0) = v_0(s), \quad D_t^1 \left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right) v(s,t_0) = v_1(s), \quad s \in (0,\pi), \tag{16}$$

$$v(0,t) = v(\pi,t) = \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(0,t) = \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(\pi,t) = 0, \quad t > t_0, \tag{17}$$

$$D_t^\alpha \left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right) v(s,t) = \sum_{l=0}^{2} a_l \frac{\partial^{2l} v}{\partial s^{2l}}(s,t) + \left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right) F\left(s, D_t^{-1/3} v(s,t), D_t^{1/2} v(s,t)\right) \tag{18}$$

для $s \in (0,\pi)$, $t > t_0$. Здесь $\beta, a_l \in \mathbb{R}$, $l = 0,1,2$, $F : (0,\pi) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Теорема 8. *Пусть* $\alpha \in (1,2)$, $F \in C^\infty((0,\pi) \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, $\beta = -k_1^2$ *при некотором* $k_1 \in \mathbb{N}$, $a_2 > 0$,

$$a_0 + a_1\beta + a_2\beta^2 \neq 0, \quad v_k = \left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right) w_k,$$

$w_k \in \{x \in H^4(0,\pi) : x^{(2l)}(0) = x^{(2l)}(\pi) = 0,\ l = 0,1\}$, $k = 0,1$. *Тогда задача* (16)–(18) *имеет единственное решение на отрезке* $[t_0,t_1]$ *при некотором* $t_1 > t_0$.

Доказательство. Положим

$$\mathcal{X} := \{x \in H^2(0,\pi) : x(0) = x(\pi) = 0\}, \quad \mathcal{Y} = L_2(0,\pi),$$
$$D_M := \{x \in H^4(0,\pi) : x^{(2l)}(0) = x^{(2l)}(\pi) = 0,\ l = 0,1\},$$
$$L := \beta - \frac{\partial^2}{\partial s^2} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}, \quad M := \sum_{l=0}^{2} a_l \frac{\partial^{2l}}{\partial s^{2l}} : D_M \to \mathcal{Y},$$
$$N(x_1(s), x_2(s)) = \left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right) F(s, x_1(s), x_2(s)).$$

Согласно [13, теорема 7] имеем $\ker L = \mathcal{X}^0 = \mathcal{Y}^0 = \mathrm{Span}\{\sin k_1 s\}$, $\mathcal{X}^1$ есть замыкание $\mathrm{Span}\{\sin ks : k \in \mathbb{N} \setminus \{k_1\}\}$ в $\mathcal{X}$, а $\mathcal{Y}^1$ — замыкание того же подпространства в норме $\mathcal{Y}$, оператор $L_1 : \mathcal{X}^1 \to \mathcal{Y}^1$ является гомеоморфизмом и при $\alpha \in (1,2)$ $(L,M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$ для некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geqslant 0$. Из вида оператора N следует, что $\mathrm{im}\, N \subset \mathcal{Y}^1$.

В силу [20, приложение Б, предложение 1] отображение $(x_1(\cdot), x_2(\cdot)) \to F(\cdot, x_1(\cdot), x_2(\cdot))$ принадлежит классу $C^\infty((H^2(0,\pi))^2; H^2(0,\pi))$; следовательно, оператор $N : X = \mathcal{X}^2 \to \mathcal{X}$ локально липшицев, при этом непрерывен оператор $ML_1^{-1}N : X = \mathcal{X}^2 \to \mathcal{Y}$, а значит, $N \in C(X; D_T)$, где $T = ML_1^{-1}$. По теореме 5 получим требуемое. □

С помощью теоремы 6 или 7 аналогичным образом может быть рассмотрена задача (16), (17) для уравнения

$$D_t^\alpha \left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right) v(s,t) = \sum_{l=0}^{2} a_l \frac{\partial^{2l} v}{\partial s^{2l}}(s,t) + F\left(s, \left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right) D_t^{-1/3} v(s,t), \left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right) D_t^{1/2} v(s,t)\right).$$

6. Заключение. В работе исследованы вопросы однозначной локальной разрешимости задачи Коши для квазилинейных уравнений в банаховых пространствах, разрешенных относительно старшей дробной производной Герасимова—Капуто, с локально липшицевым нелинейным оператором, непрерывным в норме графика замкнутого оператора из линейной части уравнения. Полученные результаты использованы при исследовании аналогичных уравнений с вырожденным линейным оператором при старшей производной. Особенностью работы является тот факт, что порядки младших производных, от которых зависит нелинейный оператор, произвольны и не согласованы с порядком старшей производной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Авилович А. С., Гордиевских Д. М., Федоров В. Е.* Вопросы однозначной разрешимости и приближенной управляемости для линейных уравнений дробного порядка с гельдеровой правой частью// Челяб. физ.-мат. ж. — 2020. — *60*, № 2. — С. 461–477.
2. *Бояринцев Ю. Е.* Методы решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. — Новосибирск: Наука, 1988.
3. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешённые относительно старшей производной. — Новосибирск: Научная книга, 1998.
4. *Костич М., Федоров В. Е.* Вырожденные дробные дифференциальные уравнения в локально выпуклых пространствах с сигма-регулярной парой операторов// Уфим. мат. ж. — 2016. — *8*, № 4. — С. 100–113.
5. *Костич М., Федоров В. Е.* Разделенные гиперциклические и разделенные топологически перемешивающие свойства вырожденных дробных дифференциальных уравнений// Изв. вузов. Мат. — 2018. — *7*. — С. 36–53.
6. *Плеханова М. В.* Сильные решения нелинейного вырожденного эволюционного уравнения дробного порядка// Сиб. ж. чист. прикл. мат. — 2016. — *16*, № 3. — С. 61–74.
7. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1954. — *18*. — С. 3–50.
8. *Федоров В. Е., Авилович А. С.* Задача типа Коши для вырожденного уравнения с производной Римана—Лиувилля в секториальном случае// Сиб. мат. ж. — 2019. — *60*, № 2. — С. 461–477.
9. *Федоров В. Е., Гордиевских Д. М.* Разрешающие операторы вырожденных эволюционных уравнений с дробной производной по времени// Изв. вузов. Мат. — 2015. — *1*. — С. 71–83.
10. *Федоров В. Е., Гордиевских Д. М., Плеханова М. В.* Уравнения в банаховых пространствах с вырожденным оператором под знаком дробной производной// Диффер. уравн. — 2015. — *51*, № 10. — С. 1367–1375.
11. *Федоров В. Е., Плеханова М. В., Нажимов Р. Р.* Линейные вырожденные эволюционные уравнения с дробной производной Римана—Лиувилля// Сиб. мат. ж. — 2018. — *59*, № 1. — С. 171–184.
12. *Федоров В. Е., Романова Е. А.* Неоднородное эволюционное уравнение дробного порядка в секториальном случае// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2018. — *149*. — С. 103–112.
13. *Федоров В. Е., Романова Е. А., Дебуш А.* Аналитические в секторе разрешающие семейства операторов вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка// Сиб. ж. чист. прикл. мат. — 2016. — *16*, № 2. — С. 93–107.
14. *Чистяков В. Ф.* Алгебраически-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. — Новосибирск: Наука, 1996.
15. *Bajlekova E. G.* Fractional Evolution Equations in Banach Spaces. — Eindhoven: Eindhoven Univ. Technol., 2001.
16. *Caroll R. W., Showalter R. E.* Singular and Degenerate Cauchy Problems. — New York–San Francisco–London: Academic Press, 1976.
17. *Favini A., Yagi A.* Degenerate Differential Equations in Banach Spaces. — New York–Basel–Hong Kong: Marcel Dekker, 1999.
18. *Fedorov V. E., Avilovich A. S.* Semilinear fractional-order evolution equations of Sobolev type in the sectorial case// Complex Var. Ellipt. Equations. — 2021. — *66*, № 6–7. — P. 1108–1121.
19. *Fedorov V. E., Avilovich A. S., Borel L. V.* Initial problems for semilinear degenerate evolution equations of fractional order in the sectorial case// Springer Proc. Math. Stat. — 2019. — *292*. — P. 41–62.
20. *Hassard B. D., Kazarinoff N. D., Wan Y. H.* Theory and Applications of Hopf Bifurcation. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1981.
21. *Kostić M.* Abstract Volterra Integro-Differential Equations. — Boca Raton: CRC Press, 2015.
22. *Plekhanova M. V.* Sobolev type equations of time-fractional order with periodical boundary conditions// AIP Conf. Proc. — 2016. — *1759*. — 020101.
23. *Plekhanova M. V.* Nonlinear equations with degenerate operator at fractional Caputo derivative// Math. Meth. Appl. Sci. — 2017. — *40*, № 17. — P. 6138–6146.
24. *Plekhanova M. V., Baybulatova G. D.* Semilinear equations in Banach spaces with lower fractional derivatives// Springer Proc. Math. Stat. — 2019. — *292*. — P. 81–93.
25. *Prüss J.* Evolutionary Integral Equations and Applications. — Basel: Springer, 1993.

26. *Pyatkov S. G.* Operator Theory. Nonclassical Problems. — Utrecht–Boston–Colonia–Tokyo: VSP, 2002.
27. *Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M.* Lyapunov–Schmidt Method in Nonlinear Analysis and Applications. — Dordrecht: Kluwer Academic, 2002.
28. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. — Utrecht–Boston: VSP, 2003.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для ведущих научных школ (проект НШ-2708.2022.1.1), Российского фонда фундаментальных исследований (проект 21-51-54003) и Вьетнамской Академии науки и технологии (проект QTRU 01-01/21-22).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Федоров Владимир Евгеньевич
Челябинский государственный университет
E-mail: kar@csu.ru

Захарова Татьяна Анатольевна
Челябинский государственный университет
E-mail: tanya_1997_smirnova@mail.ru