ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 211 (2022). С. 29–40
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-211-29-40

УДК 517, 531.01

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ. II. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ СИЛОВЫЕ ПОЛЯ

© 2022 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. Во многих задачах динамики возникают системы, пространствами положений которых являются четырехмерные многообразия. Фазовыми пространствами таких систем естественным образом становятся касательные расслоения к соответствующим многообразиям. Рассматриваемые динамические системы обладают переменной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. В работе показана интегрируемость более общих классов однородных динамических систем с переменной диссипацией на касательных расслоениях к четырехмерным многообразиям. Первая часть работы: Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. I. Уравнения геодезических// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2022. — Т. 210. — С. 77–95.

Ключевые слова: динамическая система, неконсервативное поле сил, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

INTEGRABLE HOMOGENEOUS DYNAMICAL SYSTEMS WITH DISSIPATION ON THE TANGENT BUNDLES OF FOUR-DIMENSIONAL MANIFOLDS. II. POTENTIAL FORCE FIELDS

© 2022 **M. V. SHAMOLIN**

Abstract. In many problems of dynamics, systems arise whose position spaces are four-dimensional manifolds. Naturally, the phase spaces of such systems are the tangent bundles of the corresponding manifolds. Dynamical systems considered have variable dissipation, and the complete list of first integrals consists of transcendental functions expressed in terms of finite combinations of elementary functions. In this paper, we prove the integrability of more general classes of homogeneous dynamical systems with variable dissipation on tangent bundles of four-dimensional manifolds. The first part of the paper is: Integrable homogeneous dynamical systems with dissipation on the tangent bundles of four-dimensional manifolds. I. Equations of geodesic lines// Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory. — 2022. — V. 210. — P. 77–95.

Keywords and phrases: dynamical system, nonconservative field, integrability, transcendental first integral.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00016).

Настоящая работа является продолжением исследования, начатого в [70]. Ссылки вида (1.m.n) и «предложение 1.n» относятся к первой части работы.

2. Уравнения движения на касательном расслоении к четырехмерному многообразию в потенциальном силовом поле

2.1. Приведенная система. Случай I. Рассмотрим случай задания кинематических соотношений в виде (1.4.1) (случай I). Уравнения (1.3.4) примут вид (1.4.3), а уравнения геодезических (1.2.1) после соответствующего выбора кинематических соотношений (1.4.1) почти всюду эквивалентны составной системе (1.4.1), (1.4.3) на многообразии $T_*M^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ (более общие утверждения см. в [2, 7, 16, 19]).

В общем случае кинематические соотношения (1.4.1) (с шестью «произвольными» функциями $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g_1(\beta_1)$, $g_2(\beta_1)$, $h(\beta_2)$) не могут, вообще говоря, обеспечить существование необходимого количества первых интегралов, поскольку в уравнениях геодезических содержатся, вообще говоря, до 40 коэффициентов аффинной связности Γ^i_{jk}.

Теперь несколько модифицируем систему (1.4.4), (1.4.5). При этом получим систему *консервативную.* А именно, наличие силового поля характеризует коэффициент $F(\alpha)$ во втором уравнении системы (2.1.1) (в отличие от системы (1.4.4)). В данном случае вводится (внешнее) силовое поле в проекциях на оси $\dot z_1, \ldots, \dot z_4$ соответственно:

$$\tilde F(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha) = \big(0, 0, 0, F(\alpha)\big)^T.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ примет вид

$$\begin{cases} \dot\alpha = -z_4, \\ \dot z_4 = F(\alpha) + f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)z_3^2 + f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)z_2^2 + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)z_1^2, \\ \dot z_3 = \left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_3 z_4 - \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)z_2^2 - \\ \qquad - \dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)z_1^2, \\ \dot z_2 = \left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_4 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_2 z_3 - \\ \qquad - \dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \dfrac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)z_1^2, \\ \dot z_1 = \left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_4 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1 z_3 - \\ \qquad - f_2(\alpha)g_1(\beta_1)\left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] z_1 z_2, \\ \dot\beta_1 = z_3 f_1(\alpha), \qquad \dot\beta_2 = z_2 f_2(\alpha)g_1(\beta_1), \\ \dot\beta_3 = z_1 f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2). \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Система (2.1.1) почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} \ddot\alpha + F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0, \\ \ddot\beta_1 + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0, \\ \ddot\beta_2 + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2 + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0, \\ \ddot\beta_3 + 2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_3 + 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_3 + 2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)\dot\beta_2\dot\beta_3 = 0. \end{cases} \tag{2.1.2}$$

2.2. Первые интегралы для уравнений в потенциальном поле. Случай I.

Предложение 2.1. *Если всюду на своей области определения справедлива система дифференциальных равенств* (1.4.7), *то система* (2.1.1) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида:*

$$\Phi_1(z_4, z_3, z_2, z_1) = z_1^2 + \ldots + z_4^2 + V(\alpha) = C_1 = \mathrm{const}, \quad V(\alpha) = 2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F(a)da. \tag{2.2.1}$$

Доказательство. Дифференцирование функции (2.2.1) в силу системы (2.1.1) дает

$$\begin{aligned}
&2F(\alpha)z_4 + 2\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha} + f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\right] z_3^2 z_4 + \\
&\quad + 2\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha} + f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\right] z_2^2 z_4 + \\
&\quad + 2\left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha} + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)\right] z_1^2 z_4 - \\
&\quad - 2\left[f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] + f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_2^2 z_3}{f_1(\alpha)} - \\
&\quad - 2\left[f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_1^2 z_3}{f_1(\alpha)} - \\
&\quad - 2\left[f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_1^2 z_2}{f_2(\alpha)g_1(\beta_1)} - \\
&\qquad - 2F(\alpha)z_4 \equiv 0,
\end{aligned}$$

поскольку выполнена система дифференциальных равенств (1.4.7). □

Предложение 2.2. *Если выполнены условия предложения* 1.3, *то система* (2.1.1) *имеет гладкий первый интеграл вида* (1.4.14).

Доказательство. Дифференцирование функции (1.4.14) в силу системы (2.1.1) при условиях предложения 1.3 дает

$$\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha) - \frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\} z_4\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}.$$

Но функция $\Phi_0(\alpha)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha).$$ □

Предложение 2.3. *Если выполнены условия предложения* 1.4, *то система* (2.1.1) *имеет гладкий первый интеграл вида* (1.4.17).

Доказательство. Дифференцирование функции (1.4.17) в силу системы (2.1.1) при условиях предложения 1.4 дает

$$\begin{aligned}
&\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha) - \frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\} z_4\sqrt{z_1^2 + z_2^2}\Psi_1(\beta_1) - \\
&\quad - \left\{\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1) - \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}\right\} z_3 f(\alpha)\sqrt{z_1^2 + z_2^2}\Phi_0(\alpha).
\end{aligned}$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$ и $\Psi_1(\beta_1)$ удовлетворяют, соответственно, обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha), \quad \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1} = \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1).$$ □

Предложение 2.4. *Если выполнены условия предложения* 1.5, *то система* (2.1.1) *имеет гладкий первый интеграл вида* (1.4.19).

Доказательство. Дифференцирование функции (1.4.19) в силу системы (2.1.1) при рассматриваемых условиях дает

$$z_1 z_4 \Psi_1(\beta_1)\Psi_2(\beta_2)\left[\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right]+$$
$$+z_1 z_3 f(\alpha)\Phi_0(\alpha)\Psi_2(\beta_2)\left[-\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1)+\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}\right]+$$
$$+z_1 z_2 f(\alpha)g(\beta_1)\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\left[-\left[2\Gamma_3(\beta_2)+\frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]\Psi_2(\beta_2)+\frac{d\Psi_2(\beta_2)}{d\beta_2}\right].$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$, $\Psi_1(\beta_1)$ и $\Psi_2(\beta_2)$ удовлетворяют, соответственно, обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),$$
$$\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}=\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1),\quad \frac{d\Psi_2(\beta_2)}{d\beta_2}=\left[2\Gamma_3(\beta_2)+\frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]\Psi_2(\beta_2).\qquad\square$$

Замечание 2.1. Если выполнена группа дифференциальных равенств (1.4.7), а также условия (1.4.13), (1.4.16), (1.4.18), то выполнены равенства

$$\begin{aligned}
&\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)=\Gamma^\alpha_{11}(\alpha), &&\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)=\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1),\\
&\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)=\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta_1), &&\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)=\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2),\\
&\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)=\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2), &&\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)=\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2),
\end{aligned}$$

а значит, в системе (2.1.1) появляется независимая подсистема седьмого порядка, состоящая из первых семи уравнений (уравнение на $\dot\beta_3$ отделяется):

$$\begin{cases}
\dot\alpha=-z_4,\\
\dot z_4=F(\alpha)+f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha)z_3^2+f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1)z_2^2+\\
\qquad +f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2)z_1^2,\\
\dot z_3=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_3z_4-\dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta_1)z_2^2-\\
\qquad -\dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2)z_1^2,\\
\dot z_2=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2z_4-f_1(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\dfrac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_2z_3-\\
\qquad -\dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\dfrac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)}h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2)z_1^2,\\
\dot z_1=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_4-f_1(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\dfrac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_1z_3-\\
\qquad -f_2(\alpha)g_1(\beta_1)\left[2\Gamma_3(\beta_2)+\dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]z_1z_2,\\
\dot\beta_1=z_3f_1(\alpha),\qquad \dot\beta_2=z_2f_2(\alpha)g_1(\beta_1),
\end{cases}\tag{2.2.2}$$

$$\dot\beta_3=z_1f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2).\tag{2.2.3}$$

Предложение 2.5. *Если выполнены условия предложений* 2.2—2.4, *то система* (2.2.2), (2.2.3) *имеет первый интеграл вида* (1.4.22), *где, после взятия интеграла* (1.4.22), *вместо постоянных* C_3, C_4 *можно формально подставить левые части равенств* (1.4.17), (1.4.19) *соответственно.*

Схема доказательства. Если выполнены условия предложений 2.2—2.4, то система (2.2.2), (2.2.3) обладает тремя первыми интегралами (1.4.14), (1.4.17) и (1.4.19). Нам понадобятся лишь два последних из них. На уровнях C_3 и C_4 первых интегралов (1.4.17) и (1.4.19) соответственно справедливо равенство

$$\frac{z_1}{z_2} = \mp\frac{C_4}{\sqrt{C_3^2\Psi_2^2(\beta_2) - C_4^2}}. \tag{2.2.4}$$

Угол β_3 будем искать из уравнения

$$\frac{d\beta_3}{d\beta_2} = \frac{z_1}{z_2}h(\beta_2),$$

полученного из системы (2.2.2), (2.2.3). Используя в этом уравнении равенство (2.2.4), получаем требуемое утверждение. □

Прямым следствием из предложений 2.1—2.5 является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Если выполнены условия предложений* 2.1—2.4, *то система* (2.2.2), (2.2.3) *обладает полным набором* (*пятью*) *независимых первых интегралов вида* (2.2.1), (1.4.14), (1.4.17), (1.4.19), (1.4.22).

Тот факт, что полный набор состоит из *пяти*, а не семи первых интегралов, будет доказан ниже.

2.3. Приведенная система. Случай II. Рассмотрим кинематические соотношения в виде (1.5.1) (случай II). Уравнения (1.3.4) примут вид (1.5.3), а уравнения геодезических (1.2.1) после соответствующего выбора кинематических соотношений (1.5.1) почти всюду эквивалентны составной системе (1.5.1), (1.5.3) на касательном расслоении $T_*M^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$.

В общем случае кинематические соотношения (1.5.1) (с семью «произвольными» функциями $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $f_4(\alpha)$, $g_1(\beta_1)$, $g_2(\beta_1)$, $h(\beta_2)$) не могут, вообще говоря, обеспечить существование необходимого количества первых интегралов, поскольку в уравнениях геодезических содержатся, вообще говоря, до 40 коэффициентов аффинной связности Γ^i_{jk}.

Модифицируя систему (1.5.4), (1.5.5), получим систему *консервативную*. Именно, введем гладкое (внешнее) силовое поле, имеющее следующие проекции на оси $\dot z_1, \dots, \dot z_4$:

$$\tilde F(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} F_1(\beta_3)f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2) \\ F_2(\beta_2)f_2(\alpha)g_1(\beta_1) \\ F_3(\beta_1)f_1(\alpha) \\ F_4(\alpha)f_4(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ примет следующий вид:

$$\dot\alpha = z_4 f_4(\alpha), \tag{2.3.1a}$$

$$\begin{aligned}\dot z_4 = F_4(\alpha)f_4(\alpha) - f_4(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_4(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_4^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)z_3^2 - \\ - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)z_2^2 - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)z_1^2,\end{aligned} \tag{2.3.1b}$$

$$\begin{aligned}\dot z_3 = F_3(\beta_1)f_1(\alpha) - f_4(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_3z_4 - \\ - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)z_2^2 - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)z_1^2,\end{aligned} \tag{2.3.1c}$$

$$\dot{z}_2 = F_2(\beta_2)f_2(\alpha)g_1(\beta_1) - f_4(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2z_4 -$$

$$- f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_2z_3 - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)}h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)z_1^2, \tag{2.3.1d}$$

$$\dot{z}_1 = F_1(\beta_3)f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2) - f_4(\alpha)\left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_4 -$$

$$- f_1(\alpha)\left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_1z_3 - f_2(\alpha)g_1(\alpha)\left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]z_1z_2, \tag{2.3.1e}$$

$$\dot{\beta}_1 = z_3f_1(\alpha), \tag{2.3.1f}$$

$$\dot{\beta}_2 = z_2f_2(\alpha)g_1(\beta_1), \tag{2.3.1g}$$

$$\dot{\beta}_3 = z_1f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2). \tag{2.3.1h}$$

Система (2.3.1) почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - F_4(\alpha)f_4^2(\alpha) + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}^2 + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 - F_3(\beta_1)f_1^2(\alpha) + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 - F_2(\beta_2)f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1) + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_3 - F_1(\beta_3)f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2) + 2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + 2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 = 0. \end{cases} \tag{2.3.2}$$

2.4. Первые интегралы для уравнений в потенциальном поле. Случай II.

Предложение 2.6. *Если всюду на своей области определения справедлива система дифференциальных равенств* (1.5.6), *то система* (2.3.1) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_1(z_4,\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = z_1^2 + \ldots + z_4^2 + V(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = C_1 = \text{const}, \tag{2.4.1}$$

$$V(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = V_4(\alpha) + \sum_{k=1}^{3} V_{4-k}(\beta_k) = -2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F_4(a)da - 2\sum_{k=1}^{3}\int\limits_{\beta_{k,0}}^{\beta_k} F_{4-k}(b)db.$$

Доказательство. Дифференцирование функции (2.4.1) в силу системы (2.3.1) дает

$$2z_4F_4(\alpha)f_4(\alpha) + 2z_3F_3(\beta_1)f_1(\alpha) + 2z_2F_2(\beta_2)f_2(\alpha)g_1(\beta_1) + 2z_1F_1(\beta_3)f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2) +$$

$$- 2f_4(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_4(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_4^3 -$$

$$- 2\left[f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] + f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_3^2z_4}{f_4(\alpha)} -$$

$$- 2\left[f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] + f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_2^2z_4}{f_4(\alpha)} -$$

$$- 2\left[f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_1^2z_4}{f_4(\alpha)} -$$

$$- 2\left[f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] + f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_2^2z_3}{f_1(\alpha)} -$$

$$- 2\left[f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_1^2z_3}{f_1(\alpha)} -$$

$$- 2\left[f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_1^2z_2}{f_2(\alpha)g_1(\beta_1)} -$$

$$- 2z_4F_4(\alpha)f_4(\alpha) - 2z_3F_3(\beta_1)f_1(\alpha) - 2z_2F_2(\beta_2)f_2(\alpha)g_1(\beta_1) - 2z_1F_1(\beta_3)f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2) \equiv 0,$$

поскольку выполнена система дифференциальных равенств (1.5.6). □

Предложение 2.7. *Пусть* $F_{4-k}(\beta_k) \equiv 0$, $k = 1,2,3$. *Если выполнены условия предложения* 1.8, *то система* (2.3.1) *имеет гладкий первый интеграл вида* (1.5.13).

Доказательство. Дифференцирование функции (1.5.13) в силу системы (2.3.1) при рассматриваемых условиях дает

$$-f_4(\alpha)\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\}z_4\sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2}.$$

Но функция $\Phi_0(\alpha)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha). \qquad \square$$

Предложение 2.8. *Пусть* $F_{4-k}(\beta_k) \equiv 0$, $k = 2,3$. *Если выполнены условия предложения* 1.9, *то система* (2.3.1) *имеет гладкий первый интеграл вида* (1.5.16).

Доказательство. Дифференцирование функции (1.5.16) в силу системы (2.3.1) при рассматриваемых условиях дает

$$\begin{aligned}&-f_4(\alpha)\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\}z_4\sqrt{z_1^2+z_2^2}\Psi_1(\beta_1)-\\&\qquad-\left\{\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1)-\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}\right\}z_3f(\alpha)\sqrt{z_1^2+z_2^2}\Phi_0(\alpha).\end{aligned}$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$ и $\Psi_1(\beta_1)$ удовлетворяют, соответственно, обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),\qquad \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}=\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1). \qquad \square$$

Предложение 2.9. *Пусть* $F_1(\beta_3) \equiv 0$. *Если выполнены условия предложения* 1.10, *то система* (2.3.1) *имеет гладкий первый интеграл вида* (1.5.18).

Доказательство. Дифференцирование функции (1.5.18) в силу системы (2.3.1) при рассматриваемых условиях дает

$$\begin{aligned}&-f_4(\alpha)z_1z_4\Psi_1(\beta_1)\Psi_2(\beta_2)\left[\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right]+\\&\qquad+z_1z_3f(\alpha)\Phi_0(\alpha)\Psi_2(\beta_2)\left[-\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1)+\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}\right]+\\&\qquad\qquad+z_1z_2f(\alpha)g(\beta_1)\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\left[-\left[2\Gamma_3(\beta_2)+\frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]\Psi_2(\beta_2)+\frac{d\Psi_2(\beta_2)}{d\beta_2}\right].\end{aligned}$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$, $\Psi_1(\beta_1)$ и $\Psi_2(\beta_2)$ удовлетворяют, соответственно, обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),$$

$$\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}=\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1),\qquad \frac{d\Psi_2(\beta_2)}{d\beta_2}=\left[2\Gamma_3(\beta_2)+\frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]\Psi_2(\beta_2). \qquad \square$$

Замечание 2.2. Пусть $F_1(\beta_3) \equiv F_1^0 = \mathrm{const}$. Если выполнена группа дифференциальных равенств (1.5.6), а также условия (1.5.12), (1.5.15), (1.5.17), то выполнены равенства

$$\begin{array}{ll} \Gamma_{11}^\alpha(\alpha,\beta) = \Gamma_{11}^\alpha(\alpha), & \Gamma_{22}^\alpha(\alpha,\beta) = \Gamma_{22}^\alpha(\alpha,\beta_1), \\ \Gamma_{22}^1(\alpha,\beta) = \Gamma_{22}^1(\alpha,\beta_1), & \Gamma_{33}^\alpha(\alpha,\beta) = \Gamma_{33}^\alpha(\alpha,\beta_1,\beta_2), \\ \Gamma_{33}^1(\alpha,\beta) = \Gamma_{33}^1(\alpha,\beta_1,\beta_2), & \Gamma_{33}^2(\alpha,\beta) = \Gamma_{33}^2(\alpha,\beta_1,\beta_2), \end{array}$$

а значит, в системе (2.3.1) появляется независимая подсистема седьмого порядка, состоящая из первых семи уравнений (уравнение на $\dot\beta_3$ отделяется):

$$\begin{cases} \dot\alpha = z_4 f_4(\alpha), \\ \dot z_4 = F_4(\alpha)f_4(\alpha) - \dfrac{f_1^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma_{11}^\alpha(\alpha)z_3^2 - \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha,\beta_1)z_2^2 - \\ \qquad - \dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^\alpha(\alpha,\beta_1,\beta_2)z_1^2, \\ \dot z_3 = F_3(\beta_1)f_1(\alpha) - f_4(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_3z_4 - \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha,\beta_1)z_2^2 - \\ \qquad - \dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\alpha,\beta_1,\beta_2)z_1^2, \\ \dot z_2 = F_2(\beta_2)f_2(\alpha)g_1(\beta_1) - f_4(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2z_4 - \\ \qquad - f_1(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_2z_3 - \dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\dfrac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)}h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\alpha,\beta_1,\beta_2)z_1^2, \\ \dot z_1 = F_1^0 f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2) - f_4(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_4 - \\ \qquad - f_1(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_1z_3 - f_2(\alpha)g_1(\beta_1)\left[2\Gamma_3(\beta_2) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]z_1z_2, \\ \dot\beta_1 = z_3 f_1(\alpha), \\ \dot\beta_2 = z_2 f_2(\alpha)g_1(\beta_1), \end{cases} \tag{2.4.2}$$

$$\dot\beta_3 = z_1 f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2). \tag{2.4.3}$$

Предложение 2.10. *Пусть* $F_{4-k}(\beta_k) \equiv 0$, $k = 1,2,3$. *Если выполнены условия предложений* 2.7–2.9, *то система* (2.4.2), (2.4.3) *имеет первый интеграл вида* (1.5.21)*, где, после взятия интеграла* (1.5.21)*, вместо постоянных* C_3, C_4 *можно формально подставить левые части равенств* (1.5.16), (1.5.18) *соответственно.*

Схема доказательства. Если выполнены условия предложений 2.7—2.9, то система (2.4.2), (2.4.3) обладает тремя первыми интегралами (1.5.13), (1.5.16) и (1.5.18). Нам понадобятся лишь два последних из них. На уровнях C_3 и C_4 первых интегралов (1.5.16) и (1.5.18) соответственно справедливо равенство

$$\frac{z_1}{z_2} = \mp\frac{C_4}{\sqrt{C_3^2\Psi_2^2(\beta_2) - C_4^2}}. \tag{2.4.4}$$

Угол β_3 будем искать из следующего уравнения, полученного из системы (2.4.2), (2.4.3):

$$\frac{d\beta_3}{d\beta_2} = \frac{z_1}{z_2}h(\beta_2).$$

Используя в этом уравнении равенство (2.4.4), и получаем требуемое утверждение. □

Прямым следствием из предложений 2.6–2.10 является следующая теорема.

Теорема 2.2. *Если выполнены условия предложений* 2.6—2.9, *то система* (2.4.2), (2.4.3) *обладает полным набором, состоящим из пяти независимых первых интегралов вида* (2.4.1), (1.5.13), (1.5.16), (1.5.18), (1.5.21).

Тот факт, что полный набор состоит из *пяти*, а не из семи первых интегралов, будет доказан ниже.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бендиксон И.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями// Усп. мат. наук. — 1941. — *9*. — С. 119–211.
2. *Богоявленский О. И.* Динамика твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью// Докл. АН СССР. — 1983. — *272*, № 6. — С. 1364–1367.
3. *Богоявленский О. И.* Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера// Докл. АН СССР. — 1986. — *287*, № 5. — С. 1105–1108.
4. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.
5. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления. — М.: Наука, 1970.
6. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.
7. *Веселов А. П.* Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на $so(4)$// Докл. АН СССР. — 1983. — *270*, № 6. — С. 1298–1300.
8. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2001. — *380*, № 1. — С. 47–50.
9. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2002. — *383*, № 5. — С. 635–637.
10. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — *5*. — С. 37–41.
11. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Символы Леви-Чивиты, обобщенные векторные произведения и новые случаи интегрируемости в механике многомерного тела// Совр. мат. прилож. — 2012. — *76*. — С. 22–39.
12. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. — М.-Л.: Гостехиздат, 1953.
13. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
14. *Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
15. *Иванова Т. А.* Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — *52*, № 2. — С. 43–51.
16. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — *38*, № 1. — С. 3–67.
17. *Козлов В. В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — *79*, № 3. — С. 307–316.
18. *Козлов В. В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 2019. — *74*, № 1 (445). — С. 117–148.
19. *Локшин Б. Я., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Маятниковые системы с динамической симметрией// Совр. мат. прилож. — 2016. — *100*. — С. 76–133.
20. *Манаков С. В.* Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела// Функц. анал. прилож. — 1976. — *10*, № 4. — С. 93–94.
21. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — *9*, № 100. — С. 136–150.
22. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — *9/1*, № 110. — С. 35–41.

23. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — *7*, № 118. — С. 60–69.
24. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
25. *Тихонов А. А.* Метод управления для угловой стабилизации электродинамической тросовой системы// Автомат. телемех. — 2020. — № 2. — С. 91–114.
26. *Трофимов В. В.* Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — *44*, № 5. — С. 1191–1199.
27. *Трофимов В. В., Фоменко А. Т.* Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем// Докл. АН СССР. — 1980. — *254*, № 6. — С. 1349–1353.
28. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — *16*, № 4. — С. 3–229.
29. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости// в кн.: Полн. собр. соч.. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133–135.
30. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
31. *Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в среде с сопротивлением// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1992. — *1*. — С. 52–58.
32. *Шамолин М. В.* Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента// Прикл. мат. мех. — 1993. — *57*, № 4. — С. 40–49.
33. *Шамолин М. В.* Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1996. — *4*. — С. 57–69.
34. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 3. — С. 209–210.
35. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — *364*, № 5. — С. 627–629.
36. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — *375*, № 3. — С. 343–346.
37. *Шамолин М. В.* Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 1. — С. 169–170.
38. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathrm{so}(4)\times\mathbf{R}^4$// Усп. мат. наук. — 2005. — *60*, № 6. — С. 233–234.
39. *Шамолин М. В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — *69*, № 6. — С. 1003–1010.
40. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — *62*, № 5. — С. 169–170.
41. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. прикл. мат. — 2008. — *14*, № 3. — С. 3–237.
42. *Шамолин М. В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — *425*, № 3. — С. 338–342.
43. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — *65*, № 1. — С. 189–190.
44. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — *437*, № 2. — С. 190–193.
45. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — *440*, № 2. — С. 187–190.
46. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *444*, № 5. — С. 506–509.
47. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — *453*, № 1. — С. 46–49.
48. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — *68*, № 5 (413). — С. 185–186.

49. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — *449*, № 4. — С. 416–419.
50. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — *457*, № 5. — С. 542–545.
51. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — *20*, № 4. — С. 3–231.
52. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — *461*, № 5. — С. 533–536.
53. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — *464*, № 6. — С. 688–692.
54. *Шамолин М. В.* Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 6. — С. 743–759.
55. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *475*, № 5. — С. 519–523.
56. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — *474*, № 2. — С. 177–181.
57. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *477*, № 2. — С. 168–172.
58. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией// Пробл. мат. анал. — 2018. — № 95. — С. 79–101.
59. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *482*, № 5. — С. 527–533.
60. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *479*, № 3. — С. 270–276.
61. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 1. Твердое тело в неконсервативном поле. — М.: ЛЕНАНД, 2019.
62. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *489*, № 6. — С. 592–598.
63. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *485*, № 5. — С. 583–587.
64. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *487*, № 4. — С. 381–386.
65. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 2: Закрепленные маятники разной размерности. — М.: ЛЕНАНД, 2021.
66. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *491*, № 1. — С. 95–101.
67. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *494*, № 1. — С. 105–111.
68. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *495*, № 1. — С. 84–90.
69. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *497*, № 1. — С. 23–30.
70. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. I. Уравнения геодезических// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2022. — *210*. — С. 77–95.
71. *Aleksandrov A. Y., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A.* On the monoaxial stabilization of a rigid body under vanishing restoring torque// AIP Conf. Proc. — 2018. — *1959*. — 080001.
72. *Shamolin M. V.* Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2002. — *110*, № 2. — P. 2528–2557.

73. *Tikhonov A. A., Yakovlev A. B.* On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters// Int. J. Plasma Env. Sci. Techn.. — *13*, № 1. — P. 49–52.

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: `shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru`