ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 226 (2023). С. 138–149
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-226-138-149

УДК 519.8

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕЧЕТКИЕ СРЕДНИЕ В ЗАДАЧЕ АГРЕГИРОВАНИЯ НЕЧЕТКОЙ ИНФОРМАЦИИ

© 2023 г. **В. Л. ХАЦКЕВИЧ**

Аннотация. Для параметрических систем нечетких чисел введен и изучен класс интегральных операторов осреднения для реализации задачи агрегирования нечеткой информации.

***Ключевые слова*:** нечеткая функция, нечеткий интегральный оператор осреднения, агрегирование нечеткой информации.

INTEGRAL FUZZY MEANS IN THE AGGREGATION PROBLEM FOR FUZZY INFORMATION

© 2023 **V. L. KHATSKEVICH**

Abstract. For parametric systems of fuzzy numbers, we introduce and examine a class of aggregation integral operators for aggregation of fuzzy information.

***Keywords and phrases*:** fuzzy function, fuzzy averaging integral operator, aggregation of fuzzy information.

***AMS Subject Classification*:** 62A86

1. Введение. Пусть I — отрезок расширенной числовой прямой. Под n-мерной агрегирующей функцией (агрегатором) обычно понимают функцию $A : I^n \to I$, которая векторной оценке объекта $X = (x_1, \dots, x_n)$ ставит в соответствие обобщенную скалярную оценку $A(X)$. При этом обычно предполагают (см., например, [3, 15, 17]), что она обладает следующими свойствами:

(i) $A(x, \dots, x) = x$ (идемпотентность);
(ii) для любой пары векторных оценок $X = (x_1, \dots, x_n)$ и $Y = (y_1, \dots, y_n)$, удовлетворяющих условию $x_i \leqslant y_i$ $i = 1, \dots, n$, выполняется неравенство $A(X) \leqslant A(Y)$ (монотонность);
(iii) функция $A(x_1, \dots, x_n)$ непрерывна (непрерывность);
(iv) $\inf\limits_{X \in I^n} A(X) = \inf I$, $\sup\limits_{X \in I^n} A(X) = \sup I$ (граничные условия).

Эти свойства отражают естественные требования к операции агрегирования. А именно, идемпотентность означает, что при равенстве всех параметров обобщенная оценка совпадает с общим значением параметра. Монотонность означает, что увеличение любого из параметров может только увеличить значение обобщенной оценки. Непрерывность отражает тот факт, что малому изменению параметров соответствует малое изменение обобщенной оценки. Граничное условие соответствует пониманию среднего числового множества (при любом определении) как промежуточного значения между наименьшим и наибольшим.

Часто (см. [9]) в качестве агрегирующих функций рассматриваются средние: средняя арифметическая M, средняя показательная M_p, средняя геометрическая M_G, средняя гармоническая M_H:

$$M(x_1,\dots,x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i, \qquad M_p(x_1,\dots,x_n)=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{1/p},$$

$$M_G(x_1,\dots,x_n)=\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{1/n}, \quad M_H(x_1,\dots,x_n)=n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)^{-1}.$$

Все они обладают при $x_i>0$ ($i=1,\dots,n$) перечисленными свойствами (i)–(iv). Средняя арифметическая имеет дополнительные свойства: аддитивность, однородность, а также экстремальное свойство. Она является решением следующей экстремальной задачи:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-x)^2\to\min \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Рассматриваются также взвешенные средние.

С другой стороны, известен классический подход к оценке параметрической информации. Это непрерывное взвешенное среднее (см. [2, гл. I]) с заданной функцией частот (весов). Обозначим функцию частот $p(x)$, $p(x)>0$. Тогда взвешенная средняя арифметическая A, взвешенная средняя степенная A_m, взвешенная средняя геометрическая G и взвешенная средняя гармоническая H определяются формулами

$$A=\int_a^b xp(x)dx \Big/ \int_a^b p(x)dx; \qquad A_m=\left(\int_a^b x^m p(x)dx \Big/ \int_a^b p(x)dx\right)^{1/m};$$

$$G=\exp\left\{\int_a^b \ln(x)p(x)dx \Big/ \int_a^b p(x)dx\right\}; \quad H=\int_a^b p(x)dx \Big/ \int_a^b (p(x)/x)dx.$$

В работе рассматривается задача агрегирования нечеткой информации, заданной параметрическим (непрерывным) семейством нечетких чисел. Она понимается как оценка такой информации с помощью нечеткого числа, отражающего тенденцию данной (параметрической) нечеткой совокупности.

Для решения задачи агрегирования на основе интервального подхода в настоящей работе вводятся интегральные нечеткие средние (линейные и нелинейные) и устанавливаются их свойства, являющиеся модификациями свойств агрегирующих функций. Это обеспечивает адекватность применения интегральных нечетких средних в задаче агрегирования параметрической нечеткой информации.

Таким образом, новизна данной работы состоит в развитии подхода агрегирующих функций на непрерывный (параметрический) случай, причем, для нечеткой информации. Отметим отличие нашего подхода от известного (нечеткого) интеграла Шоке (см., например, [12, 18]), где агрегируются функции принадлежности.

Ниже под нечетким числом $\tilde{z}$, заданным на универсальном пространстве $\mathbb{R}$, будем понимать (см. [4, гл. 2]) совокупность упорядоченных пар $(\mu_{\tilde{z}}(x),x)$, где $\mu_{\tilde{z}}:\mathbb{R}\to[0,1]$ — функция принадлежности, определяющая степень принадлежности произвольного $x\in\mathbb{R}$ множеству $\tilde{z}$. Нечеткое число $\tilde{z}$ порождает α-уровни Z_α, определяемые для любого $\alpha\in[0,1]$ равенством

$$Z_\alpha=\bigl\{x \mid \mu_{\tilde{z}}(x)\geqslant\alpha\bigr\}, \quad \alpha\in(0,1], \quad Z_0=\mathrm{cl}\bigl\{x \mid \mu_{\tilde{z}}(x)>0\bigr\},$$

где символ cl означает замыкание множества.

Будем считать, что множества α-уровня — замкнутые интервалы, так что $Z_\alpha=\bigl[z^-(\alpha),\ z^+(\alpha)\bigr]$. Функции $z^-(\alpha)$ и $z^+(\alpha)$ называют соответственно левым и правым индексами нечеткого числа. Будем считать, что они измеримы и ограничены на $[0,1]$. Совокупность таких нечетких чисел будем обозначать J.

Под суммой нечетких чисел понимается нечеткое число, индексы которого являются суммами соответствующих индексов слагаемых. Умножение нечеткого числа на положительное число означает умножение индексов на это число. Умножение на отрицательное вещественное число означает умножение индексов на это число и перемену их местами. Равенство нечетких чисел понимается как равенство всех соответствующих индексов (при всех $\alpha \in [0,1]$).

На множестве нечетких чисел рассмотрим метрику, задаваемую для $\tilde{z}_1$, $\tilde{z}_2 \in J$ равенством

$$d(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) = \sup_{\alpha\in[0,1]} \max\left\{\left|z_1^+(\alpha) - z_2^+(\alpha)\right|,\ \left|z_1^-(\alpha) - z_2^-(\alpha)\right|\right\} \tag{1}$$

(см. [14]). Ниже используется следующее определение сравнения (ранжирования) нечетких чисел, заданных в интервальной форме. Для нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\tilde{w}$ будем писать $\tilde{z} \prec \tilde{w}$, если одновременно

$$z^-(\alpha) \leqslant w^-(\alpha), \quad z^+(\alpha) \leqslant w^+(\alpha) \quad \forall\alpha \in (0,1] \tag{2}$$

(см. [5, гл. 5]). Отметим, что (2) задает соотношение частичного порядка на множестве J.

2. Интегральные нечеткие средние параметрических систем нечетких чисел. Пусть Ω — измеримое по Лебегу числовое множество. Пусть $\tilde{z}(\omega)$ — измеримая нечеткая функция, а именно, $\tilde{z} : \Omega \to J$ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{z}(\omega)}(x)$. Рассмотрим α-уровни

$$Z_\alpha(\omega) = \left\{x \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde{z}(\omega)}(x) \geqslant \alpha\right\}.$$

Интервал $Z_\alpha(\omega)$ представим в виде $Z_\alpha(\omega) = \left[z^-(\omega,\alpha),\ z^+(\omega,\alpha)\right]$. Будем считать, что индексы $z^-(\omega,\alpha)$, $z^+(\omega,\alpha)$ являются функциями, квадратично суммируемыми на $\Omega \times [0,1]$. Класс таких нечетких функций обозначим J_ω.

Для функции $\tilde{z}(\omega)$ обозначим через $p(\omega)$ функцию весов (частот). Будем считать, что $p(\omega)$ квадратично суммируема на Ω и $p(\omega) > 0$ при п.в. $\omega \in \Omega$.

Определим с помощью интеграла Лебега функции

$$z_p^-(\alpha) = \frac{1}{p_0}\int\limits_\Omega z^-(\omega,\alpha)p(\omega)d\omega, \quad z_p^+(\alpha) = \frac{1}{p_0}\int\limits_\Omega z^+(\omega,\alpha)p(\omega)d\omega, \tag{3}$$

где

$$p_0 = \int\limits_\Omega p(\omega)d\omega.$$

Введем в рассмотрение нечеткое число $M_p(\tilde{z}(\omega))$, индексы которого задаются формулами (3). Назовем его нечетким интегральным взвешенным средним (коротко — нечетким средним) от нечеткой функции $\tilde{z}(\omega)$. Его индексы будем обозначать $\left[M_p(\tilde{z}(\omega))\right]^{\pm}(\alpha)$. Это аналог интеграла от нечеткой функции, введенного в [13]. Он соответствует интегралу Ауманна для многозначных функций (см. [8]). Величину $M_p(\tilde{z}(\omega))$ можно понимать как оператор нечеткого осреднения. С другой стороны, это нечеткий аналог непрерывной средней арифметической (см. [2, гл. I]).

Рассмотрим на множестве J метрику, задаваемую для нечетких чисел $\tilde{z}_1$, $\tilde{z}_2$ равенством

$$r(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) = \left(\int\limits_0^1 \left(\left(z_1^-(\alpha) - z_2^-(\alpha)\right)^2 + \left(z_1^+(\alpha) - z_2^+(\alpha)\right)^2\right)d\alpha\right)^{1/2} \tag{4}$$

(см. [10]), а на множестве J_ω-нечетких функций — метрику, задаваемую для нечетких функций $\tilde{z}_1(\omega)$, $\tilde{z}_2(\omega)$ равенством

$$\rho(\tilde{z}_1(\omega), \tilde{z}_2(\omega)) = \left(\int\limits_0^1\int\limits_\Omega \left(\left(z_1^-(\omega,\alpha) - z_2^-(\omega,\alpha)\right)^2 + \left(z_1^+(\omega,\alpha) - z_2^+(\omega,\alpha)\right)^2\right)d\omega\, d\alpha\right)^{1/2}. \tag{5}$$

Определенное формулой (3) интегральное нечеткое среднее обладает свойствами, являющимися модификациями свойств агрегирующих функций.

Теорема 1. *Интегральное нечеткое среднее, определяемое формулой* (3)*, удовлетворяет следующим условиям регулярности*:

(i) *идемпотентность*: *если $\tilde{z}(\omega) = \tilde{z}$ для п.в. $\omega \in \Omega$, то*
$$M_p\big(\tilde{z}(\omega)\big) = \tilde{z};$$

(ii) *монотонность*: *если для двух нечетких функций $\tilde{z}_1(\omega)$, $\tilde{z}_2(\omega) \in J_\omega$ выполнено условие $\tilde{z}_1(\omega) \prec \tilde{z}_2(\omega)$ для п.в. $\omega \in \Omega$, то*
$$M_p\big(\tilde{z}_1(\omega)\big) \prec M_p\big(\tilde{z}_2(\omega)\big);$$

(iii) *непрерывность*: *оператор осреднения $M_p : J_\omega \to J$ непрерывен.*

Доказательство. (i) По определению и на основании (3) можем записать
$$\big[M_p(\tilde{z})\big]^-(\alpha) = \frac{1}{p_0}\int\limits_\Omega z^-(\alpha)p(\omega)d\omega = z^-(\alpha)\frac{1}{p_0}\int\limits_\Omega p(\omega)d\omega = z^-(\alpha).$$
Аналогично, $\big[M_p(\tilde{z})\big]^+(\alpha) = z^+(\alpha)$.

(ii) Условие $\tilde{z}_1(\omega) \prec \tilde{z}_2(\omega)$ согласно (2) означает, что для каждого фиксированного $\alpha \in (0,1]$ и почти любого $\omega \in \Omega$) выполнены соотношения
$$z_1^-(\omega,\alpha) \leqslant z_2^-(\omega,\alpha), \quad z_1^+(\omega,\alpha) \leqslant z_2^+(\omega,\alpha).$$
Умножим эти неравенства на весовую функцию $p(\omega) > 0$ и проинтегрируем полученные неравенства по области Ω. Далее, используя свойство монотонности интеграла Лебега и определение мажорантности (2), получим высказанное утверждение.

(iii) Согласно определениям (3), (4)
$$r^2\Big(M_p\big(\tilde{z}_1(\omega)\big),\ M_p\big(\tilde{z}_2(\omega)\big)\Big) =$$
$$= \int\limits_0^1 \left[\left(\frac{1}{p_0}\int\limits_\Omega \Big(z_1^-(\omega,\alpha) - z_2^-(\omega,\alpha)\Big)p(\omega)d\omega\right)^2 + \left(\frac{1}{p_0}\int\limits_\Omega \Big(z_1^+(\omega,\alpha) - z_2^+(\omega,\alpha)\Big)p(\omega)d\omega\right)^2\right] d\alpha.$$
При этом
$$\left(\frac{1}{p_0}\int\limits_\Omega \Big(z_1^-(\omega,\alpha) - z_2^-(\omega,\alpha)\Big)p(\omega)d\omega\right)^2 \leqslant \frac{\|p\|^2}{p_0^2}\int\limits_\Omega \Big(z_1^-(\omega,\alpha) - z_2^-(\omega,\alpha)\Big)^2 d\omega,$$
где
$$\|p\| = \left(\int\limits_\Omega p^2(\omega)d\omega\right)^{1/2},$$
и аналогично для индексов с плюсом. Таким образом, на основании (5), имеет место соотношение
$$r^2\Big(M_p\big(\tilde{z}_1(\omega)\big),\ M_p\big(\tilde{z}_2(\omega)\big)\Big) \leqslant \frac{\|p\|^2}{p_0^2}\rho^2\big(\tilde{z}_1(\omega), \tilde{z}_2(\omega)\big),$$
которое влечет непрерывность M_p как отображения из J_ω с метрикой (5) в J с метрикой (4). □

Дополнительно к свойствам (i)–(iii) теоремы 1 для нечеткого интегрального оператора M_p выполнено следующее свойство (эффективность).

Предложение 1. *Если $\tilde{z}_1(\omega)$, $\tilde{z}_2(\omega)$, $\tilde{z}_3(\omega) \in J_\omega$ и $\tilde{z}_1(\omega) \prec \tilde{z}_2(\omega)$ при почти всех $\omega \in \Omega$, то*
$$M_p\big(\tilde{z}_1(\omega) + \tilde{z}_3(\omega)\big) \prec M_p\big(\tilde{z}_2(\omega) + \tilde{z}_3(\omega)\big).$$

Действительно, по условию и согласно (2)
$$\tilde{z}_1(\omega) + \tilde{z}_3(\omega) \prec \tilde{z}_2(\omega) + \tilde{z}_3(\omega).$$
Тогда высказанное утверждение следует из свойства (ii) теоремы 1.

Это свойство ранее не рассматривалось для функций агрегаторов. Для интегральных нечетких функционалов специального вида оно обсуждается в [5, гл. 5].

Для заданной нечеткой функции $\tilde{z}(\omega)$ с индексами $z^-(\omega,\alpha)$ и $z^+(\omega,\alpha)$ (которые будем считать ограниченными по $\omega\in\Omega$ при любом $\alpha\in(0,1)$ функциями) определим величины

$$z^{\pm}_{\inf}(\alpha)=\inf_{\omega\in\Omega} z^{\pm}(\omega,\alpha),\quad z^{\pm}_{\sup}(\alpha)=\sup_{\omega\in\Omega} z^{\pm}(\omega,\alpha). \tag{6}$$

Предложение 2. *Для нечеткой функции $\tilde{z}(\omega)\in J_\omega$ с индексами, ограниченными по $\omega\in\Omega$ при любом $\alpha\in(0,1)$, справедливо соотношение*

$$z^{\pm}_{\inf}(\alpha)\leqslant M^{\pm}_p(\tilde{z}(\omega))(\alpha)\leqslant z^{\pm}_{\sup}(\alpha)\quad \forall\alpha\in[0,1].$$

Действительно, рассмотрим случай левых индексов. По определению (6) имеем

$$z^{-}_{\inf}(\alpha)\leqslant z^-(\omega,\alpha)\leqslant z^{-}_{\sup}(\alpha).$$

Умножим это неравенство на весовую функцию $p(\omega)>0$ и проинтегрируем по области Ω. Тогда

$$z^{-}_{\inf}(\alpha)\int\limits_{\Omega}p(\omega)d\omega\leqslant\int\limits_{\Omega}z^-(\omega,\alpha)p(\omega)d\omega\leqslant z^{-}_{\sup}(\alpha)\int\limits_{\Omega}p(\omega)d\omega.$$

Отсюда согласно (3) получим требуемое. Аналогично для индексов с плюсом.

Так, в данном случае выполняется условие промежуточности, характерное для средних (граничное условие (iv)). Кроме того, имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Оператор осреднения $M_p: J_\omega\to J$ является аддитивным и однородным.*

Доказательство. Покажем аддитивность. Пусть $\tilde{z}_1(\omega)$, $\tilde{z}_2(\omega)$ — две нечеткие функции из J_ω. Фиксируем $\alpha\in[0,1]$ и $\omega\in\Omega$. По определению левый индекс суммы нечетких чисел $\tilde{z}_1(\omega)+\tilde{z}_2(\omega)$ равен

$$\big[\tilde{z}_1(\omega)+\tilde{z}_2(\omega)\big]^-(\alpha)=z_1^-(\omega,\alpha)+z_2^-(\omega,\alpha).$$

Умножим это соотношение на $p(\omega)$ и проинтегрируем по области Ω. Используя аддитивность интеграла Лебега, получим

$$\Big[M_p\big(\tilde{z}_1(\omega)+\tilde{z}_2(\omega)\big)\Big]^-(\alpha)=\int\limits_{\Omega}\Big(z_1^-(\omega,\alpha)+z_2^-(\omega,\alpha)\Big)p(\omega)d\omega=$$
$$=\int\limits_{\Omega}z_1^-(\omega,\alpha)p(\omega)d\omega+\int\limits_{\Omega}z_2^-(\omega,\alpha)p(\omega)d\omega=\Big[M_p\big(\tilde{z}_1(\omega)\big)^-(\alpha)+M_p\big(\tilde{z}_2(\omega)\big)\Big]^-(\alpha);$$

аналогично для правых индексов. Это влечет аддитивность оператора осреднения M_p.

Проверим однородность. Пусть k — положительное число. По определению умножения на нечеткое число левый индекс нечеткого числа $k\tilde{z}(\omega)$ равен $kz^-(\omega,\alpha)$, а правый — $kz^+(\omega,\alpha)$. Умножая эти выражения на $p(\omega)$, интегрируя по области Ω и используя однородность интеграла Лебега, получим равенство левых и правых индексов нечетких чисел $M_p(k\tilde{z}(\omega))$ и $kM_p(\tilde{z}(\omega))$. Тогда $M_p(k\tilde{z}(\omega))=kM_p(\tilde{z}(\omega))$.

В случае $k<0$ получим, что левый индекс нечеткого числа $k\tilde{z}(\omega)$ равен $kz^+(\omega,\alpha)$, а правый — $kz^-(\omega,\alpha)$. Умножим эти выражения на $p(\omega)$, а затем проинтегрируем по области Ω. Полученные результаты совпадут соответственно с левым и правым индексами нечеткого числа $M_p(k\tilde{z}(\omega))$, а в силу однородности интеграла Лебега с левым и правым индексами нечеткого числа $kM_p(\tilde{z}(\omega))$. $\square$

Отметим, что линейным среднее M_p назвать нельзя, поскольку множество J не обладает линейной структурой.

Для фиксированной нечеткой функции $\tilde{z}(\omega)\in J_\omega$ рассмотрим экстремальную задачу

$$\int\limits_0^1\int\limits_{\Omega}\Big(\big(z^-(\omega,\alpha)-v^-(\alpha)\big)^2+\big(z^+(\omega,\alpha)-v^+(\alpha)\big)^2\Big)p(\omega)\,d\omega\,d\alpha\to\min\quad\forall\tilde{v}\in J. \tag{7}$$

Здесь $z^{\pm}(\omega,\alpha)$ и $v^{\pm}(\alpha)$ — индексы нечетких чисел $\tilde{z}(\omega)$ и $\tilde{v}$.

Теорема 3. *Решение задачи (7) дает нечеткое число $M_p(\tilde{z}(\omega))$.*

Доказательство. Покажем, что

$$\int_0^1 \int_\Omega \Big(\big(z^-(\omega,\alpha) - z_p^-(\alpha)\big)^2 + \big(z^+(\omega,\alpha) - z_p^+(\alpha)\big)^2 \Big) p(\omega)\, d\omega\, d\alpha \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^1 \int_\Omega \Big(\big(z^-(\omega,\alpha) - v^-(\alpha)\big)^2 + \big(z^+(\omega,\alpha) - v^+(\alpha)\big)^2 \Big) p(\omega)\, d\omega\, d\alpha \quad \forall \tilde{v} \in J, \quad (8)$$

где $z_p^\pm(\alpha)$ определяются формулами (3).

Фиксируем произвольное нечеткое число $\tilde{v} \in J$ и преобразуем подынтегральное выражение в правой части (8):

$$\Big(z^-(\omega,\alpha) - z_p^-(\alpha) + z_p^-(\alpha) - v^-(\alpha)\Big)^2 + \big(z^+(\omega,\alpha) - z_p^+(\alpha) + z_p^+(\alpha) - v^+(\alpha)\big)^2 =$$
$$= \big(z^-(\omega,\alpha) - z_p^-(\alpha)\big)^2 + \big(z_p^-(\alpha) - v^-(\alpha)\big)^2 + \big(z^+(\omega,\alpha) - z_p^+(\alpha)\big)^2 + \big(z_p^+(\alpha) - v^+(\alpha)\big)^2 +$$
$$+ 2\big(z^-(\omega,\alpha) - z_p^-(\alpha)\big)\big(z_p^-(\alpha) - v^-(\alpha)\big) + 2\big(z^+(\omega,\alpha) - z_p^+(\alpha)\big)\big(z_p^+(\alpha) - v^+(\alpha)\big).$$

Умножим обе части полученного равенства на $p(\omega) > 0$ и проинтегрируем по области Ω. Заметим, что

$$\int_\Omega \big(z^-(\omega,\alpha) - z_p^-(\alpha)\big)\big(z_p^-(\alpha) - v^-(\alpha)\big) p(\omega) d\omega = \big(z_p^-(\alpha) - v^-(\alpha)\big) \int_\Omega \big(z^-(\omega,\alpha) - z_p^-(\alpha)\big) p(\omega) d\omega = 0$$

по определению (3) индекса $z_p^-(\alpha)$. Аналогично для индексов с плюсом. Тогда

$$\int_\Omega \Big(\big(z^-(\omega,\alpha) - v^-(\alpha)\big)^2 + \big(z^+(\omega,\alpha) - v^+(\alpha)\big)^2 \Big) p(\omega) d\omega =$$
$$= \int_\Omega \Big(\big(z^-(\omega,\alpha) - z^-(\alpha)\big)^2 + \big(z^+(\omega,\alpha) - z^+(\alpha)\big)^2 \Big) p(\omega) d\omega + p_0 \big(z^-(\alpha) - v^-(\alpha)\big)^2 + p_0 \big(z^+(\alpha) - v^+(\alpha)\big)^2.$$

Интегрируя это равенство по α от 0 до 1, получим требуемое неравенство (8), а значит, утверждение теоремы. □

Теорема 3 обобщает экстремальное свойство числового среднего арифметического вещественных чисел (см. [2, гл. I]). Она характеризует некоторую равномерность приближения параметрического семейства нечетких чисел $\tilde{z}(\omega)$ посредством нечеткого интегрального среднего $M_p(\tilde{z}(\omega))$. В дискретном случае такого рода результат содержится в работе автора [7].

Пример 1. Пусть при каждом $\omega \in \Omega$ нечеткое число $\tilde{z}(\omega)$ имеет треугольный вид $(a(\omega), b(\omega), c(\omega))$, где $a(\omega)$, $b(\omega)$, $c(\omega)$ — квадратично суммируемые числовые функции. Иными словами, его функция принадлежности при любом $\omega \in \Omega$ описывается формулой

$$\mu_{\tilde{z}(\omega)}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - a(\omega)}{b(\omega) - a(\omega)}, & \text{если } x \in \big[a(\omega),\ b(\omega)\big]; \\ \dfrac{x - c(\omega)}{b(\omega) - c(\omega)}, & \text{если } x \in \big[b(\omega),\ c(\omega)\big]; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В этом случае

$$z^-(\omega,\alpha) = (1-\alpha)a(\omega) + \alpha b(\omega), \quad z^+(\omega,\alpha) = (1-\alpha)c(\omega) + \alpha b(\omega).$$

Тогда интегральное нечеткое среднее $M_p(\tilde{z}(\omega))$ описывается формулами

$$\big[M_p(\tilde{z}(\omega))\big]^-(\alpha) = \frac{(1-\alpha)}{p_0}\int\limits_\Omega a(\omega)p(\omega)d\omega + \frac{\alpha}{p_0}\int\limits_\Omega b(\omega)p(\omega)d\omega,$$

$$\big[M_p(\tilde{z}(\omega))\big]^+(\alpha) = \frac{(1-\alpha)}{p_0}\int\limits_\Omega c(\omega)p(\omega)d\omega + \frac{\alpha}{p_0}\int\limits_\Omega b(\omega)p(\omega)d\omega.$$

3. Нелинейные нечеткие интегральные средние. Пусть $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — непрерывная строго монотонная функция. Для заданной нечеткой функции $\tilde{z}(\omega)\in\tilde{C}_\omega$ с индексами $z^\pm(\omega,\alpha)$ положим

$$z^-_{\phi,p}(\alpha) = \phi^{-1}\left(\frac{1}{p_0}\int\limits_\Omega \big(\phi(z^-(\omega,\alpha))\big)p(\omega)d\omega\right), \quad z^+_{\phi,p}(\alpha) = \phi^{-1}\left(\frac{1}{p_0}\int\limits_\Omega \big(\phi(z^+(\omega,\alpha))\big)p(\omega)d\omega\right). \quad (9)$$

Ниже будем рассматривать положительные нечеткие функции $\tilde{z}(\omega)$, для которых $z^-(\omega,\alpha)>0$ для почти всех $\omega\in\Omega$ и всех $\alpha\in[0,1]$.

Нечеткое число с индексами, задаваемыми формулами (9), назовем нелинейным нечетким средним, ассоциированным с определяющей функцией ϕ, и обозначим $M_{\phi,p}(\tilde{z}(\omega))$. Его индексы обозначим $\big[M_{\phi,p}(\tilde{z}(\omega))\big]^\pm(\alpha)$. Ниже индекс p, подчеркивающий роль весовой функции $p(x)$, будем опускать и писать $M_\phi(\tilde{z}(\omega))$.

В случае определяющей функции $\phi_m(x)=x^m$, $m>1$, в (9) получим нечеткий аналог непрерывного среднего степенного (ср. [2, гл. 1]), в случае $\phi_G(x)=\ln(x)$ — аналог непрерывного среднего геометрического, в случае $\phi_H(x)=1/x$ — нечеткий аналог непрерывного среднего гармонического.

Определим понятие функции от нечеткого числа, используя интервальный подход. Пусть задана непрерывная монотонно возрастающая (монотонно убывающая) вещественная функция $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Приведем в удобном для нас виде формулировку результата из [16].

Лемма 1. *Если $\tilde{z}$ — нечеткое число с левым и правым индексами $z^-(\alpha)$ и $z^+(\alpha)$ и $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — непрерывная монотонно возрастающая функция, то $\phi(z^-(\alpha))$ и $\phi(z^+(\alpha))$ суть левый и правый индексы нечеткого числа $\phi(\tilde{z})$ соответственно. Если $\phi(x)$ — непрерывная монотонно убывающая функция, то $\phi(z^+(\alpha))$ и $\phi(z^-(\alpha))$ — левый и правый индексы $\phi(\tilde{z})$ соответственно.*

Из леммы 1 вытекает следующий факт.

Лемма 2. *Нелинейное нечеткое интегральное среднее, определяемое формулой* (9), *можно представить в виде*

$$M_\phi(\tilde{z}(\omega)) = \phi^{-1}\big(M_p(\phi(\tilde{z}(\omega)))\big).$$

Обозначим через $\tilde{C}$ класс нечетких чисел, индексы которых непрерывны. Метрику на нем зададим формулой (1). Введем в рассмотрение множество $\tilde{C}_\omega$ нечетких функций вида $\tilde{z}(\omega)$ с непрерывными на $[0,1]\times\Omega$ индексами $z^\pm(\omega,\alpha)$. На множестве $\tilde{C}_\omega$ будем рассматривать метрику, определяемую для $\tilde{z}_1(\omega)$ и $\tilde{z}_1(\omega)\in\tilde{C}_\omega$ равенством

$$d(\tilde{z}_1(\omega),\tilde{z}_2(\omega)) = \sup_{\substack{\alpha\in[0,1]\\ \omega\in\Omega}}\max\Big\{\big|z_1^+(\omega,\alpha)-z_2^+(\omega,\alpha)\big|,\ \big|z_1^-(\omega,\alpha)-z_2^-(\omega,\alpha)\big|\Big\}. \quad (10)$$

Теорема 4. *Нелинейное нечеткое интегральное среднее, характеризуемое формулой* (9), *обладает следующими свойствами регулярности*:

(i) *идемпотентность*: *если $\tilde{z}(\omega)=\tilde{z}$ для почти всех $\omega\in\Omega$, то*

$$M_\phi\big(\tilde{z}(\omega)\big)=\tilde{z};$$

(ii) *монотонность*: *если для двух нечетких функций $\tilde{z}_1(\omega)$, $\tilde{z}_2(\omega)\in\tilde{C}_\omega$ при почти всех $\omega\in\Omega$ выполнены условия $\tilde{z}_1(\omega)\prec\tilde{z}_2(\omega)$, то*

$$M_\phi\big(\tilde{z}_1(\omega)\big)\prec M_\phi\big(\tilde{z}_2(\omega)\big);$$

(iii) *непрерывность*: *нелинейный нечеткий интегральный усредняющий оператор* $M_\phi : \tilde{C}_\omega \to \tilde{C}$ *непрерывен*;

(iv) *эффективность*: *если* $\tilde{z}_1(\omega)$, $\tilde{z}_2(\omega)$, $\tilde{z}_3(\omega) \in \tilde{C}_\omega$ *и* $\tilde{z}_1(\omega) \prec \tilde{z}_2(\omega)$ *при почти всех* $\omega \in \Omega$, *то*

$$M_\phi\big(\tilde{z}_1(\omega) + \tilde{z}_3(\omega)\big) \prec M_\phi\big(\tilde{z}_2(\omega) + \tilde{z}_3(\omega)\big).$$

Доказательство. Рассмотрим случай монотонного возрастания функции ϕ. Свойство (i) вытекает из определения (9), поскольку

$$\big[M_\phi(\tilde{z})\big]^-(\alpha) = \phi^{-1}\left(\frac{1}{p_0}\int\limits_\Omega \phi\big(z^-(\alpha)\big)p(\omega)d\omega\right) = \phi^{-1}\left(\frac{1}{p_0}\phi(z^-(\alpha))\int\limits_\Omega p(\omega)d\omega\right) = \\ = \phi^{-1}\big(\phi(z^-(\alpha))\big) = z^-(\alpha).$$

Аналогично,

$$\big[M_\phi(\tilde{z})\big]^+(\alpha) = \phi^{-1}\left(\frac{1}{p_0}\int\limits_\Omega \phi(z^+(\alpha))p(\omega)d\omega\right) = z^+(\alpha).$$

(ii) Рассмотрим случай монотонного возрастания функции ϕ. По условию

$$z_1^-(\omega,\alpha) \leqslant z_2^-(\omega,\alpha), \quad z_1^+(\omega,\alpha) \leqslant z_2^+(\omega,\alpha)$$

для всех $\alpha \in (0,1]$ и почти всех $\omega \in \Omega$. Тогда

$$\phi(z_1^-(\omega,\alpha)) \leqslant \phi(z_2^-(\omega,\alpha)).$$

Умножим обе части полученного неравенства на $p(\omega) > 0$ и проинтегрируем полученное неравенства по области Ω. Тогда

$$\int\limits_\Omega p(\omega)\phi\big(z_1^-(\omega,\alpha)\big)d\omega \leqslant \int\limits_\Omega p(\omega)\phi\big(z_2^-(\omega,\alpha)\big)d\omega.$$

Поскольку ϕ^{-1} возрастает вместе с ϕ, то

$$\big[M_\phi(\tilde{z}_1(\omega))\big]^-(\alpha) \leqslant \big[M_\phi(\tilde{z}_2(\omega))\big]^-(\alpha);$$

аналогично для индексов с плюсом. Отсюда вытекает свойство монотонности в случае монотонного возрастания функции ϕ. Случай монотонного убывания функции ϕ рассматривается аналогично.

Доказательство свойства (iii) с учетом определения метрик (1) и (10) проводится отдельно для индексов M_ϕ^- и M_ϕ^+ стандартными для скалярных функций методами и обеспечивается непрерывностью функции ϕ.

Свойство (iv) вытекает из свойства (iii), поскольку соотношение $\tilde{z}_1(\omega) \prec \tilde{z}_2(\omega)$ в силу (2) влечет

$$\tilde{z}_1(\omega) + \tilde{z}_3(\omega) \prec \tilde{z}_2(\omega) + \tilde{z}_3(\omega).$$ □

Экстремальное свойство для нелинейного нечеткого среднего M_ϕ имеет следующий вид.

Предложение 3. *Для заданной нечеткой функции* $\tilde{z}(\omega)$ *из* $\tilde{C}_\omega$ *нечеткое число* $\phi(M_\phi(\tilde{z}(\omega)))$ *является решением следующей экстремальной задачи*:

$$\int\limits_0^1\int\limits_\Omega \Big(\big(\phi(z^-(\omega,\alpha)) - v^-(\alpha)\big)^2 + \big(\phi(z^+(\omega,\alpha)) - v^+(\alpha)\big)^2\Big)p(\omega)\,d\omega\,d\alpha \to \min \quad \forall \tilde{v} \in J.$$

Это утверждение следует из определения (9) величины M_ϕ, леммы 2 и теоремы 3.

Граничное условие, аналогичное предложению 2, выполняется в следующей форме.

Предложение 4. *Пусть* $\tilde{z}(\omega)$ — *нечеткая функция из* $\tilde{C}_\omega$, *индексы которой ограничены по* ω *при каждом* $\alpha \in [0,1]$. *Тогда нелинейное нечеткое интегральное среднее* M_ϕ, *определенное формулой* (9), *удовлетворяет соотношению*

$$z_{\inf}^\pm(\alpha) \leqslant \big[M_\phi(\tilde{z}(\omega))\big]^\pm(\alpha) \leqslant z_{\sup}^\pm(\alpha) \quad \forall \alpha \in [0,1],$$

где использованы обозначения из (6).

Доказательство. Действительно, пусть функция ϕ строго монотонно возрастает. Рассмотрим случай левых индексов. По определению (6) имеем

$$z^-_{\inf}(\alpha) \leqslant z^-(\omega,\alpha) \leqslant z^-_{\sup}(\alpha).$$

В силу монотонного возрастания функции ϕ

$$\phi\big(z^-_{\inf}(\alpha)\big) \leqslant \phi\big(z^-(\omega,\alpha)\big) \leqslant \phi\big(z^-_{\sup}(\alpha)\big).$$

Умножим это неравенство на весовую функцию $p(\omega) > 0$ и проинтегрируем по области Ω. Тогда

$$\phi\big(z^-_{\inf}(\alpha)\big) \int\limits_{\Omega} p(\omega)d\omega \leqslant \int\limits_{\Omega} \phi\big(z^-(\omega,\alpha)\big)p(\omega)d\omega \leqslant \phi\big(z^-_{\sup}(\alpha)\big) \int\limits_{\Omega} p(\omega)d\omega.$$

Отсюда

$$\phi\big(z^-_{\inf}(\alpha)\big) \leqslant \frac{1}{p_0} \int\limits_{\Omega} \phi\big(z^-(\omega,\alpha)\big)p(\omega)d\omega \leqslant \phi\big(z^-_{\sup}(\alpha)\big).$$

Учитывая, что ϕ^{-1} монотонно возрастает вместе с ϕ, получим требуемое. Аналогично для индексов с плюсом. В случае строгого монотонного убывания функции ϕ доказательство проводится близкими рассуждениями. □

Рассмотрим соотношение доминирования между $M_\phi(\tilde z(\omega))$ и $M_p(\tilde z(\omega))$ для заданной нечеткой функции $\tilde z(\omega)$ при различных определяющих функциях ϕ.

Теорема 5. *Пусть $\phi(x)$ — выпуклая вниз (вогнутая) непрерывная возрастающая функция либо выпуклая вверх непрерывная убывающая функция. Тогда для $\tilde z(\omega) \in \tilde C_\omega$ справедливо соотношение*

$$M_p\big(\tilde z(\omega)\big) \prec M_\phi\big(\tilde z(\omega)\big).$$

Если $\phi(x)$ — непрерывная выпуклая вниз строго убывающая функция либо выпуклая вверх строго возрастающая функция, то

$$M_\phi\big(\tilde z(\omega)\big) \prec M_p\big(\tilde z(\omega)\big).$$

Доказательство. Рассмотрим первый случай. Требуется показать, что

$$z^-_p(\alpha) \leqslant z^-_\phi(\alpha), \quad z^+_p(\alpha) \leqslant z^+_\phi(\alpha) \quad \forall \alpha \in (0,1], \tag{11}$$

где $z^{\pm}(\alpha)$ определяются формулами (3), а $z^{\pm}_\phi(\alpha)$ — формулами (9).

Приведем рассуждения для левых индексов. Зафиксируем $\alpha \in (0,1]$. В силу выпуклости вверх функции ϕ согласно неравенству Иенсена (см. [6, гл. III]) имеем

$$\int\limits_{\Omega} \phi\big(z^-(\omega,\alpha)\big)p(\omega)d\omega \leqslant \phi\left(\int\limits_{\Omega} \big(z^-(\omega,\alpha)p(\omega)d\omega\big)\right).$$

Так как согласно предположению функция ϕ строго монотонно возрастает, такой же будет и обратная ϕ^{-1}. Тогда предыдущее неравенство влечет

$$\phi^{-1}\left(\int\limits_{\Omega} \phi\big(z^-(\omega,\alpha)\big)p(\omega)d\omega\right) \leqslant \int\limits_{\Omega} z^-(\omega,\alpha)p(\omega)d\omega \quad \forall \alpha \in [0,1],$$

т.е. левую часть формулы (11). Аналогично для индексов с плюсом. □

В случае, если $\phi(x) = \ln(x)$ (при $x > 0$ — выпуклая вверх строго монотонно возрастающая функция), теорема 5 дает аналог известного неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим (см. [6, гл. I]). Если $\phi(x) = 1/x$ (при $x > 0$ — выпуклая вниз строго монотонно убывающая функция), получаем аналог неравенства между средним арифметическим и средним гармоническим, а если $\phi(x) = x^p$, $p > 1$ (при $x > 0$ — выпуклая вниз, строго возрастающая функция) — имеем аналог неравенства между средним арифметическим и средним степенным.

4. Дефазификация нечеткого интегрального среднего. Как известно, среднее нечеткого числа при интервальном подходе определяется равенством (см. [11])

$$z_{\text{ср}} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \bigl(z^-(\alpha) + z^+(\alpha)\bigr)d\alpha.$$

В связи с этим определим усредняющий функционал для нечеткой функции $\tilde{z}(\omega) \in J_\omega$ формулой

$$l_p(\tilde{z}(\omega)) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \Bigl(\bigl[M_p(\tilde{z}(\omega))\bigr]^-(\alpha) + \bigl[M_p(\tilde{z}(\omega))\bigr]^+(\alpha)\Bigr)d\alpha, \tag{12}$$

где $M_p^\pm(\alpha)$ — индексы нечеткого интегрального среднего $M_p(\tilde{z}(\omega))$, задаваемые формулой (3).

Теорема 6. *Усредняющий функционал $l_p : J_\omega \to \mathbb{R}$, определяемый формулой* (12), *обладает следующими свойствами регулярности*:

(i) *идемпотентность*: *если $\tilde{z}(\omega) = \tilde{z}$ для почти всех $\omega \in \Omega$, то*
$$l_p\bigl(\tilde{z}(\omega)\bigr) = z_{cp};$$
(ii) *монотонность*: *если для двух нечетких функций $\tilde{z}_1(\omega)$, $\tilde{z}_2(\omega) \in J_\omega$ выполнено условие $\tilde{z}_1(\omega) \prec \tilde{z}_2(\omega)$ для почти всех $\omega \in \Omega$, то*
$$l_p\bigl(\tilde{z}_1(\omega)\bigr) \leqslant l_p\bigl(\tilde{z}_2(\omega)\bigr);$$
(iii) *непрерывность*: *функционал $l_p : J_\omega \to \mathbb{R}$ непрерывен*;

(iv) *эффективность*: *если $\tilde{z}_1(\omega), \tilde{z}_2(\omega), \tilde{z}_3(\omega) \in J_\omega$ и $\tilde{z}_1(\omega) \prec \tilde{z}_2(\omega)$ при почти всех $\omega \in \Omega$, то*
$$l_p\bigl(\tilde{z}_1(\omega) + \tilde{z}_3(\omega)\bigr) \prec l_p\bigl(\tilde{z}_2(\omega) + \tilde{z}_3(\omega)\bigr).$$

Доказательство следует из теоремы 1 с учетом определения (12).

Граничное условие (iv) в случае (12) понимается так. Определим для заданной ограниченной на $\Omega \times [0,1]$ нечеткой функции $\tilde{z}(\omega)$ числа

$$z^\pm_{\text{inf}} = \inf_{\substack{\omega\in\Omega \\ \alpha\in[0,1]}} z^\pm(\omega,\alpha), \quad z^\pm_{\text{sup}} = \sup_{\substack{\omega\in\Omega \\ \alpha\in[0,1]}} z^\pm(\omega,\alpha).$$

Предложение 5. *Для заданной измеримой и ограниченной на $\Omega \times [0,1]$ нечеткой функции $\tilde{z}(\omega)$ справедливо соотношение*

$$\frac{1}{2}\bigl(z^-_{\text{inf}} + z^+_{\text{inf}}\bigr) \leqslant l_p\bigl(\tilde{z}(\omega)\bigr) \leqslant \frac{1}{2}\bigl(z^-_{\text{sup}} + z^+_{\text{sup}}\bigr).$$

Предложение 6. *Усредняющий функционал $l_p : J_\omega \to \mathbb{R}$, определяемый формулой* (12), *аддитивен и однороден.*

Это утверждение является следствием теоремы 2 и определения (12) усредняющего функционала l_p.

Экстремальное свойство для функционала (12) принимает следующий вид.

Предложение 7. *Для заданной нечеткой функции $\tilde{z}(\omega) \in J_\omega$ число $l_p(\tilde{z}(\omega))$ является решением следующей экстремальной задачи*:

$$\delta_{\tilde{z}}(y) = \int\limits_0^1 \int\limits_\Omega \Bigl(\bigl(z^-(\omega,\alpha) - y\bigr)^2 + \bigl(z^+(\omega,\alpha) - y\bigr)^2\Bigr)p(\omega)\,d\omega\,d\alpha \to \min \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Доказательство следует из достаточного признака минимума дифференцируемой функции $\delta_{\tilde{z}}(y)$ с учетом определения $l_p(\tilde{z}(\omega))$.

Пример 2. В условиях примера 1 значение функционала $l_p(\tilde{z}(\omega))$ имеет вид

$$l_p(\tilde{z}(\omega)) = \frac{1}{4p_0}\left(\int\limits_\Omega \bigl(a(\omega) + c(\omega)\bigr)p(\omega)d\omega + 2\int\limits_\Omega b(\omega)p(\omega)d\omega\right).$$

Определим нелинейный усредняющий функционал для нечеткой функции $\tilde{z}(\omega) \in \tilde{C}_\omega$ и заданной строго монотонной непрерывной функции $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ по формуле

$$f_\phi(\tilde{z}(\omega)) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \Big(\big[M_\phi(\tilde{z}(\omega))\big]^-(\alpha) + \big[M_\phi(\tilde{z}(\omega))\big]^+(\alpha)\Big)d\alpha, \tag{13}$$

где $M_\phi^\pm$ определяются выражениями (9).

Теорема 7. *Нелинейный усредняющий функционал* $f_\phi : \tilde{C}_\omega \to \mathbb{R}$, *определяемый формулой* (13), *удовлетворяет следующим условиям регулярности*:

(i) *идемпотентность*: *если* $\tilde{z}(\omega) = \tilde{z}$ *при почти всех* $\omega \in \Omega$, *то*

$$f_\phi\big(\tilde{z}(\omega)\big) = z_{cp};$$

(ii) *монотонность*: *если для двух нечетких функций* $\tilde{z}_1(\omega)$, $\tilde{z}_2(\omega) \in \tilde{C}_\omega$ *выполнено условие* $\tilde{z}_1(\omega) \prec \tilde{z}_2(\omega)$ *при почти всех* $\omega \in \Omega$, *то*

$$f_\phi\big(\tilde{z}_1(\omega)\big) \leqslant f_\phi\big(\tilde{z}_2(\omega)\big);$$

(iii) *непрерывность*: *функционал* $f_\phi : \tilde{C}_\omega \to \mathbb{R}$ *непрерывен*;

(iv) *эффективность*: *если* $\tilde{z}_1(\omega)$, $\tilde{z}_2(\omega)$, $\tilde{z}_3(\omega) \in \tilde{C}_\omega$ *и* $\tilde{z}_1(\omega) \prec \tilde{z}_2(\omega)$, *то*

$$f_\phi\big(\tilde{z}_1(\omega) + \tilde{z}_3(\omega)\big) \prec f_\phi\big(\tilde{z}_2(\omega) + \tilde{z}_3(\omega)\big).$$

Доказательство следует из теоремы 4 с учетом определения нелинейного нечеткого усредняющего функционала (13).

Пример 3 (см. [1, гл. 4]). Пусть нечеткая функция $\tilde{y}(t)$ характеризует плотность непрерывного денежного потока $\tilde{x}(t)$ в том смысле, что

$$\tilde{x}(t) = \int\limits_0^t \tilde{y}(\tau)d\tau.$$

Интеграл в правой части означает нечеткое число с α-индексами $\int\limits_0^t y^-(\alpha,\tau)d\tau$, $\int\limits_0^t y^+(\alpha,\tau)d\tau$, где y^- и y^+ — α-индексы нечеткой функции $\tilde{y}$. Пусть δ — сила роста при непрерывном начислении процентов. Тогда к моменту времени t накопленная сумма составит величину

$$\tilde{s}(t) = \int\limits_0^t \tilde{y}(\tau)e^{\delta(t-\tau)}d\tau.$$

Соответственно, текущая стоимость потока платежей за промежуток времени $[0,T]$ составит величину

$$\tilde{p} = e^{-\delta T}\int\limits_0^T \tilde{y}(\tau)e^{\delta(T-\tau)}d\tau = \int\limits_0^T \tilde{y}(\tau)e^{-\delta\tau}d\tau.$$

Пусть при всех $\tau \in [0,1]$ величина $\tilde{y}(t)$ представляет собой треугольное нечеткое число $(y_1(\tau), y_2(\tau), y_3(\tau))$. Тогда $\tilde{p}$ — тоже треугольное число, причем его нечеткое интегральное среднее с весовой функцией $e^{-\delta\tau}$ согласно примеру 1 имеет вид

$$p^-(\alpha) = \frac{1-\alpha}{\gamma}\int\limits_0^T y_1(\tau)e^{-\delta\tau}d\tau + \frac{\alpha}{\gamma}\int\limits_0^T y_2(\tau)e^{-\delta\tau}d\tau,$$

$$p^+(\alpha) = \frac{1-\alpha}{\gamma}\int\limits_0^T y_3(\tau)e^{-\delta\tau}d\tau + \frac{\alpha}{\gamma}\int\limits_0^T y_2(\tau)e^{-\delta\tau}d\tau,$$

где

$$\gamma = \int_0^T e^{\delta t} dt = \frac{1}{\delta}(1 - e^{\delta T}).$$

Согласно примеру 2 дефазификация величины $\tilde{p}$ дает вещественное число

$$\frac{1}{4\gamma}\left(\int_0^T (y_1(\tau) + y_2(\tau))e^{-\delta\tau} d\tau + 2\int_0^T y_2(\tau)e^{-\delta\tau} d\tau\right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Волкова Е. С., Гисин В. Б.* Нечеткие множества и мягкие вычисления в экономике и финансах. — М.: КНОРУС, 2019.
2. *Джини К.* Средние величины. — Статистика, 1970.
3. *Леденева Т. М., Подвальный С. Л.* Агрегирование информации в оценочных системах// Вестн. ВГУ. Сер. Сист. анал. информ. технол. — 2016. — № 4. — С. 155–164.
4. *Пегат А.* Нечеткое моделирование и управление. — М.: Бином, 2015.
5. *Смоляк С. А.* Оценки эффективности инвестиционных проектов в условиях риска и неопределенности. — М.: Наука, 2002.
6. *Харди Г., Пойа Д., Литтлвуд Д.* Неравенства. — М.: МНЦНМО, 2008.
7. *Хацкевич В. Л.* О средних значениях нечетких чисел и их систем// Нечеткие системы и мягкие вычисления. — 2021. — *16*, № 1. — С. 5—20.
8. *Aumann R. J.* Integrals of set-valued functions// J. Math. Anal. Appl. — 1965. — *12*, № 1. — P. 1–12.
9. *Beliakov G., Bustince H., Calvo T.* A Practical Guide to Averaging Functions. — Cham: Springer, 2016.
10. *Diamond P., Kloeden P.* Metric spaces of fuzzy sets// Fuzzy Sets Syst. — 1990. — *35*, № 2. — P. 241–249.
11. *Dubois D., Prade H.* The mean value of fuzzy number// Fuzzy Sets Syst. — 1987. — *24*, № 3. — P. 279–300.
12. *Kwak K., Pedrycz W.* Face recognition: A study in information fusion using fuzzy integral// Patt. Recog. Lett. — 2005. — *26*. — P. 719–733.
13. *Kaleva O.* Fuzzy differential equations// Fuzzy Sets Syst.. — *24*, № 3. — P. 301–317.
14. *Kaleva O., Seikkala S.* On fuzzy metric spaces// Fuzzy Sets Syst. — 1984. — *12*. — P. 215–229.
15. *Mesiar R., Kolesarova A., Calvo T., Komornakova M.* A review of aggregation functions// Stud. Fuzz. Soft Comput. — 2008. — *220*. — P. 121–144.
16. *Nguyen H. T.* A note on the extension principle for fuzzy sets// J. Math. Anal. Appl. — 1978. — *64*. — P. 369–380.
17. *Roldin A. F. L., Bustince H., Fernandez J., Rodriguez I., Fardoun H., Lafuente J.* Affine construction methodology of aggregation functions// Fuzzy Sets Syst. — 2021. — *414*. — P. 146–164.
18. *Svistula M.* A note on the Choquet integral as a set function on a locally compact space// Fuzzy Sets Syst. — 2022. — *430*. — P. 69–78.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Хацкевич Владимир Львович
Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, Воронеж
E-mail: vlkhats@mail.ru