ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 231 (2024). С. 89–99
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-231-89-99

УДК 517.9

О ВОССТАНОВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

© 2024 г. **М. В. ПОЛОВИНКИНА**

Аннотация. Задача восстановления решения сингулярного уравнения теплопроводности по положительной части действительной прямой в данный момент времени решается на основе неточных измерений этого решения в другие предыдущие моменты времени. Получены явные выражения для оптимального метода восстановления и его ошибок.

Ключевые слова: оператор Бесселя, оптимальное восстановление, экстремальная задача, преобразование Фурье—Бесселя, уравнение теплопроводности.

ON THE RECONSTRUCTION OF SOLUTIONS OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE SINGULAR HEAT EQUATION

© 2024 **M. V. POLOVINKINA**

Abstract. The problem of reconstructing solutions of the singular heat equation on the positive part of the real axis at a certain moment of time is solved by inaccurate measurements of this solution at other previous moments of time. Explicit expressions for the optimal reconstruction method and its errors are obtained.

Keywords and phrases: Bessel operator, optimal reconstruction, extremal problem, Fourier–Bessel transform, heat equation.

AMS Subject Classification: 26A33, 35Q92, 35B40, 43A32, 35J15

1. Введение. Постановка проблемы. Хорошо известно, что распределение температуры в $\mathbb{R}^N$ описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(x,t),$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \dots + \partial^2/\partial x_n^2$ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^N$.

В [10] была поставлена следующая задача. Пусть известны температурные распределения $u(\cdot,t_1),\dots,u(\cdot,t_p)$ в моменты времени $0 \leqslant t_1 < \dots < t_p$, заданные приближенно. Точнее, известны такие функции $y_j(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^N)$, что

$$\|u(\cdot,t_j) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^N)} \leqslant \delta_j,$$

где $\delta_j > 0$, $j = 1,\dots,p$. Для каждого набора таких функций требуется найти функцию в $L_2(\mathbb{R}^N)$, которая наилучшим образом аппроксимирует реальное распределение температуры в $\mathbb{R}^N$ в фиксированный момент времени τ в некотором смысле. В данной работе исследуется аналогичная задача для сингулярного уравнения теплового типа с оператором Бесселя (см. [2–9, 13–15]). Особенности вышеуказанного типа возникают в моделях математической физики в таких случаях, когда характеристики сред (например, характеристики диффузии или характеристики теплопроводности) имеют вырожденные степенные неоднородности. Кроме того, к таким уравнениям приводят ситуации, когда исследуются изотропные диффузионные процессы с осевой или сферической симметрией.

Мы далее сосредоточимся на уравнении с одной пространственной переменной. Однако изложенные ниже результаты без труда переносятся на многомерный случай.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Bu, \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad t > 0,$$

где B — оператор Бесселя в $\mathbb{R}_+$, определенный формулой

$$Bu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{x}\frac{\partial u}{\partial x},$$

с начальным условием

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Предполагаем, что $u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)$. Единственное решение этой задачи было получено в [2, 15]. Оно выражается следующей формулой, обобщающей хорошо известную формулу Пуассона:

$$u(x,t) = \frac{1}{2tx^\nu} \int\limits_{\mathbb{R}+} \eta^{\nu+1}\, u_0(\eta)\, I_\nu\left(\frac{\eta x}{2t}\right) \exp\left(-\frac{\eta^2 + x^2}{4t}\right) d\eta, \tag{1}$$

где

$$I_\nu\,(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^{2m+\nu}}{2^{2m+\nu}\, m!\, \Gamma(m+\nu+1)}$$

— модифицированная функция Бесселя первого рода порядка ν, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера.

Поставим следующую задачу. Пусть функции $y_j(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R})$ известны в моменты $0 \leqslant t_1 < \cdots < t_p$ и

$$\|u(\cdot,t_j) - y_j(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \leqslant \delta_j, \quad j = 1,\ldots,p,$$

где $\delta_j > 0$, $j = 1,\ldots,p$. Требуется, каждому такому набору функций поставить в соответствие функцию из $L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)$, которая в некотором смысле наилучшим образом аппроксимировала бы истинное распределение температуры в $\mathbb{R}_+$ в фиксированный момент времени τ. В связи с этим, следуя [10], любое отображение $m : L_2^\gamma(\mathbb{R}_+) \times \cdots \times L_2^\gamma(\mathbb{R}_+) \longrightarrow L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)$ мы называем методом восстановления (температуры в $\mathbb{R}_+$ в момент τ согласно этой информации). Значение

$$e(\tau,\overline{\delta},m) = \sup_U \|u(\cdot,\tau) - m(y_j(\cdot))(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)},$$

где $\overline{y}(\cdot) = (y_1(\cdot),\ldots,y_p(\cdot))$, $\overline{\delta} = (\delta_1(\cdot),\ldots,\delta_p(\cdot))$,

$$U = \Big\{(u_0(\cdot),\overline{y}(\cdot)) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+) : \ \|u(\cdot,t_j) - y_j(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \leqslant \delta_j, \ j = 1,\ldots,p\Big\},$$

называется ошибкой этого метода. Значение

$$E(\tau,\overline{\delta}) = \inf_{m:(L_2^\gamma(\mathbb{R}))^p \to L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} e(\tau,\overline{\delta},m)$$

называется ошибкой оптимального восстановления. Метод $\widehat{m}$, для которого

$$E(\tau,\overline{\delta}) = e(\tau,\overline{\delta},\widehat{m}),$$

называется оптимальным методом восстановления.

2. Необходимые сведения. Введем следующие обозначения:

$$R_N^+ = \Big\{x = (x', x''),\ x' = (x_1, \ldots, x_n),\ x'' = (x_{n+1}, \ldots, x_N),\ x_1{>}0, \ldots, x_n{>}0\Big\},$$

$$\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n), \quad (x')^\gamma = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}, \quad \gamma_i > 0.$$

Через Ω^+ будем обозначать область, прилегающую к гиперплоскостям $x_1 = 0$, …, $x_n = 0$. Граница области Ω^+ состоит из двух частей: Γ^+, расположенной в части пространства R_N^+, и Γ_0, принадлежащей гиперплоскостям $x_1 = 0$, …, $x_n = 0$.

Через $L_p^\gamma(\Omega^+)$ будем обозначать линейное пространство функций, для которых

$$\|f\|_{L_p^\gamma(\Omega^+)} = \left(\int\limits_{\Omega^+} |f(x)|^p\,(x')^\gamma\,dx\right)^{1/p} < +\infty.$$

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — объединение множества Ω^+ и множества Ω^-, полученного из Ω^+ симметрией относительно пространства $x' = 0$.

Смешанный обобщенный сдвиг определим формулой

$$f \to (T^y f)(x) = \prod_{i=1}^n T_{x_i}^{y_i} f(x', x'' - y''), \tag{2}$$

где каждый из обобщенных сдвигов $T_{x_i}^{y_i}$ определен по формуле (см. [8])

$$(T_{x_i}^{y_i} f)(x) = \frac{\Gamma(\frac{\gamma_i+1}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)} \int\limits_0^\pi f\left(x_1, \ldots, x_{i-1}, \sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos\alpha}, x_{i+1}, \ldots, x_N\right) \sin^{\gamma_i - 1}\alpha\,d\alpha, \tag{3}$$

$i = 1, \ldots, n$, а произведение $\prod\limits_{k=1}^n T_{x_k}^{y_k}$ понимается как произведение (суперпозиция) операторов.

Обобщенная свертка функций $f,\ g \in L_p^\gamma(R_N^+)$ определяется формулой

$$(f * g)_\gamma(x) = \int\limits_{R_N^+} f(y) T_x^y g(x) (y')^\gamma dy. \tag{4}$$

Прямое и обратное смешанные преобразования Фурье—Бесселя определяются соответственно формулами

$$F_{B,\gamma}[\varphi(x', x'')](\xi) = \int\limits_{R_N^+} \varphi(x) \prod_{k=1}^n j_{\nu_k}(\xi_k x_k) e^{-ix''\cdot\xi''} (x')^\gamma\,dx =$$

$$= (2\pi)^{N-n}\, 2^{2|\nu|} \prod_{k=1}^n \Gamma^2(\nu_k + 1) F_{B,\gamma}^{-1}\big[\psi(x', -x'')\big](\xi), \tag{5}$$

где

$$x' \cdot \xi' = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n, \quad x'' \cdot \xi'' = x_{n+1}\xi_{n+1} + \ldots + x_N\xi_N, \quad |\nu| = \nu_1 + \ldots + \nu_n,$$

$$j_{\nu_k}(z_k) = \frac{2^{\nu_k}\Gamma(\nu_k + 1)}{z_k^{\nu_k}} J_{\nu_k}(z_k) = \Gamma(\nu_k + 1) \sum_{m=1}^\infty \frac{(-1)^m z_k^{2m}}{2^{2m} m! \Gamma(m + \nu_k + 1)}$$

— нормированная функция Бесселя первого рода порядка ν_k, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера, $J_{\nu_k}(\cdot)$ — функция Бесселя первого рода порядка $\nu_k = (\gamma_k - 1)/2$, $k = 1, \ldots, n$.

3. Нижняя граница оптимального метода. Пусть $P_t : L_2^\gamma(\mathbb{R}) \to L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)$ — оператор, определенный формулой (1):

$$u_0(\eta)\, I_\nu \left(\frac{\eta x}{2t}\right) \exp\left(-\frac{\eta^2 + x^2}{4t}\right) d\eta,$$

$t > 0$ — фиксированное значение, P_0 — тождественный оператор.

Пусть $\tau \geqslant 0$. Рассмотрим следующую задачу:

$$\|P_\tau u_0(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \to \max, \tag{6}$$

$$\|P_{t_j} u_0(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \leqslant \delta_j, \quad j = 1, \ldots, p, \quad u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+). \tag{7}$$

Функция, удовлетворяющая условию (7) называется допустимой функцией задачи (6)–(7).

Пусть S означает верхнюю границу $\|P_\tau u_0(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)}$ с условиями (7).

Лемма 1. *Имеет место неравенство $E(\tau, \overline{\delta}) \geqslant S$.*

Доказательство. Пусть $\overline{u}_0(\cdot)$ — допустимая функция задачи (6)–(7). Тогда $-\overline{u}_0(\cdot)$ — допустимая функция задачи (6)–(7). Для всякого метода $m : (L_2^\gamma(\mathbb{R}_+))^p \to L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)$, имеем:

$$\begin{aligned}
2\big\|P_\tau \overline{u}_0(\cdot)\big\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} &= \Big\|P_\tau \overline{u}_0(\cdot) - m(0)(\cdot) + m(0)(\cdot) - P_\tau(-\overline{u}_0(\cdot))\Big\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \leqslant \\
&\leqslant \Big\|P_\tau \overline{u}_0(\cdot) - m(0)(\cdot)\Big\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} + \Big\|m(0)(\cdot) - P_\tau(-\overline{u}_0(\cdot))\Big\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \leqslant \\
&\leqslant 2 \sup_{\substack{u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+), \\ \|P_{t_j} u_0(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R})} \leqslant \delta_j, \\ j = 1, \ldots, p}} \Big\|P_\tau u_0(\cdot) - m(0)(\cdot)\Big\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \leqslant \\
&\leqslant 2 \sup_U \Big\|P_\tau u_0(\cdot) - m(\overline{y}(\cdot))(\cdot)\Big\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)}.
\end{aligned}$$

В левой части полученного неравенства мы переходим к верхней границе допустимых функций, а в правой — к нижней границе всех методов. Этот шаг завершает доказательство леммы. □

С помощью [1, формула 6.633(4)] легко убещиться в справедливости равенства

$$F_\gamma[P_t u_0(\cdot)](\xi) = \exp(-|\xi|^2 t) F_\gamma u_0(\xi).$$

Следовательно, по теореме Парсеваля—Планшереля для преобразования Фурье—Бесселя квадрат значения задачи (6)–(7) равен значению следующей задачи:

$$\frac{1}{2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1)} \int\limits_{\mathbb{R}_+} \xi^{2\nu+1} e^{-2|\xi|^2 \tau} |F_\gamma u_0(\xi)|^2 \, d\xi \to \max, \quad u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+), \tag{8}$$

$$\frac{1}{2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1)} \int\limits_{\mathbb{R}_+} \xi^{2\nu+1} e^{-2|\xi|^2 t_j} |F_\gamma u_0(\xi)|^2 \, d\xi \leqslant \delta_j^2, \quad j = 1, \ldots, p. \tag{9}$$

Перейдем от задачи (8)–(9) к расширенной задаче (согласно терминологии [10]). Для этого заменим $\dfrac{1}{2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1)} |F_\gamma u_0(\xi)|^2 \xi^{2\nu+1} \, d\xi$ на положительную меру $d\mu(\xi)$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-2|\xi|^2 \tau} \, d\mu(\xi) \longrightarrow \max, \tag{10}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-2|\xi|^2 t_j} d\mu(\xi) \leqslant \delta_j^2, \quad j = 1, \ldots, p. \tag{11}$$

Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot), \lambda) = \lambda_0 \int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-2|\xi|^2 \tau} \, d\mu(\xi) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-2|\xi|^2 t_j} d\mu(\xi) - \delta_j^2 \right),$$

где $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p)$ — набор множителей Лагранжа. Расширенная проблема (10)–(11) была решена в [10]. Для полноты повествования нам нужно будет переписать это решение, слегка изменив конкретные значения в соответствии с нашими потребностями. На двумерной плоскости (t, y) построим множество

$$M = \operatorname{co}\left\{ \left(t_j, \ln\left(\frac{1}{\delta_j}\right)\right),\ j = 1, \dots, p \right\} + \{(t, 0) : t \geqslant 0\},$$

где $\operatorname{co} A$ означает выпуклую оболочку множества A. Введем функцию $\theta(t)$ на луче $[0, +\infty)$ с помощью формулы

$$\theta(t) = \max\{y : (t, y) \in M\},$$

предполагая, что $\theta(t) = -\infty$, если $(t, y) \notin M$ при всех y. На луче $[t_1, +\infty)$ график функции $\theta(t)$ — направленная вверх выпуклая (вогнутая) ломаная линия. Пусть $t_1 = t_{s_1} < t_{s_2} < \dots < t_{s_\varrho}$ — точки ее изломов. Очевидно,

$$\Big\{t_{s_1} < t_{s_2} < \dots < t_{s_\varrho}\Big\} \subseteq \Big\{t_1 < t_2 < \dots < t_p\Big\}.$$

Рассмотрим три случая.

(a) Пусть $\tau \geqslant t_1$, в то время как справа от τ имеется точка излома функции $\theta(t)$. Предположим, что $\tau \in [t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$. Пусть $d\widehat{\mu}(\xi) = x^\gamma T_\xi^{\xi_0} \delta_\gamma$, где параметры A_0 и ξ_0 определяются из условий

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-2|\xi|^2\tau}\, d\widehat{\mu}(\xi) = A e^{-2|\xi_0|^2 t_k} = \delta_k^2, \quad k = s_j, s_{j+1}. \tag{12}$$

Из условия (12) получим

$$A = \delta_{s_j}^{2t_{s_{j+1}}/(t_{s_{j+1}} - t_{s_j})}\, \delta_{s_{j+1}}^{-2t_{s_j}/(t_{s_{j+1}} - t_{s_j})},$$
$$|\xi_0|^2 = \frac{\ln \delta_{s_j}/\delta_{s_{j+1}}}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}} = \frac{\ln(1/\delta_{s_{j+1}}) - \ln(1/\delta_{s_j})}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}}.$$

Пусть $\widehat{\lambda}_0 = -1$, $\widehat{\lambda}_k = 0$, $k \neq s_j$, s_{j+1}. Для того, чтобы найти числа λ_{s_j}, $\lambda_{s_{j+1}}$, сделаем некоторые приготовления. Пусть

$$f(v) = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j e^{-2v(t_j - \tau)}.$$

Потребуем, чтобы $f(|\xi_0|^2) = f'(|\xi_0|^2) = 0$. Отсюда получаем систему линейных уравнений относительно λ_{s_j}, $\lambda_{s_{j+1}}$:

$$\lambda_{s_j} e^{-2|\xi_0|^2(t_{s_j} - \tau)} + \lambda_{s_{j+1}} e^{-2|\xi_0|^2(t_{s_{j+1}} - \tau)} = 1,$$
$$\lambda_{s_j}(t_{s_j} - \tau) e^{-2|\xi_0|^2(t_{s_j} - \tau)} + \lambda_{s_{j+1}}(t_{s_{j+1}} - \tau) e^{-2|\xi_0|^2(t_{s_{j+1}} - \tau)} = 0.$$

Решив эту систему, находим

$$\lambda_{s_j} = \frac{t_{s_{j+1}} - \tau}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}} \left(\frac{\delta_{s_{j+1}}}{\delta_{s_j}}\right)^{2(\tau - t_{s_j})/(t_{s_{j+1}} - t_{s_j})}, \quad \lambda_{s_j} = \frac{\tau - t_{s_j}}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}} \left(\frac{\delta_{s_j}}{\delta_{s_{j+1}}}\right)^{2(t_{s_{j+1}} - \tau)/(t_{s_{j+1}} - t_{s_j})}.$$

Для меры $d\widehat{\mu}(\xi)$ имеем:

$$\min_{d\mu(\cdot) \geqslant 0} \mathcal{L}(d\mu(\cdot), \widehat{\lambda}) = \mathcal{L}(d\mu(\cdot), \widehat{\lambda}), \tag{13}$$

$$\widehat{\lambda}_j \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-2|\xi|^2\tau}\, d\widehat{\mu}(\xi) - \delta_j^2 \right) = 0, \quad j = 1, \dots, p. \tag{14}$$

Пусть

$$\rho(t) = \frac{\ln(1/\delta_{s_{j+1}}) - \ln(1/\delta_{s_j})}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}}(t - t_{s_j}) + \ln(1/\delta_{s_j}).$$

Прямая $y=\rho(t)$ проходит через точки $(t_{s_j}, \ln(1/\delta_{s_j}))$ и $(t_{s_{j+1}}, \ln(1/\delta_{s_{j+1}}))$ и лежит ниже графика функции $y=\theta(t)$. Для найденных значений A и $|\xi_0|^2$ имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-2|\xi|^2 t_i}\, d\widehat{\mu}(\xi) = Ae^{-2|\xi_0|^2 t_i} = \delta_{s_j}^{2(t_{s_{j+1}}-t_i)/(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})} \delta_{s_{j+1}}^{2(t_i-t_{s_j})/(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})} =$$

$$= e^{-2\rho(t_i)} \leqslant e^{-2\ln(1/\delta_i)} = \delta_i^2, \quad i=1,\dots,p.$$

Это означает, что $d\widehat{\mu}(\xi)$ вляется допустимой мерой в расширенной задаче (10)–(11) и является ее решением. Если мы подставим $d\widehat{\mu}(\xi)$ в функционал, определенный в (10), получим значение задачи (10)–(11), которое также является решением задачи (8)–(9):

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-2|\xi|^2 \tau}\, d\widehat{\mu}(\xi) = Ae^{-2|\xi_0|^2 \tau} = \delta_{s_j}^{2(t_{s_{j+1}}-\tau)/(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})} \delta_{s_{j+1}}^{2(\tau-t_{s_j})/(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})} = e^{-2\rho(\tau)} = e^{-2\theta(\tau)}.$$

Это означает, что значение задачи (6)–(7) равно $S=e^{-\theta(\tau)}$.

(b) Пусть $\tau \geqslant t_{s_\varrho}$. Если график функции $y=\theta(t)$ представляет собой прямую линию, то $t_{s_\varrho}=t_1$. На этот раз положим $\widehat{\lambda}_0=-1$, $\widehat{\lambda}_{s_\varrho}=1$, $\widehat{\lambda}_{s_j}=0$, где $j\neq\varrho$, $d\widehat{\mu}(\xi)=x^\gamma \delta_{s_\varrho}\delta_\gamma(\xi)$. Для всех $\xi\in\mathbb{R}_+$ выполняется неравенство

$$f(|\xi|^2) = -1 + e^{-2|\xi|^2(t_{s_\varrho}-\tau)} \geqslant 0;$$

также имеет место неравенство $f(0)=0$. Следовательно, условие (13) также выполняется. На луче $[t_{s_\varrho},+\infty)$, равенство $\theta(t)\equiv\ln(1/\delta_{s_\varrho})$ выполняется тождественно. Следовательно, $\ln(1/\delta_j)\leqslant \ln(1/\delta_{s_\varrho})$, $j=1,\dots,p$. Отсюда

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-2|\xi|^2 t_j}\, d\widehat{\mu}(\xi) = \delta_{s_\varrho}^2 = e^{-2\ln(1/\delta_{s_\varrho})}.$$

Таким образом, мера $d\widehat{\mu}(\xi)$ допустима в задаче (10)–(11) и является ее решением. Значение этой задачи вычисляется следующим образом:

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-2|\xi|^2 \tau}\, d\widehat{\mu}(\xi) = \delta_{s_\varrho}^2 = e^{-2\ln(1/\delta_{s_\varrho})} = e^{-2\theta(t)}.$$

Это снова означает, что решение проблемы (6)–(7) равно $S=e^{-\theta(\tau)}$.

(c) Пусть $\tau < t_1$. Для произвольного $y_0>0$, существует прямая линия, заданная уравнением $y=at+b$, $a>0$, разделяющая точку $(\tau,-y_0)$ и множество M. В то же время

$$-a\tau - y_0 \geqslant b \geqslant -at_j + \ln\frac{1}{\delta_{s_j}}, \quad j=1,\dots,p.$$

Пусть $A=e^{-2b}$. Выберем $\xi_0\in\mathbb{R}_+$, чтобы обеспечить $|\xi_0|^2=a$. Тогда

$$Ae^{-2|\xi_0|^2 t_j} \leqslant \delta_j^2, \quad j=1,\dots,p.$$

Это значит, что мера $d\widehat{\mu}(\xi)=x^\gamma T_\xi^{\xi_0}\delta_\gamma(\xi)$ допустима в задаче (10)–(11) и $Ae^{-2|\xi_0|^2\tau}\geqslant e^{2y_0}$. В силу произвольности $y_0>0$ значение задачи (10)–(11), а вместе с ним и решение задачи (6)–(7) равно $+\infty$.

Во всех трех случаях, для всех $\tau\geqslant 0$, ошибка оптимального восстановления оценивается снизу: $E(\tau,\overline{\delta})\geqslant e^{-\theta(\tau)}$.

4. Верхняя оценка оптимальной ошибки восстановления. Пусть $\tau\geqslant t_1$ и $\widehat{\lambda}_1,\dots,\widehat{\lambda}_p$ — множители Лагранжа из случаев (a), (b) для таких значений τ.

Лемма 2. *Пусть для множества функций* $\overline{y}(\cdot)=(y_1(\cdot),\dots,y_p(\cdot))\in(L_2^\gamma(\mathbb{R}_+))^p$ *задача*

$$\sum_{j=1}^p \widehat{\lambda}_j \Big\| P_{t_j}u_0(\cdot) - y_j(\cdot)\Big\|^2_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \to \min, \quad u_0(\cdot)\in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+), \tag{15}$$

имеет решение $\widehat{u}_0(\cdot) = \widehat{u}_0(\cdot, \overline{y}(\cdot))$. *Тогда для любого* $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ *значение задачи*

$$\Big\| P_\tau u_0(\cdot) - P_\tau \widehat{u}_0(\cdot) \Big\|^2_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \to \max, \quad u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+), \tag{16}$$

$$\Big\| P_{t_j} u_0(\cdot) - y_j(\cdot) \Big\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \leqslant \sigma_j, \quad j = 1, \ldots, p, \tag{17}$$

не превосходит значения задачи

$$\big\| P_\tau u_0(\cdot) \big\|^2_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \to \max, \quad u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+), \tag{18}$$

$$\sum_{j=1}^p \widehat{\lambda}_j \big\| P_{t_j} u_0(\cdot) \big\|^2_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \leqslant \sum_{j=1}^p \widehat{\lambda}_j \sigma_j^2. \tag{19}$$

Доказательство. Равенство нулю дифференциала Фреше выпуклого гладкого целевого функционала из (15) в точке $\widehat{u}_0(\cdot)$, т.е. равенство

$$2 \sum_{j=1}^p \widehat{\lambda}_j \int\limits_{\mathbb{R}_+} x^\gamma \big(P_{t_j} \widehat{u}_0(x) - y_j(x) \big) P_{t_j} u_0(x) dx = 0, \tag{20}$$

является необходимым и достаточным условием для доставки минимума к этому функционалу функцией $\widehat{u}_0(\cdot)$. Принимая во внимание это равенство, легко получить, что

$$\sum_{j=1}^p \widehat{\lambda}_j \Big\| P_{t_j} u_0(\cdot) - y_j(\cdot) \Big\|^2_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} = \sum_{j=1}^p \widehat{\lambda}_j \Big\| P_{t_j} u_0(\cdot) - P_{t_j} \widehat{u}_0(\cdot) \Big\|^2_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} + \sum_{j=1}^p \widehat{\lambda}_j \Big\| P_{t_j} \widehat{u}_0(\cdot) - y_j(\cdot) \Big\|^2_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)}.$$

Пусть функция $u_0(\cdot)$ действительна для задачи (16)–(17). Тогда

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^p \widehat{\lambda}_j \Big\| P_{t_j} \widehat{u}_0(\cdot) - y_j(\cdot) \Big\|^2_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} = \\ &\qquad = \sum_{j=1}^p \widehat{\lambda}_j \Big\| P_{t_j} u_0(\cdot) - y_j(\cdot) \Big\|^2_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} - \sum_{j=1}^p \widehat{\lambda}_j \Big\| P_{t_j} \widehat{u}_0(\cdot) - y_j(\cdot) \Big\|^2_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \leqslant \\ &\qquad\qquad \leqslant \sum_{j=1}^p \widehat{\lambda}_j \Big\| P_{t_j} u_0(\cdot) - y_j(\cdot) \Big\|^2_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \leqslant \sum_{j=1}^p \widehat{\lambda}_j \sigma_j. \end{aligned}$$

Это означает, что функция $u_0(\cdot) - \widehat{u}_0(\cdot)$ допустима в задаче (18)–(19). Значение функционала (16) на функции $u_0(\cdot)$ равно значнию функционала (18). $\square$

Лемма 3. *Значения задач* (6)–(7) *и* (18)–(19), *где* $\sigma_j = \delta_j$, $j = 1, \ldots, p$, *совпадают.*

Доказательство. С помощью равенства Парсеваля—Планшереля перейдем от задачи (18)–(19) к задаче

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-2|\xi|^2 \tau} \, d\mu(\xi) \to \max, \tag{21}$$

$$\sum_{j=1}^p \widehat{\lambda}_j \int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-2|\xi|^2 t_j} d\mu(\xi) \leqslant \sum_{j=1}^p \widehat{\lambda}_j \delta_j^2, \tag{22}$$

где

$$d\mu(\xi) = \frac{1}{2^{2\nu} \Gamma^2(\nu+1)} \, |F_\gamma u_0(\xi)|^2 \xi^{2\nu+1} \, d\xi \geqslant 0.$$

Функция Лагранжа этой задачи имеет вид

$$\mathcal{L}_1(d\mu(\cdot),\nu)=\nu_0\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-2|\xi|^2\tau}\,d\mu(\xi)+\nu_1\left(\sum_{j=1}^{p}\widehat{\lambda}_j\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-2|\xi|^2 t_j}d\mu(\xi)-\sum_{j=1}^{p}\widehat{\lambda}_j\delta_j^2\right),$$

где множество ν множителей Лагранжа теперь имеет вид $\nu=(\nu_0,\nu_1)$. Из того, что мера $d\widehat{\mu}(\xi)$, которая является решением проблемы (18)–(19), допустимо в этой задаче, следует, что она также допустима в задаче (21)–(22). Пусть $\nu_0=\widehat{\nu}_0=-1$, $\nu_1=\widehat{\nu}_1=1$. Тогда

$$\min_{d\mu(\cdot)\geqslant 0}\mathcal{L}_1(d\mu(\cdot),\widehat{\nu})=\mathcal{L}_1(d\widehat{\mu}(\cdot),\widehat{\nu})=\mathcal{L}(d\widehat{\mu}(\cdot),\widehat{\lambda})=\min_{d\mu(\cdot)\geqslant 0}\mathcal{L}(d\mu(\cdot),\widehat{\lambda}),\tag{23}$$

где $\widehat{\nu}=(\widehat{\nu}_0,\widehat{\nu}_1)$; с учетом (14), имеем

$$\widehat{\nu}_1\left(\sum_{j=1}^{p}\widehat{\lambda}_j\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-2|\xi|^2 t_j}d\widehat{\mu}(\xi)-\sum_{j=1}^{p}\widehat{\lambda}_j\delta_j^2\right)=0.\tag{24}$$

Это значит, что $d\widehat{\mu}(\xi)$ является решением задачи (21)–(22). Следовательно, значение этой задачи равно значению задачи (21)–(22). Отсюда следует, что возведенное в квадрат значение задачи (10)– (11) равно решению задачи (18)–(19). Следовательно, значения задач (10)–(11) и (18)–(19) совпадают. $\square$

5. Основной результат.

Теорема 1. *Для любого $\tau>0$ имеет место равенство*

$$E(\tau,\overline{\delta})=e^{-\theta(\tau)}.$$

(i) *Если $0\leqslant\tau<t_1$, то $\theta(\tau)=-\infty$.*

(ii) *Если $\tau=t_{s_j}$, $j=1,\dots,\varrho$, то метод $\widehat{m}$, определенный формулой $\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot)=y_{s_j}(\cdot)$, является оптимальным.*

(iii) *Если $\varrho\geqslant 2$, $\tau\in(t_{s_j},t_{s_{j+1}})$, то метод $\widehat{m}$, определенный формулой*

$$\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot)=(\Psi_{s_j}*y_{s_j})_\gamma(\cdot)+(\Psi_{s_{j+1}}*y_{s_{j+1}})_\gamma(\cdot),\tag{25}$$

где $\Psi_{s_j}(\cdot)$, $\Psi_{s_{j+1}}(\cdot)$ — функции, образы Фурье—Бесселя которых имеют вид

$$F_\gamma\Psi_{s_j}(\xi)=\frac{(t_{s_{j+1}}-\tau)\delta_{s_{j+1}}^2e^{-|\xi|^2(\tau-t_{s_j})}}{(t_{s_{j+1}}-\tau)\delta_{s_{j+1}}^2+(\tau-t_{s_j})\delta_{s_j}^2e^{-2|\xi|^2(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})}},\tag{26}$$

$$F_\gamma\Psi_{s_{j+1}}(\xi)=\frac{(\tau-t_{s_j})\delta_{s_j}^2e^{-|\xi|^2(\tau+t_{s_{j+1}}-2t_{s_j})}}{(t_{s_{j+1}}-\tau)\delta_{s_{j+1}}^2+(\tau-t_{s_j})\delta_{s_j}^2e^{-2|\xi|^2(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})}},\tag{27}$$

является оптимальным.

(iv) *Если $\tau>t_{s_\varrho}$, то метод $\widehat{m}$, определенный формулой $\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot)=P_{\tau-t_{s_\varrho}}y_{s_\varrho}(\cdot)$, является оптимальным.*

Доказательство. Пусть $\tau\in[t_{s_j},t_{s_{j+1}})$. Выше было показано, что можно было бы выбрать набор множителей Лагранжа, в котором только множители $\widehat{\lambda}_{s_j}$ и $\widehat{\lambda}_{s_{j+1}}$ не равны нулю. Следовательно, задача (15) принимает вид

$$\widehat{\lambda}_{s_j}\left\|P_{t_{s_j}}u_0(\cdot)-y_{s_j}(\cdot)\right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)}+\widehat{\lambda}_{s_{j+1}}\left\|P_{t_{s_{j+1}}}u_0(\cdot)-y_{s_{j+1}}(\cdot)\right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)}\to\min,\quad u_0(\cdot)\in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+).$$

Пусть $\widehat{u}_0(\cdot)=\widehat{u}_0(\cdot,y(\cdot))$ — решение этой задачи. Тогда выполнено условие (20). В образах Фурье—Бесселя это условие может быть записано в виде

$$\sum_{\kappa=j}^{j+1}\int\limits_{\mathbb{R}_+}\xi^\gamma\Big(e^{-|\xi|^2t_{s_\kappa}}F_\gamma\widehat{u}_0(\xi)-F_\gamma y_{s_\kappa}(\xi)\Big)e^{-|\xi|^2t_{s_\kappa}}F_\gamma u_0(\xi)\,d\xi=0.\tag{28}$$

Пусть

$$F_\gamma \widehat{u}_0(\xi) = \frac{\widehat{\lambda}_{s_j} e^{-|\xi|^2 t_{s_j}} F_\gamma y_{s_j} + \widehat{\lambda}_{s_{j+1}} e^{-|\xi|^2 t_{s_{j+1}}} F_\gamma y_{s_{j+1}}}{\widehat{\lambda}_{s_j} e^{-2|\xi|^2 t_{s_j}} + \widehat{\lambda}_{s_{j+1}} e^{-2|\xi|^2 t_{s_{j+1}}}}. \tag{29}$$

Тогда равенство (28) выполняется для всех $u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)$. Пусть для множества $\overline{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), \ldots, y_p(\cdot)) \in (L_2^\gamma(\mathbb{R}_+))^p$ функции $F_\gamma y_j(\cdot)$, $j = 1, \ldots, p$, финитны. Тогда функция (29) принадлежит пространству $L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)$. Тогда функция $\widehat{u}_0(\cdot) = \widehat{u}_0(\cdot, y(\cdot))$, определенная формулой (29), также принадлежит пространству $L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)$ и является решением задачи (15). Финитные функции плотны в $L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)$. Следовательно, функции с финитными образами Фурье—Бесселя являются плотными в $L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)$.

Пусть функции $\widetilde{u}_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)$, $\overline{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), \ldots, y_p(\cdot)) \in (L_2^\gamma(\mathbb{R}_+))^p$ удовлетворяют неравенствам

$$\left\| P_{t_{s_j}} \widetilde{u}_0(\cdot) - y_{s_j}(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \leqslant \delta_j, \quad j = 1, \ldots, p.$$

Выберем последовательность $\overline{y}^{(k)}(\cdot) = (y_1^{(k)}(\cdot), \ldots, y_p^{(k)}(\cdot)) \in (L_2^\gamma(\mathbb{R}_+))^p$, $k \in \mathbb{N}$, для которой функции $F_\gamma y_j^{(k)}(\cdot)$, $j = 1, \ldots, p$, финитны и

$$\left\| y_j(\cdot) - y_j^{(k)}(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \leqslant \frac{1}{k}, \quad j = 1, \ldots, p, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Зафиксируем число $k \in \mathbb{N}$. Существует решение $\widehat{u}_0(\cdot, y^{(k)}(\cdot))$ задачи (15). В силу неравенств

$$\begin{aligned} &\left\| P_{t_j} \widetilde{u}_0(\cdot) - y_j^{(k)}(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \leqslant \\ &\qquad \leqslant \left\| P_{t_j} \widetilde{u}_0(\cdot) - y_j(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} + \left\| y_j(\cdot) - y_j^{(k)}(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \leqslant \delta_j + \frac{1}{k}, \quad j = 1, \ldots, p, \end{aligned}$$

функция $\widetilde{u}_0(\cdot)$ допустима в задаче (16)–(17) с $\sigma_j = \sigma_j(k) = \delta_j + 1/k$. Пусть

$$a(k) = \sqrt{\sum_{j=1}^p \widehat{\lambda}_j \sigma_j^2(k) \Big/ \sum_{j=1}^p \widehat{\lambda}_j \delta_j^2}.$$

В силу леммы 2 значение задачи (16)–(17) не превышает значения задачи (18)–(19).

Произведем замену функции $u_0(\cdot) = a(k) v_0(\cdot)$ для задачи (18)–(19). Эта задача примет вид

$$a(k) \left\| P_\tau v_0(\cdot) - P_\tau \widehat{u}_0(\cdot) \right\|^2_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \to \max, \quad u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+), \tag{30}$$

$$\sum_{j=1}^p \widehat{\lambda}_j \left\| P_{t_j} v_0(\cdot) \right\|^2_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \leqslant \sum_{j=1}^p \widehat{\lambda}_j \sigma_j^2. \tag{31}$$

Значение задачи (30)–(31) совпадает со значением задачи (6)–(7), умноженным на $a(k)$, и оно равно $a(k) e^{-\theta(\tau)}$. Поскольку функция $\widetilde{u}_0(\cdot)$ допустимо в задаче (16)–(17), имеем

$$\left\| P_\tau \widetilde{u}_0(\cdot) - P_\tau \widehat{u}_0(\cdot, y^{(k)}(\cdot)) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \leqslant a(k) e^{-\theta(\tau)}. \tag{32}$$

Пусть $\Psi_{s_j}(\cdot)$, $\Phi_{s_{j+1}}(\cdot)$ — функции, образы Фурье—Бесселя которых имеют следующий вид в соответствии с (26)–(27):

$$F_\gamma \Psi_{s_j}(\xi) = \frac{(t_{s_{j+1}} - \tau) \delta^2_{s_{j+1}} e^{-|\xi|^2 (\tau - t_{s_j})}}{(t_{s_{j+1}} - \tau) \delta^2_{s_{j+1}} + (\tau - t_{s_j}) \delta^2_{s_j} e^{-2|\xi|^2 (t_{s_{j+1}} - t_{s_j})}},$$

$$F_\gamma \Psi_{s_{j+1}}(\xi) = \frac{(\tau - t_{s_j}) \delta^2_{s_j} e^{-|\xi|^2 (\tau + t_{s_{j+1}} - 2t_{s_j})}}{(t_{s_{j+1}} - \tau) \delta^2_{s_{j+1}} + (\tau - t_{s_j}) \delta^2_{s_j} e^{-2|\xi|^2 (t_{s_{j+1}} - t_{s_j})}}.$$

Пусть $\tau \in (t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$. Образы Фурье—Бесселя (26) и (27) функций $\Psi_{s_j}(\cdot)$ и $\Psi_{s_{j+1}}(\cdot)$ принадлежат пространству четных бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций. Следовательно, функции $\Psi_{s_j}(\cdot)$ и $\Psi_{s_{j+1}}(\cdot)$ принадлежат этому пространству. В рассматриваемом случае мы определяем метод восстановления с использованием обобщенной свертки в соответствии с (25):

$$\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot) = (\Psi_{s_j} * y_{s_j})_\gamma(\cdot) + (\Psi_{s_{j+1}} * y_{s_{j+1}})_\gamma(\cdot).$$

Тогда

$$F_\gamma \widehat{m}(\overline{y}^{(k)}(\cdot))(\xi) = F_\gamma \Psi_{s_j}(\xi) F_\gamma y^{(k)}_{s_j}(\xi) + F_\gamma \Psi_{s_{j+1}}(\xi) F_\gamma y^{(k)}_{s_{j+1}}(\xi) = e^{-|\xi|^2\tau} F_\gamma \widetilde{u}_0(\cdot, \overline{y}^{(k)}(\cdot))(\xi). \tag{33}$$

Это значит, что

$$\widehat{m}(\overline{y}^{(k)}(\cdot))(\cdot) = P_\tau \widetilde{u}_0(\cdot, \overline{y}^{(k)}(\cdot))(\cdot). \tag{34}$$

Если $\tau = t_{s_j}$, включая случай $\tau = t_{s_\varrho}$, то

$$F_\gamma \widehat{m}(\overline{y}^{(k)}(\cdot))(\xi) = F_\gamma y^{(k)}_{s_j}(\xi) = e^{-|\xi|^2\tau} F_\gamma \widetilde{u}_0(\cdot, \overline{y}^{(k)}(\cdot))(\xi) = F_\gamma (P_\tau \widetilde{u}_0(\cdot, \overline{y}^{(k)}(\cdot)))(\xi),$$

так что в этом случае (34) тоже верно.

Пусть снова функции $\widetilde{u}_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)$, $\overline{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), \ldots, y_p(\cdot)) \in (L_2^\gamma(\mathbb{R}_+))^p$ удовлетворяют неравенствам

$$\left\| P_{t_{s_j}} \widetilde{u}_0(\cdot) - y_{s_j}(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \leqslant \delta_j, \quad j = 1, \ldots, p.$$

Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&\left\| P_\tau \widetilde{u}_0(\cdot) - \widehat{m}\,(\overline{y}(\cdot))(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \leqslant \\
&\quad \leqslant \left\| P_\tau \widetilde{u}_0(\cdot) - \widehat{m}\,(\overline{y}^{(k)}(\cdot))(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} + \left\| \widehat{m}\,(\overline{y}^{(k)}(\cdot))(\cdot) - \widehat{m}\,(\overline{y}(\cdot))(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \leqslant \\
&\quad \leqslant \left\| P_\tau \widetilde{u}_0(\cdot) - P_\tau \widetilde{u}_0(\cdot, \overline{y}^{(k)}(\cdot)) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} + \left\| \widehat{m}\,(\overline{y}^{(k)}(\cdot))(\cdot) - \widehat{m}\,(\overline{y}(\cdot))(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant a(k) e^{-\theta(\tau)} + \left\| \widehat{m}\,(\overline{y}^{(k)}(\cdot) - \overline{y}(\cdot))(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)}.
\end{aligned}$$

Переходя в этом неравенстве к пределу в $k \to \infty$, получаем

$$\left\| P_\tau \widetilde{u}_0(\cdot) - \widehat{m}\,(\overline{y}(\cdot))(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \leqslant e^{-\theta(\tau)}.$$

В этом неравенстве перейдем к верхней грани по всем $\widetilde{u}_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)$ и $\overline{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), \ldots, y_p(\cdot)) \in (L_2^\gamma(\mathbb{R}_+))^p$, для которых

$$\left\| P_{t_{s_j}} \widetilde{u}_0(\cdot) - y_{s_j}(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \leqslant \delta_j, \quad j = 1, \ldots, p.$$

Тогда получим $e(\tau, \overline{\delta}, \widehat{m}) \leqslant e^{-\theta(\tau)}$. Учитывая нижнюю оценку, доказанную ранее, получаем

$$e^{-\theta(\tau)} \leqslant E(\tau, \overline{\delta}) \leqslant e(\tau, \overline{\delta}, \widehat{m}) \leqslant e^{-\theta(\tau)},$$

откуда следует, что $E(\tau, \overline{\delta}) = e^{-\theta(\tau)}$ и что $\widehat{m}$ — оптимальный метод.

Пусть $\tau > t_{s_\varrho}$. Тогда $\widehat{\lambda}_{s_\varrho} = 1$, а остальные множители Лагранжа равны нулю. Задача (15) примет вид

$$\left\| P_{t_{s_\varrho}} \widetilde{u}_0(\cdot) - y_{s_\varrho}(\cdot) \right\|^2_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \to \min.$$

Пусть для заданного множества $\overline{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), \ldots, y_p(\cdot)) \in (L_2^\gamma(\mathbb{R}_+))^p$ функции $F_\gamma y_j$, $j = 1, \ldots, p$, финитны. Тогда решение $\widetilde{u}_0(\cdot) = \widetilde{u}_0(\cdot, \overline{y}(\cdot))$ этой задачи существует и $F_\gamma \widetilde{u}_0(\xi) = e^{|\xi|^2 t_{s_\varrho}} F_\gamma y_{s_\varrho}$. Неравенство (32) в этом случае доказывается по-прежнему. Теперь определяем метод $\widehat{m}$ посредством равенства

$$\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot) = P_{\tau - t_{s_\varrho}}. \tag{35}$$

Тогда

$$F_\gamma \widehat{m}(\overline{y}^{(k)}(\cdot))(\xi) = e^{-|\xi|^2(\tau - t_{s_\varrho})} F_\gamma y_{s_\varrho}(\xi) = e^{-|\xi|^2\tau} F_\gamma \widehat{u}_0(\cdot, \overline{y}^{(k)}(\cdot)).$$

Это означает, что

$$\widehat{m}(\overline{y}^{(k)}(\cdot))(\cdot) = P_\tau \widehat{u}_0(\cdot, \overline{y}^{(k)}(\cdot)).$$

Дальнейшие рассуждения повторяют рассуждения предыдущего случая. □

Основные результаты, изложенные выше в настоящей статье, анонсированы в [16].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: ГИФМЛ, 1963.
2. *Житомирский Я. И.* Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя// Мат. сб. — 1955. — *36 (78)*, № 2. — С. 299–310.
3. *Катрахов В. В., Ситник С. М.* Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений// Совр. мат. Фундам. напр. — 2018. — *64*, № 2. — С. 211–426.
4. *Киприянов И. А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. — М.: Наука, 1997.
5. *Киприянов И. А.* Преобразование Фурье—Бесселя и теоремы вложения для весовых классов// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 1967. — *89.* — С. 130–213.
6. *Киприянов И. А., Засорин Ю. В.* О фундаментальном решении волнового уравнения с многими особенностями// Диффер. уравн. — 1992. — *28*, № 3. — С. 452–462.
7. *Киприянов И. А., Куликов А. А.* Теорема Пэли—Винера—Шварца для преобразования Фурье—Бесселя// Докл. АН СССР. — 1988. — *298*, № 1. — С. 13–17.
8. *Левитан Б. М.* Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя// Усп. мат. наук. — 1951. — *6*, № 2. — С. 102–143.
9. *Ляхов Л. Н.* -гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с -потенциальными ядрами. — Липецк: ЛГПУ, 2007.
10. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям// Мат. сб. — 2009. — *200*, № 5. — С. 37–54.
11. *Магарил-Ильяев Г. Г., Сивкова Е. О.* Наилучшее восстановление оператора Лапласа функции по ее неточно заданному спектру// Мат. сб. — 2012. — *203*, № 4. — С. 119–130.
12. *Сивкова Е. О.* Об оптимальном восстановлении лапласиана функции по ее неточно заданному преобразованию Фурье// Владикавказ. мат. ж. — 2012. — *14*, № 4. — С. 63–72.
13. *Ситник С. М., Шишкина Э. Л.* Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. — М.: Физматлит, 2019.
14. *Muravnik A. B.* Fourier–Bessel transformation of compactly supported non-negative functions and estimates of solutions of singular differential equations// Funct. Differ. Equations. — 2001. — *8*, № 3–4. — P. 353–363.
15. *Muravnik A. B.* Functional differential parabolic equations: Integral transformations and qualitative properties of solutions of the Cauchy problem// J. Math. Sci. — 2016. — *216*, № 3. — P. 345–496.
16. *Polovinkina M. V., Polovinkin I. P.* Recovery of the solution of the singular heat equation from measurement data// Bol. Soc. Mat. Mex. — 2023. — *29.* — 41.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Половинкина Марина Васильевна
Воронежский государственный университет инженерных технологий
E-mail: polovinkina-marina@yandex.ru