ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 226 (2023). С. 165–169
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-226-165-169

УДК 519.62

ДОКАЗАТЕЛЬНЫЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ В ИССЛЕДОВАНИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

© 2023 г. **В. А. ШИШКИН**

Аннотация. Рассматривается приближённое решение задачи Коши для дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом. Если решение задачи существует, то вычислительный эксперимент позволяет доказать разрешимость и получить гарантированную оценку нормы погрешности приближённого решения.

Ключевые слова: задача Коши, дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом, оценка погрешности, доказательный вычислительный эксперимент.

EVIDENCE-BASED COMPUTATIONAL EXPERIMENT IN THE STUDY OF THE CAUCHY PROBLEM FOR A DIFFERENTIAL EQUATION WITH A DEVIATING ARGUMENT

© 2023 **V. A. SHISHKIN**

Abstract. An approximate solution of the Cauchy problem for a differential equation with a deviating argument is considered. If a solution of the problem exists, then the computational experiment makes it possible to prove the solvability and obtain a guaranteed estimate of the norm of the error for approximate solutions.

Keywords and phrases: Cauchy problem, differential equation with a deviating argument, error estimate, evidence-based computational experiment.

AMS Subject Classification: 65Q20

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом:

$$x'(t) - \sum_{i=1}^{N_1} p_i(t) z\big(h_i(t)\big) - \sum_{i=1}^{N_2} \int_{a_i}^{b_i} P_i(t,s) z(s)\, ds = f(t), \quad x(a) = x_a, \quad t \in [a,b], \tag{1a}$$

где функция $z(t)$ имеет вид

$$z(t) = \begin{cases} q_l(t), & t < a, \\ x(t), & a \leqslant t \leqslant b, \\ q_u(t), & t > b, \end{cases} \tag{1b}$$

В (1a) функции p_i, $i = 1, \ldots, N_1$, P_i, $i = 1, \ldots, N_2$, f, q_l и q_u — это функции, интегрируемые с квадратом на соответствующих областях (элементы соответствующего пространства L_2); h_i, $i = 1, \ldots, N_1$, — дифференцируемые кусочно монотонные на $[a, b]$ функции.

Функцию q_l в (1b) можно рассматривать как предысторию процесса x (а точнее, память о ней, хранящуюся в системе). Также она может быть интерпретирована как некоторая информация из прошлого, которая влияет на $x(t)$ — состояние исследуемой системы в момент времени t.

Функцию q_u в (1b) нельзя интерпретировать как постысторию x: будущее ещё не наступило и поэтому не может влиять на настоящее. Однако q_u может быть некоторым прогнозом, предположением, ожиданием, надеждой и т. п. — субъективным мнением исследователя о будущем. Именно поэтому в (1a) используется обозначение z вместо x: при $t < a$ и $t > b$ сама исследуемая система, состояние которой описывается с помощью x, может ещё или уже не существовать.

Проинтегрировав обе части (1a) от a до t, получим интегральное уравнение

$$x(t) - \sum_{i=1}^{N_1} \int_a^t p_i(s) z\big(h_i(s)\big)\, ds - \sum_{i=1}^{N_2} \int_a^t \int_{a_i}^{b_i} P_i(s,\hat{s}) z(\hat{s})\, d\hat{s}\, ds = x_a + \int_a^t f(s)\, ds, \quad t \in [a,b]. \tag{2}$$

По определению, h_i — кусочно монотонная функция. Введём на $[a,b]$ такую сетку

$$a = t_0^{(i)} < t_1^{(i)} < \dots < t_{n_i}^{(i)} = b,$$

чтобы внутри каждого подынтервала $[t_{j-1}^{(i)}, t_j^{(i)}]$, $j = 1, \dots, n_i$, функция h_i была монотонна и непрерывна. Тогда после замены переменной $s = h_{i,j}^{-1}(\hat{s})$ для $t_{j-1}^{(i)} \leqslant s \leqslant t_j^{(i)}$ получаем

$$\int_a^t p_i(s) z\big(h_i(s)\big)\, ds = \sum_{j=1}^{n_i} \int\limits_{\left[t_{j-1}^{(i)}, t_j^{(i)}\right] \cap [a,t]} p_i(s) z\big(h_i(s)\big)\, ds = \\ = \sum_{j=1}^{n_i} \int\limits_{h_{i,j}^{-1}\left(\left[t_{j-1}^{(i)}, t_j^{(i)}\right] \cap [a,t]\right)} p_i\big(h_{i,j}^{-1}(\hat{s})\big) h'_{i,j}(\hat{s}) z(\hat{s})\, d\hat{s}.$$

Введя обозначения

$$\begin{aligned} T_{j,l}^{(i)}(t) &= h_{i,j}^{-1}\big(\big[t_{j-1}^{(i)}, t_j^{(i)}\big] \cap [a,t]\big) \cap (-\infty, a], \\ T_{j,u}^{(i)}(t) &= h_{i,j}^{-1}\big(\big[t_{j-1}^{(i)}, t_j^{(i)}\big] \cap [a,t]\big) \cap [b, \infty), \\ T_j^{(i)}(t) &= h_{i,j}^{-1}\big(\big[t_{j-1}^{(i)}, t_j^{(i)}\big] \cap [a,t]\big) \cap [a,b], \end{aligned}$$

получим

$$\int_a^t p_i(s) z\big(h_i(s)\big)\, ds = \sum_{j=1}^{n_i} \Bigg(\int\limits_{T_{j,l}^{(i)}(t)} p_i\big(h_{i,j}^{-1}(\hat{s})\big) h'_{i,j}(\hat{s}) q_l(\hat{s})\, d\hat{s} + \\ + \int\limits_{T_{j,u}^{(i)}(t)} p_i\big(h_{i,j}^{-1}(\hat{s})\big) h'_{i,j}(\hat{s}) q_u(\hat{s})\, d\hat{s} + \int\limits_{T_j^{(i)}(t)} p_i\big(h_{i,j}^{-1}(\hat{s})\big) h'_{i,j}(\hat{s}) x(\hat{s})\, d\hat{s} \Bigg).$$

Изменение порядка интегрирования в двойном интеграле в (2) даёт

$$\int_a^t \int_{a_i}^{b_i} P_i(s,\hat{s}) z(\hat{s})\, d\hat{s}\, ds = \int_{a_i}^{b_i} \left(\int_a^t P_i(s,\hat{s})\, ds \right) z(\hat{s})\, d\hat{s} = \int_{a_i}^{b_i} \tilde{P}_i(t,s) z(s)\, ds$$

Введя обозначения

$$S_l^{(i)} = [a_i, b_i] \cap (-\infty, a], \quad S_u^{(i)} = [a_i, b_i] \cap [b, \infty), \quad S^{(i)} = [a_i, b_i] \cap [a,b],$$

запишем

$$\int_{a_i}^{b_i} \tilde{P}_i(t,s)z(s)\,ds = \int_{S_l^{(i)}} \tilde{P}_i(t,s)q_l(s)\,ds + \int_{S_u^{(i)}} \tilde{P}_i(t,s)q_u(s)\,ds + \int_{S^{(i)}} \tilde{P}_i(t,s)x(s)\,ds.$$

Таким образом, (2) может быть представлено в виде интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$x(t) - \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds = F(t), \tag{3}$$

с ядром

$$K(t,s) = \sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{n_i} \chi_{T_j^{(i)}(t)}(s)p_i\big(h_{i,j}^{-1}(s)\big)h'_{i,j}(s) + \sum_{i=1}^{N_2} \chi_{S^{(i)}}(s)\tilde{P}_i(t,s),$$

где χ_X — характеристическая функция множества X, и правой частью

$$F(t) = x_a + \int_a^t f(s)\,ds + \sum_{j=1}^{n_i}\left(\int_{T_{j,l}^{(i)}} p_i\big(h_{i,j}^{-1}(\hat{s})\big)h'_{i,j}(\hat{s})q_l(\hat{s})\,d\hat{s} + \int_{T_{j,u}^{(i)}} p_i\big(h_{i,j}^{-1}(\hat{s})\big)h'_{i,j}(\hat{s})q_u(\hat{s})\,d\hat{s}\right) + \\ + \sum_{i=1}^{N_2}\left(\int_{S_l^{(i)}} \tilde{P}_i(t,s)q_l(s)\,ds + \int_{S_u^{(i)}} \tilde{P}_i(t,s)q_u(s)\,ds\right).$$

Уравнение (3) в операторной форме имеет вид $x - Kx = F$, где интегральный оператор K — элемент линейного пространства операторов, отображающих пространство L_2 интегрируемых с квадратом функций в L_2.

2. Численное решение. Для приближённого решения уравнения (3) применим стандартный приём использования проекции в конечномерное пространство, заменив ядро $K(t,s)$ близким к нему по норме вырожденным ядром

$$\tilde{K}(t,s) = \sum_i u_i(t)v_i(s)$$

и сведя задачу к решению системы линейных алгебраических уравнений.

Введём на $[a,b]$ сетку $a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = b$ и определим на каждом отрезке $[\tau_{i-1},\tau_i]$, $i = 1,\dots,N$, ортогональную на $[\tau_{i-1},\tau_i]$ систему базисных функций $\{\phi_j^{(i)}\}$. Тогда

$$\tilde{K}(t,s) = \sum_{\substack{i_1=1,\dots,N\\ j_1=1,\dots,n}}\ \sum_{\substack{i_2=1,\dots,N\\ j_2=1,\dots,n}} c_{j_1j_2}^{(i_1i_2)}\hat{\phi}_{j_1}^{(i_1)}(t)\hat{\phi}_{j_2}^{(i_2)}(s). \tag{4}$$

Здесь $c_{j_1j_2}^{(i_1i_2)}$ — соответствующий $\phi_{j_1}^{(i_1)}(t)$ и $\phi_{j_2}^{(i_2)}(s)$ коэффициент разложения $K(t,s)$ в ряд Фурье на области $[\tau_{i_1-1},\tau_{i_1}]\times[\tau_{i_2-1},\tau_{i_2}]$; $\hat{\phi}_j^{(i)}(t)$ — обозначение для $\phi_j^{(i)}(t)\chi_{[\tau_{i-1},\tau_i]}(t)$.

Далее, заменив ядро $K(t,s)$ в (3) на вырожденное ядро (4), получим уравнение $\tilde{x} - \tilde{K}\tilde{x} = F$, решение которого сводится к решению соответствующей системы линейных алгебраических уравнений $AX = B$, где

$$A_{j_1j_2}^{(i_1i_2)} = \delta_{j_1j_2}^{(i_1i_2)} - c_{j_1j_2}^{(i_1i_2)}d_{j_1}^{(i_1)}, \quad X_{j_2}^{(i_2)} = \int_a^b \hat{\phi}_{j_2}^{(i_2)}(s)\tilde{x}(s)\,ds, \quad B_{j_1}^{(i_1)} = \int_a^b \hat{\phi}_{j_1}^{(i_1)}(t)F(t)\,dt.$$

Здесь $\delta_{j_1 j_2}^{(i_1 i_2)}$ — расширенный символ Кронекера, равный единице при $i_1 = i_2$ и $j_1 = j_2$ и нулю во всех остальных случаях; $d_j^{(i)}$ — квадрат нормы в L_2 базисной функции $\phi_j^{(i)}$ на $[\tau_{i-1}, \tau_i]$. Также

$$B_{j_1}^{(i_1)} = \sum_{\substack{i_2=1,\dots,N\\ j_2=1,\dots,n}} A_{j_1 j_2}^{(i_1 i_2)} X_{j_2}^{(i_2)}.$$

Пусть матрица A обратима и $X = A^{-1}B$. Тогда приближённое решение исходной задачи $\tilde{x} = (I - \tilde{K})^{-1}F$ можно представить в виде $\tilde{x} = F + \tilde{R}F$, где $\tilde{R}$ — резольвентный оператор с ядром

$$\tilde{R}(t,s) = \sum_{\substack{i_1=1,\dots,N\\ j_1=1,\dots,n}} \hat{\phi}_{j_1}^{(i_1)}(t) \sum_{\substack{i_2=1,\dots,N\\ j_2=1,\dots,n}} c_{j_1 j_2}^{(i_1 i_2)} \sum_{\substack{i_3=1,\dots,N\\ j_3=1,\dots,n}} (A^{-1})_{j_3 j_2}^{(i_3 i_2)} \hat{\phi}_{j_3}^{(i_3)}(s).$$

3. Доказательный вычислительный эксперимент. Заметим, что существование решения приближённого уравнения $\tilde{x} - \tilde{K}\tilde{x} = F$ ещё не означает разрешимости уравнения (3) и, следовательно, задачи (1a)–(1b). *Доказательный вычислительный эксперимент* (см. [1, гл. VI]) позволяет в случае существования решения задачи (1a)–(1b) *доказать* её разрешимость, а также получить *гарантированную* оценку погрешности найденного приближённого решения $\tilde{x}$. Одним из способов добиться этого является использование рациональной арифметики, при которой вычисления выполняются точно. Альтернатива — применение интервальной арифметики с направленным округлением результата.

Обозначим через $\mathbb{Q}_{\text{комп}}$ множество машинно-представимых рациональных чисел $x = x_1/x_2$, где $x_1 \in \mathbb{Z}$ (целое), $x_2 \in \mathbb{N}$ (натуральное), а длина x_1 и x_2 позволяет им умещаться в памяти вычислительного устройства. Функции и операции, отображающие $\mathbb{Q}_{\text{комп}}^m$ в $\mathbb{Q}_{\text{комп}}$ назовём машинно-вычислимыми (см. [3, разд. 1.3.2]).

Для проведения доказательного вычислительного эксперимента заменим (3) приближённым уравнением

$$\tilde{x}(t) - \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \tilde{K}(t,s)\tilde{x}(s)\,ds = \tilde{F}(t), \tag{5}$$

где $\tilde{a} = \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_N = \tilde{b}$ — элементы $\mathbb{Q}_{\text{комп}}$ ($\tilde{a} \leqslant a$, $b \leqslant \tilde{b}$); в качестве базисных функций ϕ_j^i будем использовать функции, отображающие $\mathbb{Q}_{\text{комп}}$ в $\mathbb{Q}_{\text{комп}}$, например, ортогональные многочлены Лежандра после соответствующего преобразования аргумента; ядро $K(t,s)$ и правая часть $F(t)$ уравнения (3) заменяются на машинно-вычислимые функции $\tilde{K}(t,s)$, аналогичную (4), и $\tilde{F}(t)$.

Так как по построению все числа в уравнении (5) — элементы множества $\mathbb{Q}_{\text{комп}}$, а функции отображают $\mathbb{Q}_{\text{комп}}$ в $\mathbb{Q}_{\text{комп}}$, то элементы матрицы A и вектора B, а также решение системы линейных алгебраических уравнений вычисляются *точно*. Решение $\tilde{x} = \tilde{F} + \tilde{R}\tilde{F}$ — *точное* решение уравнения (5).

Всегда можно построить обратимый оператор $I - \tilde{K}$. Если при этом выполняется неравенство

$$\|K - \tilde{K}\| < 1/\big\|(I - \tilde{K})^{-1}\big\|, \tag{6}$$

то оператор $I - K$ также обратим (см. [2, с. 207, теорема 4]): обратимость — *грубое* свойство.

Заметим, что данный подход не позволяет, вообще говоря, доказать отсутствие решения уравнения (3). Как бы ни были близки операторы K и $\tilde{K}$, всегда остаётся вероятность, что при повышении точности аппроксимации неравенствоЁ(6) будет выполнено.

Неравенство

$$\|x - \tilde{x}\| \leqslant \frac{\big\|(I - \tilde{K})^{-1}\big\|\Big(\|K - \tilde{K}\| \cdot \|\tilde{x}\| + \|F - \tilde{F}\|\Big)}{1 - \big\|(I - \tilde{K})^{-1}\big\|\|K - \tilde{K}\|}. \tag{7}$$

даёт оценку радиуса окрестности с центром в точке $\tilde{x}$, в которой (*гарантированно*!) находится решение исходной задачи x (см. [3, с. 47]).

При проверке неравенства (6) и оценке радиуса окрестности (7) нормы вычисляются точно ($\|\tilde{x}\|$) или заменяются *гарантированными* оценками сверху:

(a) норма обратного оператора $(I-\tilde{K})^{-1}$ заменяется оценкой сверху

$$\big\|(I-\tilde{K})^{-1}\big\| = \|I+\tilde{R}\| \leqslant 1+\|\tilde{R}\|,$$

причём $\|\tilde{R}\|^2$ вычисляется точно, так как $\tilde{R}$ — комбинация машинно-вычислимых функций;

(b) значения норм разностей $K-\tilde{K}$ и $F-\tilde{F}$ заменяются их оценками сверху (возможно, довольно грубыми)

$$\|K-\tilde{K}\|^2 \leqslant \sum_{i_1=1}^{N}\sum_{i_2=1}^{N} \max_{\substack{\tau_{i_1-1}\leqslant t\leqslant\tau_{i_1}\\ \tau_{i_2-1}\leqslant s\leqslant\tau_{i_2}}} \big(K(t,s)-\tilde{K}(t,s)\big)^2(\tau_{i_1}-\tau_{i_1-1})(\tau_{i_2}-\tau_{i_2-1}),$$

$$\|F-\tilde{F}\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{N} \max_{\tau_{i-1}\leqslant t\leqslant\tau_i} \big(F(t)-\tilde{F}(t)\big)^2(\tau_i-\tau_{i-1}).$$

В программной реализации на языке `C++` можно использовать библиотеку `GNU MP` (арифметика произвольной точности); при использовании `C#` — определённую в пространстве имён `System.Numerics` структуру `BigInteger`. Существенно ускорить вычисления позволяет применение распараллеливания вычислений (OpenMP и т. п.) на процессорах с соответствующей архитектурой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. — М.: Ин-т компьют. исслед., 2002.
2. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1984.
3. *Шишкин В. А.* Доказательный вычислительный эксперимент в исследовании вариационных задач для квадратичных функционалов / Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. — Пермь: Перм. гос. ун-т, 2009.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Шишкин Владимир Андреевич
Пермский государственный национальный исследовательский университет
E-mail: `vsh1791@mail.ru`