ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 231 (2024). С. 83–88
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-231-83-88

УДК 517.929

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ С ДИСКРЕТНЫМ ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

© 2024 г. **М. В. МУЛЮКОВ**

Аннотация. Рассматривается функционально-дифференциальное уравнение с дискретным запаздывающим аргументом, постоянным запаздыванием и слагаемым без запаздывания. Осуществлена редукция задачи об асимптотической устойчивости данного уравнения к задаче исследования спектра оператора сдвига по траекториям. Получены простые коэффициентные необходимые условия асимптотической устойчивости данного уравнения.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение, асимптотическая устойчивость, дискретный запаздывающий аргумент, гибридная система.

ON THE ASYMPTOTIC STABILITY OF ONE EQUATION WITH A DISCRETE RETARDED ARGUMENT

© 2024 **M. V. MULYUKOV**

Abstract. In this paper, we consider a functional differential equation with a discrete retarded argument, a constant delay, and a term without delay. The problem of the asymptotic stability of this equation is reduced to the problem of studying the spectrum of the operator of shift along trajectories. Simple coefficient necessary conditions for the asymptotic stability of this equation are obtained.

Keywords and phrases: functional differential equation, asymptotic stability, discrete retarded argument, hybrid system.

AMS Subject Classification: 34K06, 34K20, 34K25, 34K34

1. Введение. Настоящая работа посвящена асимптотической устойчивости уравнения

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + ax(t) + bx(t-1) + cx\big([t]\big) = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \\ x(t) = \psi(t), & t \in [-1, 0), \end{cases} \tag{1}$$

где $a, b, c \in \mathbb{R}$, начальная функция ψ считается суммируемой, а через $[\cdot]$ обозначена целая часть числа.

Непрерывно-дискретными системами функционально-дифференциальных уравнений называются такие системы, состояние которых описывается двумя группами взаимосвязанных переменных: одни переменные являются функциями непрерывного времени и удовлетворяют дифференциальным уравнениям; другие являются функциями дискретного времени и удовлетворяют разностным уравнениям. В настоящем исследовании мы также называем такие системы *гибридными*.

Дифференциальные уравнения, содержащие дискретный запаздывающий аргумент, интересны тем, что к ним сводятся некоторые гибридные системы. В частности, уравнение (1) эквивалентно

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00517.

следующей гибридной системе:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + ax(t) + bx(t-1) = y(n), \quad t \in [n, n+1), \\ x(t) = \psi(t), \quad t \in [-1, 0), \\ y(n) = -cx(n), \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2}$$

где $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Гибридные системы такого рода возникают при исследовании технических объектов с импульсным и цифровым управлением. Кроме того, такие гибридные системы используются для моделирования процессов экономической динамики, состояние которых описывается функцией непрерывного времени, однако управленческие решения принимаются дискретно по времени или наблюдения некоторых показателей доступны дискретно по времени [2].

Устойчивость гибридных систем исследуются следующими методами:

(i) подходы, основанные на метода Ляпунова (см. [2, 3, 7]);
(ii) принцип неподвижной точки (см. [10]0;
(iii) W-метод Азбелева (см. [5, 9]);
(iv) интегрирование по шагам и сведение гибридной системе к системе разностных уравнений (см. [4, 8, 11, 13–15]).

Отметим, что последний подход наиболее эффективно применяется для гибридных систем, в которых подсистема с непрерывным временем является системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Именно для этого класса систем данный подход позволяет получить необходимые и достаточные условия устойчивости в терминах коэффициентах системы.

Для гибридных систем, в которых подсистема с непрерывным временем является системой дифференциальных уравнений с запаздыванием, как правило, ограничиваются достаточными условиями устойчивости. Отметим, что система (2) при $b \neq 0$ относится именно к этому классу. Насколько известно автору работы, до сих пор не были разработаны методы получения коэффициентных необходимых и достаточных условий устойчивости для таких систем.

Задача Коши для уравнения (1) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + ax(t) + bx(t-1) + cx\big([t]\big) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ x(t) = \psi(t), \quad t \in [-1, 0), \\ x(0) = \alpha, \end{cases} \tag{3}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$.

Решение задачи Коши (3) $x = x(t)$ в пространстве локально абсолютно непрерывных вектор-функций существует и единственно (см. [1]).

Определение 1. Уравнение (1) называется асимптотически устойчивым, если

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$$

для любой суммируемой начальной функции ψ и любого вещественного α.

Определение 2. Уравнение (1) называется экспоненциально устойчивым, если для любой суммируемой начальной функции ψ и любого вещественного α существуют такие σ, $M > 0$, что $\big|x(t)\big| < Me^{-\sigma t}$ при $t \geqslant 0$.

Необходимые условия асимптотической устойчивости уравнения (1) в случае $a = 0$ были получены в [12].

Целью настоящей работы является сведение задачи об устойчивости (1) к задаче исследования спектра оператора сдвига по траекториям. Кроме того, мы ставим целью продемонстрировать эффективность этого подхода, использовав его для построения простого необходимого признака асимптотической устойчивости уравнения (1).

2. Основной результат. Ниже функцию $(e^x - 1)/x$ будем считать доопределённой в нуле по непрерывности.

Обозначим через $C[0,1]$ пространство непрерывных комплекснозначных функций $z : [0,1] \to \mathbb{C}$ с нормой

$$\|z\| = \sup_{t \in [0,1]} \bigl|z(t)\bigr|.$$

Определим оператор S, действующий в пространстве $C[0,1]$:

$$(Sx)(\tau) = x(1)\left(e^{-a\tau} - c\frac{1 - e^{-a\tau}}{a}\right) - be^{-a\tau}\int\limits_0^\tau x(s)e^{as}\,ds.$$

Рассмотрим функцию

$$F(\lambda) = \lambda + \frac{c\lambda}{a\lambda + b} - \left(1 + \frac{c\lambda}{a\lambda + b}\right)e^{-\frac{a\lambda + b}{\lambda}}.$$

Теорема 1. *Следующие утверждения эквивалентны*:

(i) *уравнение* (1) *асимптотически устойчиво*;

(ii) *уравнение* (1) *экспоненциально устойчиво*;

(iii) *спектральный радиус оператора S меньше единицы*;

(iv) *все корни уравнения $F(\lambda) = 0$ лежат внутри единичного круга.*

Доказательство. При любом $n \in \mathbb{N}_0$ обозначим решение уравнения (1) на отрезке $[n, n+1]$ через $x_n = x_n(\tau)$, где $\tau = t - n$. Очевидно,

$$x_0(\tau) = \alpha\left(e^{-a\tau} - c\frac{1 - e^{-a\tau}}{a}\right) - be^{-a\tau}\int\limits_0^\tau \psi(s-1)e^{as}\,ds.$$

Заметим, что $x_n \in C[0,1]$, причём $x_n(\tau) \in \mathbb{R}$. Для любого $n \geqslant 1$ справедливо равенство

$$x_n = Sx_{n-1} = \cdots = S^n x_0.$$

Изучим спектр оператора S. Непрерывный спектр оператора состоит из единственной точки $\lambda = 0$.

Точка λ является собственным числом оператора S в том и только том случае, если $\lambda \neq 0$ и краевая задача

$$\begin{cases} \dot{y}(\tau) + (a + b/\lambda)y(\tau) = -c, \quad \tau \in [0,1], \\ y(0) = 1, \\ y(1) = \lambda \end{cases} \tag{4}$$

разрешима в $C[0,1]$. Решение дифференциального уравнения задачи (4), удовлетворяющее условию $y(0) = 1$, имеет вид

$$y(\tau) = \left(1 + \frac{c}{a + b/\lambda}\right)e^{-(a+b/\lambda)\tau} - \frac{c}{a + b/\lambda}. \tag{5}$$

Для того, чтобы выполнялось условие $y(1) = \lambda$ необходимо и достаточно, чтобы λ являлось корнем уравнения $F(\lambda) = 0$.

Если $b = 0$, то

$$F(\lambda) = \lambda + c\frac{1 - e^{-a}}{a} - e^{-a};$$

следовательно, существует единственный корень $\tilde{\lambda}$ данной функции:

$$\tilde{\lambda} = e^{-a} - c\frac{1 - e^{-a}}{a}.$$

Предположим, что $b \neq 0$. В этом случае λ является собственным числом оператора S в том и только том случае, если

$$\lambda = -\frac{b}{a + \mu},$$

где μ — корень уравнения

$$\mu + a - c - ac\frac{1 - e^{-\mu}}{\mu} + (b + c)e^{-\mu} = 0. \tag{6}$$

Если $a = -\mu$, то из (6) вытекает равенство $b = 0$. Следовательно, $a \neq -\mu$, поэтому λ определён для любого корня уравнения (6) при $b \neq 0$.

Уравнение (6) является характеристическим уравнением дифференциального уравнения с распределённым запаздыванием:

$$\dot{x}(t) + (a - c)x(t) - ac\int\limits_{t-1}^{t} x(s)\, ds + (b + c)x(t - 1) = 0.$$

Дифференциальные уравнения такого типа хорошо исследованы (см. [6]); в частности, известно, что любому кругу в комплексной плоскости принадлежит конечное (или пустое) множество корней его характеристического уравнения (6). Следовательно, существует такой корень $\tilde{\lambda}$ функции F, что

$$|\tilde{\lambda}| = \frac{|b|}{\min|a + \mu_k|},$$

где $\{\mu_k\}$ — множество всех корней уравнения (6).

Итак, при любом b спектральный радиус оператора S удовлетворяет соотношению $\rho(S) = |\tilde{\lambda}|$.

Пусть $|\tilde{\lambda}| \geqslant 1$. Выберем две начальные функции

$$\psi_R(t) = \operatorname{Re}\tilde{y}(t + 1), \quad \psi_I(t) = \operatorname{Im}\tilde{y}(t + 1),$$

где $\tilde{y}$ — собственный вектор, соответствующий собственному числу $\tilde{\lambda}$.

Обозначим через x_R решение задачи Коши (3) при $\psi = \psi_R$ и $\alpha = \operatorname{Re}\tilde{\lambda}$, а через x_I — решение той же задачи Коши при $\psi = \psi_I$ и $\alpha = \operatorname{Im}\tilde{\lambda}$.

Согласно формуле (5) имеем

$$x_R(n) + ix_I(n) = \tilde{\lambda}^{n+1};$$

следовательно, по крайней мере одно из двух решений не стремится к нулю, то есть уравнение (1) не является асимптотически устойчивым.

Пусть $|\tilde{\lambda}| < 1$, тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что $\rho(S) < 1 - \varepsilon$.

Ниже норма оператора является индуцированной нормой.

Из формулы Бёрлинга—Гельфанда вытекает соотношение

$$\rho(S) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|S^n\|}.$$

Следовательно, существует такое N, что при $n \geqslant N$ имеем

$$\|S^n\| \leqslant \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n.$$

Далее,

$$\|x_{N+n}\| = \|S^n x_N\| \leqslant \|S^n\|\,\|x_N\| \leqslant (1 - \varepsilon/2)^n \|x_N\|;$$

следовательно, уравнение (1) является экспоненциально устойчивым. □

Заметим, что при $b \neq 0$ уравнение (1) асимптотически устойчиво в том и только том случае, если $|\mu + a| > |b|$ для любого корня уравнения (6).

Сформулируем простой необходимый признак асимптотической устойчивости уравнения (1).

Теорема 2. *Для того чтобы уравнение* (1) *было экспоненциально устойчивым, необходимо выполнения неравенств*

$$\begin{cases} a + b + c > 0, \\ c < (b - a)\cosh\dfrac{b - a}{2}. \end{cases}$$

Если при этом $b = 0$, то данные условия являются достаточными.

Доказательство. Если $a+b+c \leqslant 0$, то

$$F(1) = (a+b+c)\frac{1-e^{-(a+b)}}{a+b} \leqslant 0,$$

однако

$$\lim_{\substack{\lambda\to\infty \\ \lambda\in\mathbb{R}}} F(\lambda) = \infty;$$

следовательно, уравнение $F(\lambda)=0$ имеет по крайней мере один вещественный корень на множестве $[1;+\infty)$.

Пусть $c \geqslant v\cosh(v/2)$, где $v=b-a$. Тогда

$$-c > v\frac{1+e^v}{1-e^v};$$

следовательно,

$$F(-1) = -1-e^v - c\frac{1-e^v}{v} > 0;$$

однако,

$$\lim_{\substack{\lambda\to-\infty \\ \lambda\in\mathbb{R}}} F(\lambda) = -\infty;$$

следовательно, уравнение $F(\lambda)=0$ имеет по крайней мере один вещественный корень на множестве $(-\infty;-1]$.

Если $b=0$, то

$$\rho(S) = e^{-a} - c\frac{1-e^{-a}}{a}.$$

Неравенства $-1<\rho(S)<1$ эквивалентны

$$-1 < e^{-a} - c\frac{1-e^{-a}}{a} < 1.$$

Далее,

$$-1+e^{-a} < c\frac{1-e^{-a}}{a} < 1+e^{-a},$$

что эквивалентно $a+c<0$ и $c<a\coth(a/2)$. $\square$

В заключение отметим, что для построения необходимого и достаточного условия асимптотический устойчивости уравнения (1) необходимо исследовать не только случай, когда вещественные собственные значения оператора S принадлежат единичному кругу, но и случай, когда все комплексные собственные значения данного оператора принадлежит единичному кругу. Это актуальная задача, которая в настоящий момент не решена и выходит за рамки настоящей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991.
2. *Козлов Р. И., Козлова О. Р.* Исследование устойчивости нелинейных непрерывно-дискретных моделей экономической динамики методом ВФЛ. I// Изв. РАН. Теор. сист. управл. — 2009. — № 2. — С. 104–113.
3. *Козлов Р. И., Козлова О. Р.* Исследование устойчивости нелинейных непрерывно-дискретных моделей экономической динамики методом ВФЛ. II// Изв. РАН. Теор. сист. управл. — 2009. — № 3. — С. 41–50.
4. *Марченко В. М., Борковская И. М.* Устойчивость и стабилизация линейных гибридных дискретно-непрерывных стационарных систем// Тр. БГТУ. Физ.-мат. науки информ. — 2012. — № 6. — С. 7–10.
5. *Симонов П. М.* К вопросу об устойчивости системы двух линейных гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием// Вестн. росс. унив. Мат. — 2020. — № 131 (25). — С. 299–306.
6. *Сабатулина Т. Л., Малыгина В. В.* Некоторые признаки устойчивости линейных автономных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием// Изв. вузов. Мат. — 2007. — № 6. — С. 55–63.
7. *Fridman E.* Stability of linear descriptor systems with delay: a Lyapunov-based approach// J. Math. Anal. Appl. — 2002. — № 1 (273). — P. 24–44.

8. *Branicky M. S.* Stability of hybrid systems: State of the art// Proc. 36 IEEE Conf. on Decision and Control (San Diego, CA, USA, December 12, 1997), 1998. — P. 120–125.
9. *Bravyi E., Maksimov V., Simonov P.* Some economic dynamics problems for hybrid models with aftereffect// Mathematics. — 2020. — № 10 (8).
10. *De la Sen M.* Total stability properties based on fixed point theory for a class of hybrid dynamic systems// Fixed Point Th. Appl. — 2009. — *2009.* — 826438.
11. *Marchenko V. M., Loiseau J. J.* On the stability of hybrid difference-differential systems// Differ. Equations. — 2009. — № 45. — P. 743–756.
12. *Mulyukov M. V.* Necessary conditions of the stability of one hybrid system// Mem. Differ. Equations Math. Phys. — 2022. — *87.* — P. 111–118.
13. *Seifert G.* Second-order neutral delay-differential equations with piecewise constant time dependence// J. Math. Anal. Appl. — 2003. — № 281. — P. 1–9.
14. *Wiener J., Cooke K. L.* Oscillations in systems of differential equations with piecewise constant argument// J. Math. Anal. Appl. — 1989. — № 137. — P. 221–239.
15. *Ye H., Michel A. N., Hou L.* Stability theory for hybrid dynamical systems// IEEE Trans. Automat. Control. — 1998. — № 4 (43).

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00517.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Мулюков Михаил Вадимович
Пермский государственный национальный исследовательский университет;
Пермский национальный исследовательский политехнический университет
E-mail: mulykoff@gmail.com