ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 211 (2022). С. 3–13
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-211-3-13

УДК 517.968.74

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

© 2022 г. А. Т. АСАНОВА, Э. А. БАКИРОВА, А. Е. ИМАНЧИЕВ

Аннотация. Для двухточечной краевой задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений смешанного типа получены условия однозначной разрешимости в терминах разрешимости задачи Коши и гибридной системы.

Ключевые слова: двухточечная краевая задача, интегро-дифференциальное уравнение смешанного типа, вырожденное ядро, метод параметризации, разрешимость.

BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR AN INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF MIXED TYPE

© 2022 A. T. ASSANOVA, E. A. BAKIROVA, A. E. IMANCHIEV

Abstract. For a two-point boundary-value problem for a system of integro-differential equations of mixed type, we obtain conditions for unique solvability in terms of the solvability of the Cauchy problem and a hybrid system.

Keywords and phrases: two-point boundary-value problem, integro-differential equation of mixed type, degenerate kernel, parametrization method, solvability.

AMS Subject Classification: 34K10, 34K40, 45B05, 45D05, 45J05

1. Постановка задачи. Интегро-дифференциальные уравнения часто возникают в приложениях, являясь математической моделью различных процессов механики, физики, химии, биологии, медицины, экологии, экономики и др. Особое место среди интегро-дифференциальных уравнений занимают интегро-дифференциальные уравнения смешанного типа (см. [8,11–14,19–27,30]). Интегро-дифференциальные уравнения смешанного типа, которые содержат интегральные члены Вольтерра и Фредгольма, также называются интегро-дифференциальными уравнениями Вольтерра—Фредгольма (см. [8,11,12,20,21,23,24,26,30]). Если ядра интегральных членов принадлежат классу непрерывных функций, то становится невозможным рассматривать интегро-дифференциальные уравнения смешанного типа как интегро-дифференциальные уравнения Фредгольма после продолжения ядра интегрального слагаемого Вольтерра на весь отрезок. Это в свою очередь приводит к трудностям при исследовании краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений смешанного типа. Методы, разработанные для интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра и Фредгольма, не всегда можно применить к интегро-дифференциальным уравнениям смешанного типа. Особый класс интегро-дифференциальных уравнений смешанного типа составляют интегро-дифференциальные уравнения Вольтерра—Фредгольма второго порядка в связи с многочисленными приложениями. Несмотря на большое количество работ по интегро-дифференциальным уравнениям Вольтерра—Фредгольма второго порядка, остается очень много вопросов, касающихся эффективных методов решения краевых задач для них.

В [4] Д. С. Джумабаевым был предложен метод параметризации решения краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод параметризации Джумабаева оказался конструктивным методом исследования различных краевых задач для дифференциальных, нагруженных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Наряду с установлением критериев однозначной и корректной разрешимости исследуемых задач были построены алгоритмы нахождения приближенных решений и условия их сходимости к точным решениям рассматриваемых задач (см. [1–3, 9, 10, 15, 17]). На базе метода параметризации также был разработан новый подход к общему решению линейного обыкновенного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма (см. [16]). Интервал, где рассматривается уравнение, разбивается на части, и значения решения в начальных точках подынтервалов принимаются за дополнительные параметры. С помощью введения новых неизвестных функций на подынтервалах, получена специальная задача Коши для системы интегро-дифференциальных уравнений с параметрами. На основе решения специальной задачи Коши построено новое общее решение линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма. Это общее решение, в отличие от классического общего решения, существует для всех линейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма. Новое общее решение позволило предложить численные и приближенные методы решения линейных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма. Эти методы базируются на составлении и решении системы линейных алгебраических уравнений относительно произвольных векторов нового общего решения. Коэффициенты и правые части этой системы определяются с помощью решений задач Коши для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений на подынтервалах и решений линейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода. С помощью нового общего решения установлены критерии разрешимости линейных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма. Новый подход к общему решению дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений стал основой методов исследования и решения нелинейных краевых задач для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений (см. [5, 18]). Методы базируются на построении и решении систем нелинейных алгебраических уравнений относительно произвольных векторов новых общих решений.

В настоящей работе рассматриваются вопросы разрешимости двухточечной краевой задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений смешанного типа с вырожденными ядрами. Исходная задача сначала сведена к двухточечной краевой задаче для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с неизвестной функцией, связанной с искомой функцией интегральным соотношением. Данную задачу также можно трактовать как обратную задачу для системы интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром (см. [6, 7, 28, 29]). Затем, с помощью введения дополнительного параметра как значения решения в начале интервала, задача сведена к эквивалентной задаче, содержащей задачу Коши для системы интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с параметром и неизвестной функцией и гибридную систему алгебраических и интегральных уравнений относительно параметра и неизвестной функции. Получены условия однозначной разрешимости рассматриваемой задачи в терминах разрешимости задачи Коши и гибридной системы.

Рассмотрим на отрезке $[0, T]$ следующую двухточечную краевую задачу для системы интегро-дифференциальных уравнений смешанного типа:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varphi_1(t)\int_0^T \psi_1(s)x(s)ds + \varphi_2(t)\int_0^t \psi_2(s)x(s)ds + f(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad d \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

где $(n \times n)$-матрицы $A(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ непрерывны на $[0, T]$, $(n \times n)$-матрицы $\psi_1(s)$, $\psi_2(s)$ непрерывны на $[0, T]$, n-вектор-функция $f(t)$ непрерывна на $[0, T]$, B, C — постоянные $(n \times n)$-матрицы,

$$\|x\| = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i|, \quad \|A(t)\| = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(t)|.$$

Решением задачи (1), (2) называется вектор-функция $x(t)$, непрерывная на $[0,T]$ и непрерывно дифференцируемая на $(0,T)$, удовлетворяющая системе (1) и краевому условию (2).

Пусть $C([0,T],\mathbb{R}^n)$ — пространство непрерывных функций $x\colon [0,T]\to R^n$ с нормой

$$\|x\|_1 = \max_{t\in[0,T]} \|x(t)\|.$$

2. Сведение к эквивалентной задаче с неизвестной функцией и параметром. Положим для всех $t\in[0,T]$

$$\int\limits_0^t \psi_2(s)x(s)ds = \mu(t).$$

Тогда задачу (1), (2) можем записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varphi_1(t)\int\limits_0^T \psi_1(s)x(s)ds + \varphi_2(t)\mu(t) + f(t), \quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{3}$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad d\in\mathbb{R}^n, \tag{4}$$

$$\mu(t) = \int\limits_0^t \psi_2(s)x(s)ds, \quad t\in[0,T]. \tag{5}$$

Решением задачи (3)–(5) является пара функций $(x(t),\mu(t))$, где вектор-функция $x(t)\in C([0,T],\mathbb{R}^n)$ непрерывно дифференцируема на $(0,T)$, а вектор-функция $\mu(t)\in C([0,T],\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет системе интегро-дифференциальных уравнений (3), краевому условию (4) и интегральному соотношению (5).

Задачу (3)–(5) можно трактовать как обратную задачу для системы интегро-дифференциальных уравнений (см. [6,7,28,29]) с неизвестной функцией $\mu(t)$, связанной с искомой функцией $x(t)$ интегральным соотношением (5).

Далее применим метод параметризации (см. [4]). Введем параметр $\lambda = x(0)$ и в задаче (3)–(5), произведя замену функции $u(t) = x(t)-\lambda$, где $u(t)$ — новая неизвестная функция, получаем краевую задачу с неизвестной функцией и параметром:

$$\frac{du}{dt} = A(t)(u+\lambda) + \varphi_1(t)\int\limits_0^T \psi_1(s)[u(s)+\lambda]ds + \varphi_2(t)\mu(t) + f(t), \tag{6}$$

$$u(0) = 0, \tag{7}$$

$$B\lambda + C\lambda + Cu(T) = d, \tag{8}$$

$$\mu(t) = \int\limits_0^t \psi_2(s)[u(s)+\lambda]ds, \quad t\in[0,T]. \tag{9}$$

Решением задачи (6)–(9) называется тройка $(u(t),\mu(t),\lambda)$, где $u(t)\in C([0,T],\mathbb{R}^n)$ — непрерывно дифференцируема на $(0,T)$ вектор-функция, $\mu(t)\in C([0,T],\mathbb{R}^n)$ — вектор-функция, $\lambda\in\mathbb{R}^n$ — параметр, удовлетворяющая системе интегро-дифференциальных уравнений (6), начальному условию (7), краевому условию (8) и интегральному соотношению (9).

Если тройка $(\widetilde{u}(t),\widetilde{\mu}(t),\widetilde{\lambda})$, где $\widetilde{u}(t)\in C([0,T],\mathbb{R}^n)$, $\widetilde{\mu}(t)\in C([0,T],\mathbb{R}^n)$, $\widetilde{\lambda}\in\mathbb{R}^n$ — решение задачи (6)–(9), то пара $(\widetilde{x}(t),\widetilde{\mu}(t))$ с компонентами, определяемыми равенствами

$$\widetilde{x}(t) = \widetilde{\lambda} + \widetilde{u}(t), \quad \widetilde{\mu}(t) = \int\limits_0^t \psi_2(s)[\widetilde{u}(s)+\widetilde{\lambda}]ds, \quad t\in[0,T],$$

будет решением задачи (3)–(5). Наоборот, если пара $(x^*(t),\mu^*(t))$ является решением задачи (3)–(5), то тройка $(u^*(t),\mu^*(t),\lambda^*)$ с элементами $u^*(t)\in C([0,T],\mathbb{R}^n)$, $\mu^*(t)\in C([0,T],\mathbb{R}^n)$, $\lambda^*\in\mathbb{R}^n$, где $\lambda^* = x^*(0)$, $u^*(t) = x^*(t) - x^*(0)$,

$$\mu^*(t) = \int_0^t \psi_2(s) x^*(s) ds, \quad t \in [0, T],$$

будет решением задачи (6)–(9).

Введение дополнительного параметра позволило получить начальное условие (7) для неизвестной функции $u(t)$. При фиксированных значениях $\lambda \in \mathbb{R}^n$ и $\mu^*(t) \in C([0, T], \mathbb{R}^n)$ функция $u(t)$ определяется из задачи Коши (6), (7) для системы интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма.

Таким образом, получили задачу Коши (6), (7) для системы интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с параметром λ и неизвестной функцией $\mu(t)$. Дополнительные соотношения (8) и (9) позволяют определить параметр λ и функцию $\mu(t)$ для всех $t \in [0, T]$.

С помощью фундаментальной матрицы $X(t)$ дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x$$

на $[0, T]$ задача Коши (6), (7) для системы интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма сводится к эквивалентной системе интегральных уравнений

$$u(t) = X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau)\varphi_1(\tau) d\tau \int_0^T \psi_1(s) u(s) ds + X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) A(\tau) d\tau \lambda +$$
$$+ X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau)\varphi_1(\tau) d\tau \int_0^T \psi_1(s) ds \lambda +$$
$$+ X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau)\varphi_2(\tau)\mu(\tau) d\tau + X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T]. \quad (10)$$

Пусть

$$\theta = \int_0^T \psi_1(s) u(s) ds,$$

$P(t)$ — непрерывная на $[0, T]$ квадратная матрица или вектор размерности n. Введем обозначение

$$E(P(\cdot), t) = X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) P(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T], \quad (11)$$

и перепишем систему интегральных уравнений (10) в следующей форме:

$$u(t) = E(\varphi_1(\cdot), t)\theta + \big[E(A(\cdot), t) + E(\varphi_1(\cdot), t)\big]\lambda + E(\varphi_2(\cdot)\mu(\cdot), t) + E(f(\cdot), t), \quad t \in [0, T]. \quad (12)$$

Умножив обе части (12) на $\psi_1(t)$ и проинтегрировав на интервале $[0, T]$, получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\theta = G_1(\varphi_1, T)\theta + V_1(A, \varphi_1, T)\lambda + v_1(\varphi_2\mu, T) + g_1(f, T) \quad (13)$$

относительно $\theta \in \mathbb{R}^n$ с $(n \times n)$-матрицами

$$G_1(\varphi_1, T) = \int_0^T \psi_1(s) E(\varphi_1(\cdot), s) ds, \quad V_1(A, \varphi_1, T) = \int_0^T \psi_1(s)[E(A(\cdot), s) + E(\varphi_1(\cdot), s)] ds,$$

и n-мерными векторами

$$v_1(\varphi_2\mu, T) = \int_0^T \psi_1(s)E(\varphi_2(\cdot)\mu(\cdot), s)ds, \quad g_1(f, T) = \int_0^T \psi_1(s)E(f(\cdot), s)ds.$$

Перепишем систему (13) в виде

$$[I - G_1(\varphi_1, T)]\theta = v_1(\varphi_2\mu, T) + V_1(A, \varphi_1, T)\lambda + g_1(f, T), \tag{14}$$

где I — единичная матрица размерности n.

Определение. Задача Коши (6), (7) называется однозначно разрешимой, если для произвольных $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $\mu(t) \in C([0,T], \mathbb{R}^n)$, $f(t) \in C([0,T], \mathbb{R}^n)$ она имеет единственное решение.

Учитывая, что задача Коши эквивалентна системе интегральных уравнений (10) и эта система с вырожденными ядрами эквивалентна системе алгебраических уравнений (13) относительно $\theta \in \mathbb{R}^n$, приходим к выводу, что задача Коши однозначно разрешима тогда и только тогда, когда матрица $I - G_1(\varphi_1, T)$ обратима.

Пусть матрица $I - G_1(\varphi_1, T)$ обратима. Представим матрицу $[I - G_1(\varphi_1, T)]^{-1}$ в виде $[I - G_1(\varphi_1, T)]^{-1} = M(T)$, где $M(T)$ — квадратная матрица размерности n. Тогда вектор $\theta \in \mathbb{R}^n$ в соответствии с (14) может быть определен равенством

$$\theta = M(T)V_1(A, \varphi_1, T)\lambda + M(T)v_1(\varphi_2\mu, T) + M(T)g_1(f, T). \tag{15}$$

В (12) подставляя правую часть (15) вместо θ, получим представление функции $u(t)$ через λ и $\mu(t)$:

$$\begin{aligned} u(t) = E(\varphi_1(\cdot), t)\Big\{M(T)V_1(A, \varphi_1, T)\lambda + M(T)v_1(\varphi_2\mu, T) + M(T)g_1(f, T)\Big\} + \\ + \Big[E(A(\cdot), t) + E(\varphi_1(\cdot), t)\Big]\lambda + E\big(\varphi_2(\cdot)\mu(\cdot), t\big) + E(f(\cdot), t), \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{16}$$

Введем следующие обозначения:

$$D_1(t) = E(\varphi_1(\cdot), t)M(T)V_1(A, \varphi_1, T) + E(A(\cdot), t) + E(\varphi_1(\cdot), t), \tag{17}$$

$$\Phi_1(t, \mu) = E(\varphi_1(\cdot), t)M(T)v_1(\varphi_2\mu, T) + E(\varphi_2(\cdot)\mu(\cdot), t), \tag{18}$$

$$F_1(t) = E(\varphi_1(\cdot), t)M(T)g_1(f, T) + E(f(\cdot), t). \tag{19}$$

Тогда из (16) имеем

$$u(t) = D_1(t)\lambda + \Phi_1(t, \mu) + F_1(t). \tag{20}$$

Находя из (20) значения функции $u(t)$ при $t = T$ и $t = s$, подставляя найденные выражения в краевое условие (8) и интегральные соотношения (9), получим гибридную систему уравнений, состоящую из системы алгебраических уравнений относительно параметра λ

$$\big[B + C + CD_1(T)\big]\lambda = -C\Phi_1(T, \mu) + d - CF_1(T), \tag{21}$$

и интегрального уравнения Вольтерра относительно функции $\mu(t)$:

$$\mu(t) = \int_0^t \psi_2(s)\Phi_1(s, \mu)ds + \int_0^t \psi_2(s)[D_1(s) + I]ds\lambda + \int_0^t \psi_2(s)F_1(s)ds, \quad t \in [0, T]. \tag{22}$$

Обозначим через $Q_*(T)$ матрицу, соответствующую левой части системы уравнений (21) и запишем ее в виде

$$Q_*(T)\lambda = -C\Phi_1(T, \mu) + d - CF_1(T), \quad \lambda \in \mathbb{R}^n. \tag{23}$$

Лемма. *Пусть матрица $I - G_1(\varphi_1, T)$ обратима. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(i) *пара* $(\mu^*(t), \lambda^*)$, *где функция* $\mu^*(t)$ *определяется из равенства*

$$\mu^*(t) = \int_0^t \psi_2(s)x^*(s)ds,$$

а вектор $\lambda^* \in \mathbb{R}^n$ *является значением решения* $x^*(t)$ *задачи* (1), (2) *при* $t = 0$ (*т.е.* $\lambda^* = x^*(0)$), *удовлетворяет гибридной системе* (22), (23), *состоящей из системы интегральных уравнений* (22) *и системы алгебраических уравнений* (23);

(ii) *если пара* $(\widetilde{\mu}(t), \widetilde{\lambda})$ *является решением гибридной системы* (22), (23), *а функция* $\widetilde{u}(t)$ — *решением задачи Коши* (6), (7) *для* $\lambda = \widetilde{\lambda}$, $\mu(t) = \widetilde{\mu}(t)$, *то функция* $\widetilde{x}(t)$, *определяемая равенством* $\widetilde{x}(t) = \widetilde{\lambda} + \widetilde{u}(t)$, $t \in [0, T]$, *при выполнении условия*

$$\int_0^t \psi_2(s)\widetilde{x}(s)ds = \widetilde{\mu}(t), \quad t \in [0, T],$$

является решением задачи (1), (2).

Доказательство с небольшими изменениями аналогично доказательству [15, лемма 1, с. 1455].

3. Однозначная разрешимость задачи (1), (2)**.** Введем обозначения

$$\alpha = \max_{t\in[0,T]} \|A(t)\|, \quad \overline{\varphi}_i(T) = \int_0^T \|\varphi_i(t)\|dt, \quad \overline{\psi}_i(T) = \int_0^T \|\psi_i(t)\|dt, \quad i = 1, 2,$$

$$a_1(T) = e^{\alpha T}\overline{\varphi}_1(T)\Big\|\big[I - G_1(\varphi_1, T)\big]^{-1}\Big\|\overline{\psi}_1(T) + 1,$$

$$a_2(T) = e^{\alpha T}\Big\|\big[I - G_1(\varphi_1, T)\big]^{-1}\Big\| \cdot \overline{\psi}_1(T)e^{\alpha T}T.$$

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия*:

(i) *матрица* $[I - G_1(\varphi_1, T)]\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *обратима*;

(ii) *матрица* $Q_*(T)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *обратима и имеет место неравенство*

$$\|[Q_*(T)]^{-1}\| \leqslant \gamma_*(T),$$

где $\gamma_*(T)$ — *положительная постоянная*;

(iii) *справедливо неравенство*

$$q(T) = \max\Big(\gamma_*(T)\|C\|a_1(T)e^{\alpha T}\overline{\varphi}_2(T),\ \overline{\psi}_2(T)a_1(T)e^{\alpha T}\big[\overline{\varphi}_2(T) + \overline{\varphi}_1(T)\big] + \\ + \overline{\psi}_2(T)\big[a_1(T)\{e^{\alpha T} - 1\} + 1\big]\Big) < 1.$$

Тогда задача (1), (2) *имеет единственное решение* $x^*(t)$ *для произвольных* $f(t) \in C([0, T], \mathbb{R}^n)$, $d \in \mathbb{R}^n$ *и справедлива оценка*

$$\|x^*\|_1 \leqslant \mathcal{N}(T) \max(\|d\|, \|f\|_1), \tag{24}$$

где

$$\mathcal{N}(T) = \bigg(\Big\{a_1(T)\Big[e^{\alpha T} - 1 + e^{\alpha T}\big(\overline{\varphi}_1(T) + \overline{\varphi}_2(T)\big)\Big] + 1\Big\}\times \\ \times \frac{1}{1 - q(T)} \max\Big[\gamma_*(T)\{1 + \|C\|a_2(T)\},\ \overline{\psi}_2(T)a_2(T) + e^{\alpha T}T\Big] + a_1(T)e^{\alpha T}T\bigg). \tag{25}$$

Доказательство. Пусть матрица $[I - G_1(\varphi_1, T)]\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ обратима и $f(t) \in C([0, T], \mathbb{R}^n)$, $d \in \mathbb{R}^n$. Используя обратимость матрицы $Q_*(T)$, находим единственное решение гибридной системы (22), (23):

$$\lambda^* = -\big[Q_*(T)\big]^{-1}\big\{C\Phi_1(T, \mu^*) - d + CF_1(T)\big\},$$

$$\mu^*(t)=\int\limits_0^t\psi_2(s)\Phi_1(s,\mu^*)ds+\int\limits_0^t\psi_2(s)\big[D_1(s)+I\big]ds\lambda^*+\int\limits_0^t\psi_2(s)F_1(s)ds,\quad t\in[0,T].$$

где $\lambda^*\in\mathbb{R}^n$, $\mu^*(t)\in C([0,T],\mathbb{R}^n)$. Решая задачу Коши (6), (7) для $\lambda=\lambda^*$, $\mu(t)=\mu^*(t)$, определим функцию $u^*(t)$ для всех $t\in[0,T]$.

Из обратимости матрицы $[I-G_1(\varphi_1,T)]$ следует существование единственной функции $u^*(t)$, определяемой правой частью (16) при $\lambda=\lambda^*$, $\mu(t)=\mu^*(t)$. Тогда согласно лемме функция $x^*(t)$, определяемая равенством $x^*(t)=\lambda^*+u^*(t)$ при

$$\int\limits_0^t\psi_2(s)x^*(s)ds=\mu^*(t),\quad t\in[0,T],$$

является решением задачи (1), (2). Единственность решения доказывается противного.

Докажем оценку (24). Из (11) и равенства

$$X(t)\int\limits_0^t X^{-1}(\tau)P(\tau)d\tau=\int\limits_0^t P(\tau_1)d\tau_1+\int\limits_0^t A(\tau_1)\int\limits_0^{\tau_1}P(\tau_2)d\tau_2d\tau_1+$$
$$+\int\limits_0^t A(\tau_1)\int\limits_0^{\tau_1}A(\tau_2)\int\limits_0^{\tau_2}P(\tau_3)d\tau_3d\tau_2d\tau_1+\ldots,\quad t\in[0,T],$$

получим оценки

$$\|E(A(\cdot),T)\|=\left\|X(T)\int\limits_0^T X^{-1}(\tau)A(\tau)d\tau\right\|\leqslant e^{\alpha T}-1,\tag{26}$$

$$\|E(\varphi_1(\cdot),T)\|=\left\|X(T)\int\limits_0^T X^{-1}(\tau)\varphi_1(\tau)d\tau\right\|\leqslant e^{\alpha T}\int\limits_0^T\|\varphi_1(\tau)\|d\tau,\tag{27}$$

Используя (26), (27) и (14), получим следующие неравенства:

$$\|V_1(A,\varphi_1,T)\|\leqslant\int\limits_0^T\|\psi_1(s)\|\left\{\left\|X(s)\int\limits_0^s X^{-1}(\tau)A(\tau)d\tau\right\|+\left\|X(s)\int\limits_0^s X^{-1}(\tau)\varphi_1(\tau)d\tau\right\|\right\}ds\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_0^T\|\psi_1(s)\|ds\left\{e^{\alpha T}-1+e^{\alpha T}\int\limits_0^T\|\varphi_1(\tau)\|d\tau\right\},\tag{28}$$

$$\|v_1(\varphi_2\mu,T)\|\leqslant\int\limits_0^T\|\psi_1(s)\|\cdot\left\|X(s)\int\limits_0^s X^{-1}(\tau)\varphi_2(\tau)\mu(\tau)d\tau\right\|ds\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_0^T\|\psi_1(s)\|ds\cdot e^{\alpha T}\int\limits_0^T\|\varphi_2(\tau)\|\cdot\|\mu(\tau)\|d\tau,\tag{29}$$

$$\|g_1(f,T)\|\leqslant\int\limits_0^T\|\psi_1(\tau)\|\cdot\left\|X(\tau)\int\limits_0^\tau X^{-1}(s)f(s)ds\right\|d\tau\leqslant\int\limits_0^T\|\psi_1(\tau)\|d\tau\cdot e^{\alpha T}\cdot T\cdot\|f\|_1.\tag{30}$$

Тогда справедливы следующие неравенства:

$$\max_{t\in[0,T]}\|D_1(t)\|\leqslant$$
$$\leqslant\|E(\varphi_1(\cdot),T)\|\cdot\|[I-G_1(\varphi_1,T)]^{-1}\|\cdot\|V_1(A,\varphi_1,T)\|+\|E(A(\cdot),T)\|+\|E(\varphi_1(\cdot),T)\|\leqslant$$
$$\leqslant\left[e^{\alpha T}\int_0^T\|\varphi_1(\tau)\|d\tau\|[I-G_1(\varphi_1,T)]^{-1}\|\int_0^T\|\psi_1(s)\|ds+1\right]\left\{e^{\alpha T}-1+e^{\alpha T}\int_0^T\|\varphi_1(\tau)\|d\tau\right\},\quad(31)$$

$$\max_{t\in[0,T]}\|\Phi_1(t,\mu)\|\leqslant\|E(\varphi_1(\cdot),T)\|\cdot\|[I-G_1(\varphi_1,T)]^{-1}\|\cdot\|v_1(\varphi_2\mu,T)\|+\|E(\varphi_2(\cdot)\mu(\cdot),T)\|\leqslant$$
$$\leqslant\left[e^{\alpha T}\int_0^T\|\varphi_1(\tau)\|d\tau\|[I-G_1(\varphi_1,T)]^{-1}\|\int_0^T\|\psi_1(s)\|ds+1\right]\cdot e^{\alpha T}\int_0^T\|\varphi_2(\tau)\|\cdot\|\mu(\tau)\|d\tau,\quad(32)$$

$$\max_{t\in[0,T]}\|F_1(t)\|\leqslant\|E(\varphi_1(\cdot),t)\|\cdot\|[I-G_1(\varphi_1,T)]^{-1}\|\cdot\|g_1(f,T)\|+\|E(f(\cdot),T)\|\leqslant$$
$$\leqslant e^{\alpha T}\|[I-G_1(\varphi_1,T)]^{-1}\|\cdot\|g_1(f,T)\|+e^{\alpha T}T\|f\|_1\leqslant$$
$$\leqslant e^{\alpha T}\|[I-G_1(\varphi_1,T)]^{-1}\|\cdot\int_0^T\|\psi_1(\tau)\|d\tau\cdot e^{\alpha T}T\|f\|_1+e^{\alpha T}T\|f\|_1.\quad(33)$$

Используя (33), получим

$$\|d-CF_1(T)\|\leqslant\|d\|+\|C\|\cdot\|F_1(T)\|\leqslant$$
$$\leqslant\|d\|+\|C\|e^{\alpha T}\|[I-G_1(\varphi_1,T)]^{-1}\|\cdot\int_0^T\|\psi_1(\tau)\|d\tau\cdot e^{\alpha T}T\|f\|_1+e^{\alpha T}T\|f\|_1\leqslant$$
$$\leqslant\left\{1+\|C\|\cdot e^{\alpha T}\cdot\|[I-G_1(\varphi_1,T)]^{-1}\|\cdot\int_0^T\|\psi_1(\tau)\|d\tau\cdot e^{\alpha T}T\right\}\max(\|d\|,\|f\|_1).\quad(34)$$

Для решения гибридной системы (22), (23) с помощью неравенств (31)–(34) и обратимости матрицы $Q_*(T)$ получим

$$\|\lambda^*\|\leqslant\|[Q_*(T)]^{-1}\|\cdot\|C\|\cdot\|\Phi_1(T,\mu^*)\|+\|[Q_*(T)]^{-1}\|\cdot\|d-CF_1(T)\|\leqslant$$
$$\leqslant\gamma_*(T)\|C\|\cdot\left[e^{\alpha T}\int_0^T\|\varphi_1(\tau)\|d\tau\|[I-G_1(\varphi_1,T)]^{-1}\|\int_0^T\|\psi_1(s)\|ds+1\right]\cdot e^{\alpha T}\int_0^T\|\varphi_2(\tau)\|\cdot\|\mu^*(\tau)\|d\tau+$$
$$+\gamma_*(T)\left\{1+\|C\|\cdot e^{\alpha T}\cdot\|[I-G_1(\varphi_1,T)]^{-1}\|\cdot\int_0^T\|\psi_1(\tau)\|d\tau\cdot e^{\alpha T}T\right\}\max(\|d\|,\|f\|_1),\quad(35)$$

$$\max_{t\in[0,T]}\|\mu^*(t)\|\leqslant$$
$$\leqslant\int_0^T\|\psi_2(s)\|\cdot\|\Phi_1(s,\mu^*)\|ds+\int_0^T\|\psi_2(s)\|\cdot\|[D_1(s)+I]\|ds\|\lambda^*\|+\int_0^T\|\psi_2(s)\|\cdot\|F_1(s)\|ds\leqslant$$
$$\leqslant\int_0^T\|\psi_2(s)\|ds\cdot\left[e^{\alpha T}\int_0^T\|\varphi_1(\tau)\|d\tau\|[I-G_1(\varphi_1,T)]^{-1}\|\int_0^T\|\psi_1(s)\|ds+1\right]e^{\alpha T}\int_0^T\|\varphi_2(\tau)\|\cdot\|\mu^*(\tau)\|d\tau+$$

$$+\int_0^T \|\psi_2(s)\|ds\cdot\left(\left[e^{\alpha T}\int_0^T\|\varphi_1(\tau)\|d\tau\|[I-G_1(\varphi_1,T)]^{-1}\|\int_0^T\|\psi_1(s)\|ds+1\right]\times\right.$$
$$\left.\times\left\{e^{\alpha T}-1+e^{\alpha T}\int_0^T\|\varphi_1(\tau)\|d\tau\right\}+1\right)\|\lambda^*\|+$$
$$+\int_0^T\|\psi_2(s)\|ds\cdot e^{\alpha T}\|[I-G_1(\varphi_1,T)]^{-1}\|\cdot\int_0^T\|\psi_1(\tau)\|d\tau\cdot e^{\alpha T}T\|f\|_1+e^{\alpha T}T\|f\|_1. \quad (36)$$

Тогда из (35), (36) с учетом обозначений получим

$$\max\Big(\|\lambda^*\|,\max_{t\in[0,T]}\|\mu^*(t)\|\Big)\leqslant q(T)\max\Big(\|\lambda^*\|,\max_{t\in[0,T]}\|\mu^*(t)\|\Big)+$$
$$+\max\left[\gamma_*(T)\{1+\|C\|a_2(T)\},\int_0^T\|\psi_2(s)\|dsa_2(T)+e^{\alpha T}T\right]\max(\|d\|,\|f\|_1). \quad (37)$$

Из условия $q(T)<1$ следует

$$\max\Big(\|\lambda^*\|,\max_{t\in[0,T]}\|\mu^*(t)\|\Big)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{1-q(T)}\max\left[\gamma_*(T)\{1+\|C\|a_2(T)\},\int_0^T\|\psi_2(s)\|dsa_2(T)+e^{\alpha T}T\right]\max(\|d\|,\|f\|_1). \quad (38)$$

Представление (16) и неравенства (28)–(30) позволяют нам получить следующую оценку:

$$\max_{t\in[0,T]}\|u^*(t)\|\leqslant$$
$$\leqslant e^{\alpha T}\int_0^T\|\varphi_1(t)\|dt\|[I-G_1(\varphi_1,T)]^{-1}\|\left[\int_0^T\|\psi_1(s)\|ds\left\{e^{\alpha T}-1+e^{\alpha T}\int_0^T\|\varphi_1(\tau)\|d\tau\right\}\|\lambda\|+\right.$$
$$\left.+\int_0^T\|\psi_1(s)\|ds\cdot e^{\alpha T}\int_0^T\|\varphi_2(\tau)\|\cdot\|\mu(\tau)\|d\tau+\int_0^T\|\psi_1(\tau)\|d\tau\cdot e^{\alpha T}\cdot T\cdot\|f\|_1\right]+$$
$$+\left(e^{\alpha T}-1+e^{\alpha T}\int_0^T\|\varphi_1(t)\|dt\right)\|\lambda\|+e^{\alpha T}\int_0^T\|\varphi_2(t)\|\cdot\|\mu(t)\|dt+e^{\alpha T}T\cdot\|f\|_1. \quad (39)$$

Используя (38), (39) и соотношение $\|x^*\|_1\leqslant\|\lambda^*\|+\|u^*\|_1$, установим оценку (24) с константой (25). Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Асанова А. Т., Бакирова Э. А., Кадирбаева Ж. М.* Численное решение задачи управления для интегродифференциальных уравнений// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2020. — *60*, № 2. — С. 197—215.
2. *Асанова А. Т., Иманчиев А. Е., Кадирбаева Ж. М.* О численном решении систем обыкновенных нагруженных дифференциальных уравнений с многоточечными условиями// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2018. — *58*, № 4. — С. 520–529.
3. *Бакирова Э. А., Искакова Н. Б., Асанова А. Т.* Численный метод решения линейной краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений на основе сплайн-аппроксимации// Укр. мат. ж. — 2019. — *71*, № 9. — С. 1176–1191.
4. *Джумабаев Д. С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1989. — *29*, № 1. — С. 50–66.

5. *Джумабаев Д. С.* Новые общие решения обыкновенных дифференциальных уравнений и методы решения краевых задач// Укр. мат. ж. — 2019. — *71*, № 7. — С. 884–905.
6. *Юлдашев Т. К.* Об одной нелокальной краевой задаче для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с вырождением ядра// Диффер. уравн. — 2018. — *54*, № 12. — С. 1687–1694.
7. *Юлдашев Т. К.* О разрешимости одной краевой задачи для обыкновенного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2019. — *59*, № 2. — С. 252–263.
8. *Arqub O. A., Al-Smadi M.* Numerical algorithm for solving two-point, second-order periodic boundary-value problems for mixed integro-differential equations// Appl. Math. Comp — 2014. — *243*, № 4. — P. 911–922.
9. *Assanova A. T., Bakirova E. A., Kadirbayeva Zh. M., Uteshova R. E.* A computational method for solving a problem with parameter for linear systems of integro-differential equations// Comp. Appl. Math. — 2020. — *39*, № 3. — 248.
10. *Assanova A. T., Kadirbayeva Zh. M.* On the numerical algorithms of parametrization method for solving a two-point boundary-value problem for impulsive systems of loaded differential equations// Comp. Appl. Math. — 2018. — *37*, № 4. — P. 4966–4976.
11. *Balci M. A., Sezer M.* Hybrid Euler–Taylor matrix method for solving of generalized linear Fredholm integro-differential difference equations// Appl. Math. Comp. — 2016. — *273*, № 1. — P. 33–41.
12. *Berenguer M. J., Gamez D., Lopez Linares A. J.* Solution of systems of integro-differential equations using numerical treatment of fixed point// J. Comp. Appl. Math. — 2017. — *315*, № 2. — P. 343–353.
13. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary-Value Problems. — Berlin: De Gruyter, 2016.
14. *Brunner H.* Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Equations. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004.
15. *Dzhumabaev D. S.* Computational methods of solving the boundary-value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations// Math. Meth. Appl. Sci. — 2018. — *41*, № 7. — P. 1439–1462.
16. *Dzhumabaev D. S.* New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary-value problems// J. Comp. Appl. Math. — 2018. — *327*, № 1. — P. 79–108.
17. *Dzhumabaev D. S., Bakirova E. A., Mynbayeva S. T.* A method of solving a nonlinear boundary-value problem with a parameter for a loaded differential equation// Math. Meth. Appl. Sci. — 2020. — *43*, № 8. — P. 1788–1802.
18. *Dzhumabaev D. S., Mynbayeva S. T.* New general solution to a nonlinear Fredholm integro-differential equation// Eurasian Math. J. — 2019. — *10*, № 4. — P. 24–33.
19. *Hale J., Lune S. M. V.* Introduction to Functional Differential Equations. — New York: Springer-Verlag, 1993.
20. *Hesameddini E., Shahbazi M.* Solving multipoint problems with linear Volterra–Fredholm integro-differential equations of the neutral type using Bernstein polynomials method// Appl. Numer. Math. — 2019. — *136*, № 1. — P. 122–138.
21. *Kheybary S., Darvishi M. T., Wazwaz A. M.* A semi-analytical approach to solve integro-differential equations// J. Comp. Appl. Math. — 2017. — *317*, № 1. — P. 17–30.
22. *Lakshmikantham V., Rao M. R. M.* Theory of Integro-Differential Equations. — London: Gordon & Breach, 1995.
23. *Parasidis I. N.* Extension and decomposition methods for differential and integro-differential equations// Eurasian Math. J. — 2019. — *10*, № 3. — P. 48–67.
24. *Parasidis I. N., Providas E., Dafopoulos V.* Loaded differential and Fredholm integro-differential equations with nonlocal integral boundary conditions// Прикл. мат. вопр. управл. — 2018. — № 3. — С. 31–50.
25. *Pruss J.* Evolutionary Integral Equations and Applications. — Basel: Birkhäuser, 1993.
26. *Reutskiy S. Yu.* The backward substitution method for multipoint problems with linear Volterra–Fredholm integro-differential equations of the neutral type// J. Comp. Appl. Math. — 2016. — *296*, № 3. — P. 724–738.
27. *Wazwaz A. M.* Linear and Nonlinear Integral Equations: Methods and Applications. — Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2011.
28. *Yuldashev T. K.* On inverse boundary-value problem for a Fredholm integro-differential equation with degenerate kernel and spectral parameter// Lobachevskii J. Math. — 2019. — *40*, № 1. — P. 230—239.

29. *Yuldashev T. K.* Spectral features of the solving of a Fredholm homogeneous integro-differential equation with integral conditions and reflecting deviation// Lobachevskii J. Math. — 2019. — *40*, № 12. — P. 2116—2123.
30. *Yuzbasi S.* Numerical solutions of system of linear Fredholm–Volterra integro-differential equations by the Bessel collocation method and error estimation// Appl. Math. Comp. — 2015. — *250*, № 2. — P. 320–338.

Асанова Анар Турмаганбеткызы
Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: anartasan@gmail.com

Бакирова Эльмира Айнабековна
Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: bakirova1974@mail.ru

Иманчиев Аскарбек Ермекович
Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан;
Актюбинский региональный государственный университет им. К. Жубанова,
Актюбинск, Казахстан
E-mail: imanchiev76@mail.ru