ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 211 (2022). С. 41–74
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-211-41-74

УДК 517.9; 531.01

СИСТЕМЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ С ДИССИПАЦИЕЙ: АНАЛИЗ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ. I. ПОРОЖДАЮЩАЯ ЗАДАЧА ИЗ ДИНАМИКИ МНОГОМЕРНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА, ПОМЕЩЕННОГО В НЕКОНСЕРВАТИВНОЕ ПОЛЕ СИЛ

© 2022 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. Работа является первой частью обзора по вопросам интегрируемости систем с любым числом n степеней свободы. Обзор состоит из трех частей. В данной первой части подробно изложена порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил. Во второй и третьей частях, которые будут опубликованы в следующих выпусках, рассмотрены более общие динамические системы на касательных расслоениях к n-мерной сфере и к достаточно обширному классу других гладких многообразий. Доказаны теоремы о достаточных условиях интегрируемости рассматриваемых динамических систем в классе трансцендентных функций.

Ключевые слова: динамическая система с большим числом степеней свободы, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

SYSTEMS WITH DISSIPATION WITH A FINITE NUMBER OF DEGREES OF FREEDOM: ANALYSIS AND INTEGRABILITY. I. PRIMORDIAL PROBLEM FROM DYNAMICS OF A MULTIDIMENSIONAL RIGID BODY IN A NONCONSERVATIVE FIELD OF FORCES

© 2022 **M. V. SHAMOLIN**

Abstract. This paper is the first part of a survey on the integrability of systems with a large number n of degrees of freedom. The review consists of three parts. In this first part, the primordial problem from the dynamics of a multidimensional rigid body placed in a nonconservative force field is described in detail. In the second and third parts, which will be published in the next issues, we consider more general dynamical systems on the tangent bundles to the n-dimensional sphere and other smooth manifolds of a sufficiently wide class. Theorems on sufficient conditions for the integrability of the considered dynamical systems in the class of transcendental functions are proved.

Keywords and phrases: dynamical system with a large number of degrees of freedom, integrability, transcendental first integral.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

Введение. Данная работа является обзорной по проблеме интегрируемости неконсервативных систем с n степенями свободы (ранее были опубликованы аналогичные работы по системам с четырьмя и пятью степенями свободы). Если конфигурационное многообразие системы — гладкое n-мерное многообразие, то его касательное (кокасательное) расслоение имеет естественную структуру фазового пространства системы, увеличивая вдвое количество фазовых переменных.

Поскольку мы имеем дело с неконсервативными системами, а именно с системами, в которых в определенном роде присутствует так называемая диссипация переменного знака (в одних областях фазового пространства присутствует «собственно» диссипация — некое рассеяние полной энергии, которая не сохраняется, а в других — подкачка энергии, т.е. формально — «рассеяние» с противоположным знаком), то ни о каком полном списке даже непрерывных (автономных) первых интегралов не может идти и речи (см. [6, 22, 30, 33]).

Работа состоит из трех частей. В данной первой части проведен достаточно подробный анализ некоторой естественной порождающей задачи из динамики n-мерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил, при этом в системе присутствует также гладкое управление. При естественных предположениях данная задача редуцируется к динамическим системам на касательном расслоении $(n-1)$-мерной сферы и обладает полным набором, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечные комбинации элементарных функций. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле теории функций комплексного переменного, когда у функции имеются существенно особые точки (см. также [5, 24, 31, 41]).

Вторая и третья части работы будут опубликованы в следующих выпусках. Во второй части будут рассмотрены более общие динамические системы на касательном расслоении к n-мерной сфере. Данные системы обобщают системы, рассмотренные ранее в первой части. При этом системы более общего вида включают также и классическую задачу о движении точки по n-мерной сфере, где при некоторых условиях также получены полные наборы, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов (см. также [50, 51, 53]).

В заключительной третьей части будут рассмотрены системы на касательных расслоениях к достаточно обширным классам гладких n-мерных многообразий; для таких систем также получены достаточные условия интегрируемости.

1. Порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил

1. Динамика на $\mathrm{so}(n)$ и $\mathbb{R}^n$. Конфигурационным пространством свободного n-мерного твердого тела является прямое произведение пространства $\mathbb{R}^n$ (определяющего координаты центра масс тела) и группы его вращений $\mathrm{SO}(n)$ (определяющую вращение тела вокруг центра масс) (см. также [8, 9, 11])

$$\mathbb{R}^n \times \mathrm{SO}(n) \tag{1.1.1}$$

и имеет размерность

$$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Соответственно, размерность фазового пространства равна $n(n+1)$.

В частности, если Ω — тензор угловой скорости n-мерного твердого тела (он является терзором второго ранга, см. [29,32,34]), $\Omega \in \mathrm{so}(n)$, то часть динамических уравнений движения, отвечающая алгебре Ли $\mathrm{so}(n)$, имеет следующий вид (см. [26, 27, 47, 48]):

$$\dot\Omega\Lambda + \Lambda\dot\Omega + [\Omega, \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = M, \tag{1.1.2}$$

где

$$\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\},$$

$$\lambda_1 = \frac{-I_1 + I_2 + \ldots + I_n}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{I_1 - I_2 + I_3 + \ldots + I_n}{2}, \quad \ldots,$$

$$\lambda_{n-1} = \frac{I_1 + \ldots + I_{n-2} - I_{n-1} + I_n}{2}, \qquad \lambda_n = \frac{I_1 + \ldots + I_{n-1} - I_n}{2},$$

$M = M_F$ — момент внешних сил $\mathbf{F}$, действующих на тело в $\mathbb{R}^n$, спроектированный на естественные координаты в алгебре Ли $\mathrm{so}(n)$, $[\ldots,\ldots]$ — коммутатор в $\mathrm{so}(n)$. Так, например, кососимметрическую матрицу (соответствующую данному тензору второго ранга) $\Omega \in \mathrm{so}(5)$ будем представлять в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_{10} & \omega_9 & -\omega_7 & \omega_4 \\ \omega_{10} & 0 & -\omega_8 & \omega_6 & -\omega_3 \\ -\omega_9 & \omega_8 & 0 & -\omega_5 & \omega_2 \\ \omega_7 & -\omega_6 & \omega_5 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_4 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.1.3}$$

(см. также [3,21]), где $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{10}$ — компоненты тензора угловой скорости в проекциях на координаты в алгебре Ли $\mathrm{so}(5)$. При этом, очевидно, для любых $i, j = 1, \ldots, n$ выполнены следующие равенства:

$$\lambda_i - \lambda_j = I_j - I_i. \tag{1.1.4}$$

При вычислении момента внешней силы, действующей на тело, необходимо построить отображение

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathrm{so}(n), \tag{1.1.5}$$

переводящее пару векторов

$$(\mathbf{DN}, \mathbf{F}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \tag{1.1.6}$$

из $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ в некоторый элемент из алгебры Ли $\mathrm{so}(n)$, где

$$\mathbf{DN} = \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}, \quad \mathbf{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}, \tag{1.1.7}$$

$\mathbf{F}$ — внешняя сила, действующая на тело (здесь $\mathbf{DN}$ — вектор, идущий из начала D координат системы $Dx_1 \ldots x_n$ в точку N приложения силы). При этом строится соответствующая вспомогательная матрица

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \ldots & \delta_n \\ F_1 & F_2 & \ldots & F_n \end{pmatrix}. \tag{1.1.8}$$

Всевозможные миноры второго порядка (а их в точности $n(n-1)/2$ штук) со знаком данной матрицы — это и есть координаты момента $(\mathbf{DN}, \mathbf{F})$ силы $\mathbf{F}$, а сам момент отождествляется с некоторым элементом алгебры Ли $\mathrm{so}(n)$.

Поскольку введена упорядоченность координат $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ на алгебре Ли $\mathrm{so}(n)$, то введем такую же упорядоченность и для вычисления момента $(\mathbf{DN}, \mathbf{F})$ силы $\mathbf{F}$. Действительно, первая группа G_1 координат искомого момента состоит из $n-1$ знакочередующихся миноров

$$+\begin{vmatrix} \delta_{n-1} & \delta_n \\ F_{n-1} & F_n \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} \delta_{n-2} & \delta_n \\ F_{n-2} & F_n \end{vmatrix}, \quad +\begin{vmatrix} \delta_{n-3} & \delta_n \\ F_{n-3} & F_n \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad (-1)^n \begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_n \\ F_1 & F_n \end{vmatrix}.$$

Вторая группа G_2 координат состоит из $n-2$ знакочередующихся миноров

$$+\begin{vmatrix} \delta_{n-2} & \delta_{n-1} \\ F_{n-2} & F_{n-1} \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} \delta_{n-3} & \delta_{n-1} \\ F_{n-3} & F_{n-1} \end{vmatrix}, \quad +\begin{vmatrix} \delta_{n-4} & \delta_{n-1} \\ F_{n-4} & F_{n-1} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_{n-1} \\ F_1 & F_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Продолжая далее, получаем заключительную группу G_{n-1} координат, состоящую из одного минора

$$+\begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ F_1 & F_2 \end{vmatrix}.$$

Как видно, первые миноры в любой группе имеют знак «+».

Полученное упорядоченное множество из $n(n-1)/2$ величин будем называть *координатами момента* $(\mathbf{DN}, \mathbf{F})$ силы $\mathbf{F}$.

Исследуемые в дальнейшем динамические системы, вообще говоря, неконсервативны и являются динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним (см. [54,55,57,58]). При этом нам потребуется практически «в лоб» исследовать часть основного уравнения динамики, а именно в данном случае уравнение Ньютона. Здесь оно предстает перед нами как уравнение движения центра масс — часть динамических уравнений движения, которая отвечает пространству $\mathbb{R}^n$:

$$m\mathbf{w}_C = \mathbf{F}, \tag{1.1.9}$$

где $\mathbf{w}_C$ — ускорение центра масс C тела, m — его масса; при этом по многомерной формуле Ривальса (которую в данном случае несложно вывести операторным методом) справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{w}_C = \mathbf{w}_D + \Omega^2\mathbf{DC} + E\mathbf{DC}, \quad \mathbf{w}_D = \dot{\mathbf{v}}_D + \Omega\mathbf{v}_D, \quad E = \dot{\Omega}, \tag{1.1.10}$$

здесь $\mathbf{w}_D$ — ускорение точки D, $\mathbf{F}$ — внешняя сила, действующая на тело, E — тензор углового ускорения (тензор второго ранга).

Если положение тела в евклидовом пространстве $\mathbf{E}^n$ определяется функциями, которые являются циклическими в следующем смысле: если обобщенная сила $\mathbf{F}$ и ее момент $(\mathbf{DN}, \mathbf{F})$ зависят лишь от обобщенных скоростей (квазискоростей), и не зависят от положения тела в пространстве, то система уравнений (1.1.2), (1.1.9) на многообразии $\mathbb{R}^n \times \mathrm{so}(n)$ определяет *замкнутую* систему динамических уравнений движения свободного n-мерного твердого тела под действием внешней силы $\mathbf{F}$. Данная система отделяется от кинематической части уравнений движения на многообразии (1.1.1) и может быть исследована самостоятельно.

2. Динамическая часть уравнений движения. Рассмотрим движение однородного динамически симметричного n-мерного твердого тела, граница которого является кусочно гладкой $(n-1)$-мерной поверхностью. В частности, часть этой поверхности может иметь форму $(n-1)$-мерного диска, являющегося многомерным передним торцом, взаимодействующим со средой, заполняющей n-мерное пространство, в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности (см. также [13, 19, 25]).

Пусть $(v, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$ — (обобщенные) сферические координаты вектора скорости некоторой характерной точки D твердого тела (в частности, D — центр $(n-1)$-мерного диска, лежащий на оси динамической симметрии тела), $\Omega \in \mathrm{so}(n)$ — тензор (второго ранга) угловой скорости тела. При этом $Dx_1 \ldots x_n$ — такая система координат, связанная с телом, что ось динамической симметрии CD совпадает с осью Dx_1 (C — центр масс), а оси $Dx_2, \ldots, Dx_n$ лежат в гиперплоскости диска, $I_1, I_2 = \ldots = I_n$, m — главные моменты инерции тела в рассматриваемых осях и масса тела.

Примем следующие разложения в проекциях на оси системы координат $Dx_1 \ldots x_n$:

$$\mathbf{DC} = \{-\sigma, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}\}, \quad \mathbf{v}_D = v\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}), \tag{1.2.1}$$

где

$$\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\beta_1 \\ \sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2} \\ \sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2} \end{pmatrix} \tag{1.2.2}$$

— единичный вектор по оси вектора $\mathbf{v}$.

Примем также разложение для обобщенной силы (в частности, силы воздействия среды; считаем, что касательные силы, действующие на $(n-1)$-мерный диск, отсутствуют), действующей на n-мерное тело:

$$\mathbf{S} = \{-S, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}\}, \tag{1.2.3}$$

т.е. в данном случае внешняя сила $\mathbf{F} = \mathbf{S}$.

Тогда может быть получена *часть динамических уравнений* движения тела (в том числе и в случае аналитических функций Чаплыгина, см. [28, 40, 60, 64]), которая описывает движение центра масс и соответствует *пространству* $\mathbb{R}^n$. В частности, в случае $n = 6$ данная система примет следующий вид:

$$\begin{gathered}\dot v\cos\alpha-\dot\alpha v\sin\alpha-\omega_{15}v\sin\alpha\cos\beta_1+\omega_{14}v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2-\\-\omega_{12}v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3+\omega_9v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3\cos\beta_4-\\-\omega_5v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3\sin\beta_4+\sigma(\omega_{15}^2+\omega_{14}^2+\omega_{12}^2+\omega_9^2+\omega_5^2)=\frac{F_1}{m}=-\frac{S}{m},\end{gathered}\tag{1.2.4a}$$

$$\begin{gathered}\dot v\sin\alpha\cos\beta_1+\dot\alpha v\cos\alpha\cos\beta_1-\dot\beta_1v\sin\alpha\sin\beta_1+\omega_{15}v\cos\alpha-\\-\omega_{13}v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2+\omega_{11}v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3-\omega_8v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3\cos\beta_4+\\+\omega_4v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3\sin\beta_4-\sigma(\omega_{13}\omega_{14}+\omega_{11}\omega_{12}+\omega_8\omega_9+\omega_4\omega_5)-\sigma\dot\omega_{15}=0,\end{gathered}\tag{1.2.4b}$$

$$\begin{gathered}\dot v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2+\dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2+\dot\beta_1v\sin\alpha\cos\beta_1\cos\beta_2-\dot\beta_2v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2-\\-\omega_{14}v\cos\alpha+\omega_{13}v\sin\alpha\cos\beta_1-\omega_{10}v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3+\\+\omega_7v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3\cos\beta_4-\omega_3v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3\sin\beta_4-\\-\sigma(\omega_{13}\omega_{15}-\omega_{10}\omega_{12}-\omega_7\omega_9-\omega_3\omega_5)+\sigma\dot\omega_{14}=0,\end{gathered}\tag{1.2.4c}$$

$$\begin{gathered}\dot v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3+\dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3+\dot\beta_1v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3+\\+\dot\beta_2v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\cos\beta_3-\dot\beta_3v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3+\omega_{12}v\cos\alpha-\omega_{11}v\sin\alpha\cos\beta_1+\\+\omega_{10}v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2-\omega_6v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3\cos\beta_4+\\+\omega_2v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3\sin\beta_4+\sigma(\omega_{11}\omega_{15}+\omega_{10}\omega_{14}-\omega_6\omega_9-\omega_2\omega_5)-\sigma\dot\omega_{12}=0,\end{gathered}\tag{1.2.4d}$$

$$\begin{gathered}\dot v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3\cos\beta_4+\dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3\cos\beta_4+\\+\dot\beta_1v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3\cos\beta_4+\dot\beta_2v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\sin\beta_3\cos\beta_4+\\+\dot\beta_3v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3\cos\beta_4-\dot\beta_4v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3\sin\beta_4-\\-\omega_9v\cos\alpha+\omega_8v\sin\alpha\cos\beta_1-\omega_7v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2+\\+\omega_6v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3-\omega_1v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3\sin\beta_4-\\-\sigma(\omega_8\omega_{15}+\omega_7\omega_{14}+\omega_6\omega_{12}-\omega_1\omega_5)+\sigma\dot\omega_9=0,\end{gathered}\tag{1.2.4e}$$

$$\begin{gathered}\dot v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3\sin\beta_4+\dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3\sin\beta_4+\\+\dot\beta_1v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3\sin\beta_4+\dot\beta_2v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\sin\beta_3\sin\beta_4+\\+\dot\beta_3v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3\sin\beta_4+\dot\beta_4v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3\cos\beta_4+\\+\omega_5v\cos\alpha-\omega_4v\sin\alpha\cos\beta_1+\omega_3v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2-\\-\omega_2v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3+\omega_1v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3\cos\beta_4+\\+\sigma(\omega_4\omega_{15}+\omega_3\omega_{14}+\omega_2\omega_{12}+\omega_1\omega_9)+\sigma\dot\omega_5=0,\end{gathered}\tag{1.2.4f}$$

$\sigma = CD$, где внешнее поле квадратично по v (при этом можно рассмотреть более общий случай зависимости внешнего поля сил квадратичным образом и от тензора угловой скорости, но это нам пока не потребуется): $S = s(\alpha)v^2$.

Вспомогательная матрица для вычисления момента внешней силы (приложенной в точке N) имеет вид

$$\begin{pmatrix}0 & x_{2N} & \ldots & x_{nN}\\ -S & 0 & \ldots & 0\end{pmatrix},;\tag{1.2.5}$$

тогда может быть получена *часть динамических уравнений* движения тела, которая описывает движение тела вокруг центра масс и соответствуют *алгебре Ли* $\mathrm{so}(n)$. В таком случае данная система примет вид (см. также [14, 15, 35, 36]):

$$(I_1 + (n-3)I_2)\dot{\omega}_1 = 0, \tag{1.2.6a}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(I_1 + (n-3)I_2)\dot{\omega}_{r_1-1} = 0, \tag{1.2.6b}$$

$$(n-2)I_2\dot{\omega}_{r_1} + (-1)^{n+1}(I_1 - I_2)W_{n-1}(\Omega) = (-1)^n x_{nN}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \tag{1.2.6c}$$

$$(I_1 + (n-3)I_2)\dot{\omega}_{r_1+1} = 0, \tag{1.2.6d}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(I_1 + (n-3)I_2)\dot{\omega}_{r_2-1} = 0, \tag{1.2.6e}$$

$$(n-2)I_2\dot{\omega}_{r_2} + (-1)^{n}(I_1 - I_2)W_{n-2}(\Omega) = (-1)^{n-1} x_{n-1,N}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \tag{1.2.6f}$$

$$(I_1 + (n-3)I_2)\dot{\omega}_{r_2+1} = 0, \tag{1.2.6g}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(I_1 + (n-3)I_2)\dot{\omega}_{r_{n-2}-1} = 0, \tag{1.2.6h}$$

$$(n-2)I_2\dot{\omega}_{r_{n-2}} + (I_1 - I_2)W_2(\Omega) = -x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \tag{1.2.6i}$$

$$(n-2)I_2\dot{\omega}_{r_{n-1}} + (I_2 - I_1)W_1(\Omega) = x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2; \tag{1.2.6j}$$

при этом $r_{n-2} + 1 = r_{n-1}$, а функции $W_t(\Omega)$, $t = 1, \ldots, n-1$, — квадратичные формы по компонентам $\omega_1, \ldots, \omega_f$, $f = n(n-1)/2$, тензора Ω, причем

$$W_t(\Omega)\Big|_{\omega_{k_1}=\ldots=\omega_{k_s}=0} = 0, \quad s = \frac{(n-1)(n-2)}{2}, \quad k_j \neq r_i, \quad j = 1, \ldots, s, \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{1.2.7}$$

Поясним формулу (1.2.7). Всего компонент у тензора $\Omega \in \mathrm{so}(n)$ имеется $f = n(n-1)/2$ штук. Соответственно, компонент у момента силы $M_F = (\mathbf{DN}, \mathbf{F})$ столько же. Поскольку вспомогательная матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & \ldots & x_{nN} \\ -s(\alpha)v_D^2 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}; \tag{1.2.8}$$

$s = (n-1)(n-2)/2$ уравнений в правой части системы (1.2.6) содержат тождественный нуль. Номера этих уравнений обозначим через $k_1, \ldots, k_s$. При этом соответствующие компоненты ω_{k_j}, $j = 1, \ldots, s$, тензора Ω угловой скорости будем называть *циклическими*.

Оставшиеся номера уравнений, в которых стоят следующие величины со знаком:

$$x_{lN}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \quad l = 2, \ldots, n,$$

обозначим через $r_1, \ldots, r_{n-1}$, поскольку

$$f - s = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} = n - 1.$$

Очевидно, что $W_t(0) \equiv 0$ для любых $t = 1, \ldots, n-1$, т.е. квадратичные формы $W_t(\Omega)$ обращаются в нуль, когда все компоненты тензора Ω нулевые. Формула (1.2.7) означает, что для обращения в нуль квадратичных форм $W_t(\Omega)$, $t = 1, \ldots, n-1$, достаточно, чтобы все циклические компоненты тензора Ω были нулевые.

В частности, при $n = 6$ соответствующие уравнения примут следующий вид:

$$(\lambda_5 + \lambda_6)\dot{\omega}_1 + (\lambda_5 - \lambda_6)(\omega_5\omega_9 + \omega_4\omega_8 + \omega_3\omega_7 + \omega_2\omega_6) = 0, \tag{1.2.9a}$$

$$(\lambda_4 + \lambda_6)\dot{\omega}_2 + (\lambda_6 - \lambda_4)(-\omega_5\omega_{12} - \omega_4\omega_{11} - \omega_3\omega_{10} + \omega_1\omega_6) = 0, \tag{1.2.9b}$$

$$(\lambda_3 + \lambda_6)\dot{\omega}_3 + (\lambda_3 - \lambda_6)(\omega_5\omega_{14} + \omega_4\omega_{13} - \omega_2\omega_{10} - \omega_1\omega_7) = 0, \tag{1.2.9c}$$

$$(\lambda_2 + \lambda_6)\dot{\omega}_4 + (\lambda_6 - \lambda_2)(-\omega_5\omega_{15} + \omega_3\omega_{13} + \omega_2\omega_{11} + \omega_1\omega_8) = 0, \tag{1.2.9d}$$

$$(\lambda_1+\lambda_6)\dot\omega_5+(\lambda_1-\lambda_6)(-\omega_4\omega_{15}-\omega_3\omega_{14}-\omega_2\omega_{12}-\omega_1\omega_9)=x_{6N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_4,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \quad (1.2.9e)$$

$$(\lambda_4+\lambda_5)\dot\omega_6+(\lambda_4-\lambda_5)(\omega_9\omega_{12}+\omega_8\omega_{11}+\omega_7\omega_{10}+\omega_1\omega_2)=0, \quad (1.2.9f)$$

$$(\lambda_3+\lambda_5)\dot\omega_7+(\lambda_5-\lambda_3)(-\omega_9\omega_{14}-\omega_8\omega_{13}+\omega_6\omega_{10}-\omega_1\omega_3)=0, \quad (1.2.9g)$$

$$(\lambda_2+\lambda_5)\dot\omega_8+(\lambda_2-\lambda_5)(\omega_9\omega_{15}-\omega_7\omega_{13}-\omega_6\omega_{11}+\omega_1\omega_4)=0, \quad (1.2.9h)$$

$$(\lambda_1+\lambda_5)\dot\omega_9+(\lambda_5-\lambda_1)(\omega_8\omega_{15}+\omega_7\omega_{14}+\omega_6\omega_{12}-\omega_1\omega_5)=-x_{5N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_4,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \quad (1.2.9i)$$

$$(\lambda_3+\lambda_4)\dot\omega_{10}+(\lambda_3-\lambda_4)(\omega_{12}\omega_{14}+\omega_{11}\omega_{13}+\omega_6\omega_7+\omega_2\omega_3)=0, \quad (1.2.9j)$$

$$(\lambda_2+\lambda_4)\dot\omega_{11}+(\lambda_4-\lambda_2)(-\omega_{12}\omega_{15}+\omega_{10}\omega_{13}-\omega_6\omega_8-\omega_2\omega_4)=0, \quad (1.2.9k)$$

$$(\lambda_1+\lambda_4)\dot\omega_{12}+(\lambda_4-\lambda_1)(\omega_{11}\omega_{15}+\omega_{10}\omega_{14}-\omega_6\omega_9-\omega_2\omega_5)=x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_4,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \quad (1.2.9l)$$

$$(\lambda_2+\lambda_3)\dot\omega_{13}+(\lambda_2-\lambda_3)(\omega_{14}\omega_{15}+\omega_{10}\omega_{11}+\omega_7\omega_8+\omega_3\omega_4)=0, \quad (1.2.9m)$$

$$(\lambda_1+\lambda_3)\dot\omega_{14}+(\lambda_3-\lambda_1)(\omega_{13}\omega_{15}-\omega_{10}\omega_{12}-\omega_7\omega_9-\omega_3\omega_5)=-x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_4,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \quad (1.2.9n)$$

$$(\lambda_1+\lambda_2)\dot\omega_{15}+(\lambda_1-\lambda_2)(\omega_{13}\omega_{14}+\omega_{11}\omega_{12}+\omega_8\omega_9+\omega_4\omega_5)=x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_4,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2. \quad (1.2.9o)$$

Таким образом, фазовым пространством совместной системы динамических уравнений при любом натуральном $n \geqslant 2$ порядка $n(n-1)/2$ является прямое произведение следующего n-мерного многообразия на алгебру Ли $\mathrm{so}(n)$:

$$\mathbb{R}^1\times\mathbf{S}^{n-1}\times\mathrm{so}(n). \quad (1.2.10)$$

В частности, при $n=6$ фазовым пространством системы динамических уравнений (1.2.4a)–(1.2.4f), (1.2.9a)–(1.2.9o) 21-го порядка является прямое произведение следующего 6-мерного многообразия на алгебру Ли $\mathrm{so}(6)$:

$$\mathbb{R}^1\times\mathbf{S}^5\times\mathrm{so}(6). \quad (1.2.11)$$

3. Следствия динамической симметрии. Сразу же заметим, что система (1.1.2) в силу имеющейся динамической симметрии

$$I_2=\ldots=I_n \quad (1.3.1)$$

обладает циклическими первыми интегралами

$$\omega_{k_1}\equiv\omega_{k_1}^0=\mathrm{const},\quad \ldots,\quad \omega_{k_s}\equiv\omega_{k_s}^0=\mathrm{const},\quad s=\frac{(n-1)(n-2)}{2}. \quad (1.3.2)$$

При этом $k_1=1,\ldots,k_s$ — некоторые s неповторяющихся чисел из множества $W_1=\{1,2,\ldots,n(n-1)/2\}$. Будем рассматривать набор (1.3.2) первых интегралов на их нулевых уровнях:

$$\omega_{k_1}^0=\ldots=\omega_{k_s}^0=0. \quad (1.3.3)$$

Ненулевых же компонент $\omega_{r_1},\ldots,\omega_{r_p}$ тензора Ω осталось

$$p=\frac{n(n-1)}{2}-\frac{(n-1)(n-2)}{2}=n-1$$

штук (здесь $r_1,\ldots,r_p$ — оставшиеся p чисел из множества W_1, не равные $k_1,\ldots,k_s$). В частности, система (1.2.4a)–(1.2.4f), (1.2.9a)–(1.2.9o) обладает первыми интегралами

$$\begin{gathered}\omega_1\equiv\omega_1^0,\quad \omega_2\equiv\omega_2^0,\quad \omega_3\equiv\omega_3^0,\quad \omega_4\equiv\omega_4^0,\quad \omega_6\equiv\omega_6^0,\\ \omega_7\equiv\omega_7^0,\quad \omega_8\equiv\omega_8^0,\quad \omega_{10}\equiv\omega_{10}^0,\quad \omega_{11}\equiv\omega_{11}^0,\quad \omega_{13}\equiv\omega_{13}^0,\end{gathered} \quad (1.3.4)$$

которые рассматриваются на нулевых уровнях:

$$\omega_1^0=\omega_2^0=\omega_3^0=\omega_4^0=\omega_6^0=\omega_7^0=\omega_8^0=\omega_{10}^0=\omega_{11}^0=\omega_{13}^0=0. \quad (1.3.5)$$

Ненулевых же компонент тензора Ω (при $n=6$) осталось *пять*: $\omega_{r_1}=\omega_5$, $\omega_{r_2}=\omega_9$, $\omega_{r_3}=\omega_{12}$, $\omega_{r_4}=\omega_{14}$, $\omega_{r_5}=\omega_{15}$.

4. Более общая задача и новые квазискорости в системе. Если же рассматривается *более общая задача* о движении тела при наличии некоторой следящей силы $\mathbf{T}$ (имеющей, вообще говоря, n компонент), лежащей на прямой Dx_1 и обеспечивающей во все время движения выполнение определенного векторного равенства ($\mathbf{V}_C$ — скорость центра масс, см. также [38, 39]), например,

$$\mathbf{V}_C \equiv \mathrm{const}, \tag{1.4.1}$$

то в расматриваемой системе вместо силового поля должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил:

$$T - s(\alpha)v^2 \equiv 0. \tag{1.4.2}$$

Очевидно, для этого нужно выбрать величину следящей силы T в виде

$$T = T_v(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega) = s(\alpha)v^2, \quad \mathbf{T} \equiv -\mathbf{S}. \tag{1.4.3}$$

Случай (1.4.3) выбора величины T следящей силы является частным случаем возможности отделения независимой подсистемы меньшего порядка в рассматриваемой системе после некоторого преобразования.

Укажем на *достаточное условие* такого отделения. Пусть выполнено следующее условие на величину T:

$$T = T_v(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega) = \sum_{i,j=0,\ i\leqslant j}^{n-1} \tau_{i,j}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)\omega_{r_i}\omega_{r_j} =$$
$$= T_1\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)v^2, \quad \omega_{r_0}=v. \tag{1.4.4}$$

Введем новые квазискорости, для чего преобразуем величины $\omega_{r_1},\ldots,\omega_{r_{n-1}}$ посредством композиции $(n-2)$-х поворотов, описываемых углами $\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}$:

$$\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ \ldots\\ z_{n-1}\end{pmatrix} = T_{n-2,n-1}(-\beta_1)\circ T_{n-3,n-2}(-\beta_2)\circ\ldots\circ T_{1,2}(-\beta_{n-2})\begin{pmatrix}\omega_{r_1}\\ \omega_{r_2}\\ \ldots\\ \omega_{r_{n-1}}\end{pmatrix}, \tag{1.4.5}$$

где матрица $T_{k,k+1}(\beta)$, $k=1,\ldots,n-2$, получена из единичной наличием минора второго порядка $M_{k,k+1}$:

$$T_{k,k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & M_{k,k+1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{1.4.6}$$

$$M_{k,k+1} = \begin{pmatrix} m_{k,k} & m_{k,k+1}\\ m_{k+1,k} & m_{k+1,k+1}\end{pmatrix}, \quad m_{k,k}=m_{k+1,k+1}=\cos\beta, \quad m_{k+1,k}=-m_{k,k+1}=\sin\beta.$$

В частности, при $n=6$ имеем следующее:

$$\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3\\ z_4\\ z_5\end{pmatrix} = T_{4,5}(-\beta_1)\circ T_{3,4}(-\beta_2)\circ T_{2,3}(-\beta_3)\circ T_{1,2}(-\beta_4)\begin{pmatrix}\omega_5\\ \omega_9\\ \omega_{12}\\ \omega_{14}\\ \omega_{15}\end{pmatrix}, \tag{1.4.7}$$

где

$$T_{4,5}(\beta)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&\cos\beta&-\sin\beta\\0&0&0&\sin\beta&\cos\beta\end{pmatrix},\quad T_{3,4}(\beta)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&\cos\beta&-\sin\beta&0\\0&0&\sin\beta&\cos\beta&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$T_{2,3}(\beta)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&\cos\beta&-\sin\beta&0&0\\0&\sin\beta&\cos\beta&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},\quad T_{1,2}(\beta)=\begin{pmatrix}\cos\beta&-\sin\beta&0&0&0\\\sin\beta&\cos\beta&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Тогда (касательно системы (1.2.4a)–(1.2.4f), (1.2.9a)–(1.2.9o)) справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&z_1=\omega_5\cos\beta_4+\omega_9\sin\beta_4,\\
&z_2=(\omega_9\cos\beta_4-\omega_5\sin\beta_4)\cos\beta_3+\omega_{12}\sin\beta_3,\\
&z_3=[(\omega_5\sin\beta_4-\omega_9\cos\beta_4)\sin\beta_3+\omega_{12}\cos\beta_3]\cos\beta_2+\omega_{14}\sin\beta_2,\\
&z_4=[[(\omega_9\cos\beta_4-\omega_5\sin\beta_4)\sin\beta_3-\omega_{12}\cos\beta_3]\sin\beta_2+\omega_{14}\cos\beta_2]\cos\beta_1+\omega_{15}\sin\beta_1,\\
&z_5=[[(\omega_5\sin\beta_4-\omega_9\cos\beta_4)\sin\beta_3+\omega_{12}\cos\beta_3]\sin\beta_2-\omega_{14}\cos\beta_2]\sin\beta_1+\omega_{15}\cos\beta_1.
\end{aligned}\tag{1.4.8}$$

5. Редукции в системе и системы нормального вида. Динамическую часть уравнений движения (а также при наличии следящей силы и условия (1.4.4)) можно переписать в виде

$$\dot v+\sigma\left(\sum_{s=1}^{n-1}z_s^2\right)\cos\alpha-\sigma\frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\sin\alpha\cdot\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=$$
$$=\frac{T_1\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)v^2-s(\alpha)v^2}{m}\cos\alpha,\tag{1.5.1a}$$

$$\dot\alpha v+z_{n-1}v-\sigma\left(\sum_{s=1}^{n-1}z_s^2\right)\sin\alpha-\sigma\frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\cos\alpha\cdot\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=$$
$$=\frac{s(\alpha)v^2-T_1\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)v^2}{m}\sin\alpha,\tag{1.5.1b}$$

$$\dot\beta_1\sin\alpha-z_{n-2}\cos\alpha-\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}s(\alpha)\cdot\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=0,\tag{1.5.1c}$$

$$\dot\beta_2\sin\alpha\sin\beta_1+z_{n-3}\cos\alpha-\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}s(\alpha)\cdot\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=0,\tag{1.5.1d}$$

. . . .

$$\dot\beta_{n-2}\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}+(-1)^nz_1\cos\alpha-$$
$$-\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}s(\alpha)\cdot\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=0,\tag{1.5.1e}$$

$$\dot\omega_{r_1}=(-1)^n\frac{v^2}{(n-2)I_2}x_{nN}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha),\tag{1.5.1f}$$

$$\dot\omega_{r_2}=(-1)^{n+1}\frac{v^2}{(n-2)I_2}x_{(n-1)N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha),\tag{1.5.1g}$$

. . . .

$$\dot{\omega}_{r_{n-1}} = \frac{v^2}{(n-2)I_2} x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha). \tag{1.5.1h}$$

Здесь введены следующие функции:

$$\Delta_{v,1}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = \left\langle \mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\beta_1 + \frac{\pi}{2}, \beta_2, \ldots, \beta_{n-2}\right)\right\rangle, \tag{1.5.2a}$$

$$\Delta_{v,2}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = \left\langle \mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2}, \beta_2 + \frac{\pi}{2}, \beta_3, \ldots, \beta_{n-2}\right)\right\rangle, \tag{1.5.2b}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{1.5.2c}$$

$$\Delta_{v,n-3}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = \left\langle \mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2}, \ldots, \frac{\pi}{2}, \beta_{n-3} + \frac{\pi}{2}, \beta_{n-2}\right)\right\rangle, \tag{1.5.2d}$$

$$\Delta_{v,n-2}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = \left\langle \mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2}, \ldots, \frac{\pi}{2}, \beta_{n-2} + \frac{\pi}{2}\right)\right\rangle, \tag{1.5.2e}$$

а функция $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega/v)$ представляется в виде

$$\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = |\mathbf{r}_N| = \langle \mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2})\rangle =$$
$$= 0 \cdot \cos\frac{\pi}{2} + \sum_{s=2}^{n} x_{sN}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) i_{sN}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}). \tag{1.5.3}$$

Здесь $\langle \ldots, \ldots \rangle$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Итак, $i_{sN}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$, $s = 1, \ldots, n$, $(i_{1N}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \equiv 0)$ — компоненты единичного вектора по оси вектора $\mathbf{r}_N = \{0, x_{2N}, \ldots, x_{nN}\}$ на $(n-2)$-мерной сфере $\mathbf{S}^{n-2}\{\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$, заданной равенством $\alpha = \pi/2$, как экваториальном сечении соответствующей $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$. Таким образом, по-прежнему

$$\mathbf{i}_N(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \mathbf{i}_v\left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\right), \tag{1.5.4}$$

а вектор $\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$ определяется в (1.2.2). Зависимость от групп переменных $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega/v)$ по-прежнему понимается как сложная зависимость от α, $\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}$, $z_1/v, \ldots, z_{n-1}/v$ в силу (1.4.5).

Вводя далее новые безразмерные фазовые переменные и дифференцирование по формулам

$$z_k = n_1 v Z_k, \quad k = 1, \ldots, n-1, \quad \langle \cdot \rangle = n_1 v \langle ' \rangle, \quad n_1 > 0, \quad n_1 = \mathrm{const}, \tag{1.5.5}$$

приведем систему (1.5.1a)–(1.5.1h) к следующему виду:

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z), \tag{1.5.6a}$$

$$\alpha' = -Z_{n-1} + \sigma n_1\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\sin\alpha +$$
$$+ \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} s(\alpha)\cos\alpha \cdot \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) -$$
$$- \frac{T_1(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1}\sin\alpha, \tag{1.5.6b}$$

$$Z'_{n-1} = \frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2 n_1^2} \cdot \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) - \left(\sum_{s=1}^{n-2} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} +$$
$$+ \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^s Z_{n-1-s}\Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z)\right\} -$$
$$- Z_{n-1} \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z), \tag{1.5.6c}$$

$$Z'_{n-2} = Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \left(\sum_{s=1}^{n-3} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\times$$
$$\times\left\{Z_{n-1}\Delta_{v,1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z) + \sum_{s=2}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-1-s}\Delta_{v,s}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right\}-$$
$$-\frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2n_1^2}\cdot\Delta_{v,1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z) - Z_{n-2}\cdot\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z), \quad (1.5.6\text{d})$$

$$Z'_{n-3} = Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \left(\sum_{s=1}^{n-4} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+$$
$$+\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\left\{\Delta_{v,2}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)\left[-Z_{n-1}+Z_{n-2}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right]+\right.$$
$$\left.+\sum_{s=3}^{n-2}(-1)^sZ_{n-1-s}\Delta_{v,s}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\right\}+$$
$$+\frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2n_1^2}\cdot\Delta_{v,2}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z) - Z_{n-3}\cdot\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z), \quad (1.5.6\text{e})$$

. . . .

$$Z'_1 = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}+$$
$$+\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}(-1)^{n+1}\Delta_{v,n-2}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)\left\{\sum_{s=2}^{n-1}(-1)^sZ_{n+1-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}+$$
$$+(-1)^n\frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2n_1^2}\Delta_{v,n-2}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z) - Z_1\cdot\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z), \quad (1.5.6\text{f})$$

$$\beta'_1 = Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z), \quad (1.5.6\text{g})$$

$$\beta'_2 = -Z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1} + \frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1}\Delta_{v,2}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z), \quad (1.5.6\text{h})$$

. . . .

$$\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1}Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}+$$
$$+\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}\Delta_{v,n-2}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z), \quad (1.5.6\text{i})$$

где

$$\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z) = -\sigma n_1\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)\cos\alpha+$$
$$+\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}s(\alpha)\sin\alpha\cdot\Gamma_v(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)+$$
$$+\frac{T_1(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)-s(\alpha)}{mn_1}\cos\alpha. \quad (1.5.7)$$

Видно, что в системе (1.5.6a)–(1.5.6i) порядка $2(n-1)+1$ может быть выделена независимая подсистема (1.5.6b)–(1.5.6i) порядка $2(n-1)$, которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем $2(n-1)$-мерном фазовом пространстве — касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$.

В частности, при выполнении условия (1.4.3) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы порядка $2(n-1)$ также возможен.

В дальнейшем также зависимость от групп переменных $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega/v)$ понимается как сложная зависимость от $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, z_1/v, \ldots, z_{n-1}/v)$ (сложная зависимость от $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z_1, \ldots, n_1 Z_{n-1})$) в силу (1.4.5) и (1.5.5).

6. Замечания о распределении индексов. В правой части системы (1.5.6b)–(1.5.6i) после общего множителя

$$\frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}$$

величины $\Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z)$, $s = 1, \ldots, n-2$, входят линейным образом (и всегда ровно $(n-2)$ штуки). Так, например, в уравнении (1.5.6c) (с левой частью Z'_{n-1}) функции (1.5.2) входят со всеми индексами s от 1 до $n-2$ (по одному разу каждый индекс), т.е.

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \ldots \quad n-2. \tag{1.6.1}$$

Далее, в уравнениях (1.5.6d)–(1.5.6f) набор функций (1.5.2) появляется по-другому. Так, например, в уравнение для Z'_{n-2} по-прежнему входит набор функций (1.5.2) с индексами (1.6.1), а в уравнение для Z'_{n-3} входит уже набор с индексами

$$2 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \ldots \quad n-2 \tag{1.6.2}$$

т.е. функция $\Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z)$ уже повторяется дважды. Общее распределение индексов дается таблицей 1.

Таблица 1. Общее распределение индексов набора функций (1.5.2)

Левая часть системы (1.5.6b)–(1.5.6i)	Распределение индексов s набора функций (1.5.2)					
Z'_{n-2}	1	2	3	4	…	$n-2$
Z'_{n-3}	2	2	3	4	…	$n-2$
Z'_{n-4}	3	3	3	4	…	$n-2$
Z'_{n-5}	4	4	4	4	…	$n-2$
…	…	…	…	…	…	…
Z'_1	n-2	n-2	n-2	n-2	…	$n-2$

Так, минор (1) первого порядка в левом верхнем углу таблицы 1 соответствует случаю $n = 3$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях лишь функции (1.5.2) лишь при $s = 1$. Там же минор второго порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

соответствует случаю $n = 4$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях функций (1.5.2) лишь при $s = 1, 2$. Минор третьего порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

соответствует случаю $n = 5$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях (1.5.6b)–(1.5.6i) функций (1.5.2) лишь при $s = 1, 2, 3$ и т. д. Наконец, минор порядка $n-2$ соответствует случаю произвольного натурального n (какой мы, собственно, и рассматриваем) и указывает на присутствие в динамических уравнениях (1.5.6b)–(1.5.6i) функций (1.5.2) при всех $s = 1, \ldots, n-2$.

7. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от тензора угловой скорости.

7.1. Приведенная система. Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина (см. [28, 59]), пользуясь (1.2.2), (1.5.4) динамические функции s, $x_{2N}, \ldots, x_{nN}$ примем в виде

$$s(\alpha) = B\cos\alpha, \quad \mathbf{r}_N = R(\alpha)\mathbf{i}_N, \quad R(\alpha) = A\sin\alpha, \quad A, B > 0, \tag{1.7.1}$$

убеждающем нас в том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента неконсервативных сил от тензора угловой скорости (имеется лишь зависимость от углов α, β_1, $\ldots, \beta_{n-2}$). При этом функции $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z)$, $\Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z)$, $s = 1, \ldots, n-2$, входящие в систему (1.5.6a)–(1.5.6i), примут следующий вид:

$$\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) = R(\alpha) = A\sin\alpha, \quad \Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) \equiv 0, \quad s = 1, \ldots, n-2. \tag{1.7.2}$$

Выберем безразмерный параметр b и постоянную n_1 следующим образом:

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{(n-2)I_2}, \quad n_1 = n_0. \tag{1.7.3}$$

Будем рассматривать следующую систему порядка $2n-1$:

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z), \tag{1.7.4a}$$

$$\alpha' = -Z_{n-1} + b\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha, \tag{1.7.4b}$$

$$Z'_{n-1} = \sin\alpha\cos\alpha - \left(\sum_{s=1}^{n-2} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_{n-1}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - bZ_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{1.7.4c}$$

$$Z'_{n-2} = Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \left(\sum_{s=1}^{n-3} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + bZ_{n-2}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - bZ_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{1.7.4d}$$

$$\begin{gathered} Z'_{n-3} = Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\ - \left(\sum_{s=1}^{n-4} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + bZ_{n-3}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - bZ_{n-3}\sin^2\alpha\cos\alpha, \end{gathered} \tag{1.7.4e}$$

. . . .

$$Z'_1 = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\} + bZ_1\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{1.7.4f}$$

$$\beta'_1 = Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{1.7.4g}$$

$$\beta'_2 = -Z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{1.7.4h}$$

. . . .

$$\beta'_{n-3} = (-1)^n Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}}, \tag{1.7.4i}$$

$$\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1} Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}, \tag{1.7.4j}$$

где

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z) = -b\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha + b\sin^2\alpha\cos\alpha.$$

Итак, система (1.7.4a)–(1.7.4j) может быть рассмотрена на своем фазовом $(2(n-1)+1)$-мерном многообразии

$$W_1 = \mathbb{R}^1_+\{v\} \times T_*\mathbf{S}^{n-1}\Big\{Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \beta_1 \leqslant \pi,\ \ldots,\ 0 \leqslant \beta_{n-3} \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \beta_{n-2} < 2\pi\Big\}, \quad (1.7.5)$$

т.е. на прямом произведении числового луча на касательное расслоение к $(n-1)$-мерной сфере. Видно, что в системе (1.7.4a)–(1.7.4j) порядка $2(n-1)+1$ образовалась независимая система (1.7.4b)–(1.7.4j) порядка $2(n-1)$ на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$ к $(n-1)$-мерной сфере $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$. При этом в независимой системе (1.7.4b)–(1.7.4j) порядка $2(n-1)$ образовалась еще одна независимая система (1.7.4b)–(1.7.4i) порядка $2n-3$ на своем $(2n-3)$-мерном многообразии.

В общем случае справедлива следующая теорема.

Теорема 7.1. *У системы* (1.1.2), (1.1.9) *при условиях* (1.4.1) *выделяется динамическая система* (1.5.6b)–(1.5.6i) *на касательном расслоении* $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$ *к* $(n-1)$-*мерной сфере* $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$. *В частности, при условии* (1.7.1) *выделяется система* (1.7.4b)–(1.7.4j).

7.2. Об аналитическом первом интеграле. В силу (1.4.1) значение скорости центра масс является первым интегралом системы (1.5.1a)–(1.5.1h) (при условии (1.4.3)), а именно, функция фазовых переменных

$$\Psi_0(v, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, z_1, \ldots, z_{n-1}) = v^2 + \sigma^2(z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2) - 2\sigma z_{n-1} v \sin\alpha = V_C^2 \qquad (1.7.6)$$

постоянна на ее фазовых траекториях (при этом величины $z_1, \ldots, z_{n-1}$ выбираются в силу (1.4.5)).

В силу невырожденной замены независимого переменного (при $v \neq 0$) у системы (1.7.4a)–(1.7.4j) также существует аналитический интеграл, а именно функция фазовых переменных

$$\Psi_1(v, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z_1, \ldots, Z_{n-1}) = v^2(1 + b^2(Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2) - 2bZ_{n-1}\sin\alpha) = V_C^2 \qquad (1.7.7)$$

постоянна на ее фазовых траекториях.

Равенство (1.7.7) позволяет, не решая системы (1.7.4a)–(1.7.4j), найти зависимость скорости характерной точки твердого тела (центра D диска) от других фазовых переменных, а именно при $V_C \neq 0$ выполнено равенство

$$v^2 = \frac{V_C^2}{1 + b^2(Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2) - 2bZ_{n-1}\sin\alpha}. \qquad (1.7.8)$$

Поскольку в фазовом пространстве системы (1.7.4a)–(1.7.4j) существуют асимптотические предельные множества, то, как будет видно, равенство (1.7.7) задает единственный аналитический (даже непрерывный) первый интеграл системы (1.7.4a)–(1.7.4j) во всем фазовом пространстве (ср. с [1, 4, 10, 12]).

7.3. Общие замечания об интегрируемости системы. Для полного интегрирования системы (1.7.4b)–(1.7.4j) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Но рассматриваемые системы имеют такие симметрии, которые позволяют снизить достаточное количество первых интегралов до $n+1$ для интегрирования рассматриваемых систем.

7.4. Система при отсутствии внешнего силового поля. Для начала рассмотрим систему (1.7.4b)–(1.7.4j) на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$ так, что получим из нее систему консервативную. Более того, будем считать, что функция (1.5.3) тождественно равна нулю. В частности, коэффициент

$\sin\alpha\cos\alpha$ в уравнении (1.7.4c) отсутствует, а также $b = 0$ за исключением слагаемых, содержащих $Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2$. Рассматриваемая система примет вид

$$\alpha' = -Z_{n-1} + b\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\sin\alpha, \tag{1.7.9a}$$

$$Z'_{n-1} = -\left(\sum_{s=1}^{n-2} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_{n-1}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha, \tag{1.7.9b}$$

$$Z'_{n-2} = Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \left(\sum_{s=1}^{n-3} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + bZ_{n-2}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha, \tag{1.7.9c}$$

$$\begin{aligned} Z'_{n-3} = Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} -& \\ - \left(\sum_{s=1}^{n-4} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + bZ_{n-3}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha,& \end{aligned} \tag{1.7.9d}$$

. . . .

$$Z'_1 = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\} + bZ_1\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha, \tag{1.7.9e}$$

$$\beta'_1 = Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{1.7.9f}$$

$$\beta'_2 = -Z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{1.7.9g}$$

. . . .

$$\beta'_{n-3} = (-1)^n Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}}, \tag{1.7.9h}$$

$$\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1} Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}; \tag{1.7.9i}$$

при этом во вспомогательном уравнении (1.7.4a) на величину v функцию $\Psi(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z)$ следует выбрать в виде

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z) = -b(Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2)\cos\alpha.$$

Система (1.7.9a)–(1.7.9i) описывает движение твердого тела при отсутствии *внешнего* поля сил, хотя, как показано в [61–63, 65], некое внутреннее поле сил в системе присутствует, и отвечает за это как раз параметр b.

Теорема 7.2. *Система* (1.7.9a)–(1.7.9i) *обладает n независимыми аналитическими первыми интегралами следующего вида:*

$$\Phi_1(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = v^2(Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2) = C_1 = \text{const}, \tag{1.7.10a}$$

$$\Phi_2(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = v^2\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2}\sin\alpha = C_2 = \text{const}, \tag{1.7.10b}$$

$$\Phi_3(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = v^2\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2}\sin\alpha\sin\beta_1 = C_3 = \text{const}, \tag{1.7.10c}$$

. . . .

$$\Phi_{n-2}(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4} = C_{n-2} = \text{const}, \tag{1.7.10d}$$

$$\Phi_{n-1}(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = v^2 Z_1\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3} = C_{n-1} = \text{const}, \tag{1.7.10e}$$

$$\Phi_n(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = C_n = \text{const}. \tag{1.7.10f}$$

Замечание 7.1. Поскольку в первые интегралы (1.7.10a)–(1.7.10f), вообще говоря, входит величина v, то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (1.7.8), либо вместе с системой (1.7.9a)–(1.7.9i) использовать вспомогательное уравнение (1.7.4a).

Первые $n-1$ первых интегралов (1.7.10a)–(1.7.10e) констатируют тот факт, что поскольку внешнего поля сил нет, то сохраняются оставшиеся $n-1$ (вообще говоря, ненулевые) компоненты тензора угловой скорости n-мерного твердого тела, а именно,

$$\omega_{r_1} \equiv \omega_{r_1}^0 = \mathrm{const}, \ldots, \omega_{r_{n-1}} \equiv \omega_{r_{n-1}}^0 = \mathrm{const}. \tag{1.7.11}$$

В частности, наличие первого интеграла (1.7.10a) объясняется равенством

$$n_0^2 v^2 (Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2) = \omega_{r_1}^2 + \ldots + \omega_{r_{n-1}}^2 = \mathrm{const}. \tag{1.7.12}$$

Последний (n-й) первый интеграл (1.7.10f) имеет кинематический смысл, «привязывает» уравнение на β_{n-2} и может быть найден из следующей квадратуры:

$$\frac{d\beta_{n-2}}{d\beta_{n-3}} = -\frac{Z_1}{Z_2}\frac{1}{\sin\beta_{n-3}}; \tag{1.7.13}$$

если при этом воспользоваться уровнями первых интегралов (1.7.10d), (1.7.10e) и получить равенство

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \pm\sqrt{\frac{C_{n-2}^2}{C_{n-1}^2}\sin^2\beta_{n-3} - 1}, \tag{1.7.14}$$

то квадратура (1.7.13) примет вид

$$\beta_{n-2} = \pm\int \frac{du}{(1-u^2)\sqrt{\left(\frac{C_{n-2}^2}{C_{n-1}^2} - 1\right) - \frac{C_{n-2}^2}{C_{n-1}^2}u^2}}, \quad u = \cos\beta_{n-3}. \tag{1.7.15}$$

Ее вычисление приводит к формуле

$$\beta_{n-2} + C_n = \pm\operatorname{arctg}\frac{\cos\beta_{n-3}}{\sqrt{\frac{C_{n-2}^2}{C_{n-1}^2}\sin^2\beta_{n-3} - 1}}, \quad C_n = \mathrm{const}, \tag{1.7.16}$$

позволяющей получить первый интеграл (1.7.10f). Преобразуя последнее равенство, имеем следующее инвариантное соотношение:

$$\operatorname{tg}^2(\beta_{n-2} + C_n) = \frac{C_{n-1}^2}{(C_{n-2}^2 - C_{n-1}^2)\operatorname{tg}^2\beta_{n-3} - C_{n-1}^2}. \tag{1.7.17}$$

Перефразируем теорему 7.2 следующим образом.

Теорема 7.3. *Система* (1.7.9a)–(1.7.9i) *обладает n независимыми первыми интегралами следующего вида*:

$$\Psi_1(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2}\sin\alpha} = C_1' = \mathrm{const}, \tag{1.7.18a}$$

$$\Psi_2(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = C_2' = \mathrm{const}, \tag{1.7.18b}$$

$$\Psi_3(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \frac{\Phi_{n-2}}{\Phi_{n-1}} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}{Z_1\sin\beta_{n-3}} = C_3' = \mathrm{const}, \tag{1.7.18c}$$

. . . .

$$\Psi_{n-2}(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \frac{\Phi_3}{\Phi_4} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-4}^2}\sin\beta_2} = C_{n-2}' = \mathrm{const}, \tag{1.7.18d}$$

$$\Psi_{n-1}(v;Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})=\frac{\Phi_2}{\Phi_3}=\frac{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-2}^2}}{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-3}^2}\sin\beta_1}=C'_{n-1}=\mathrm{const},\quad(1.7.18e)$$

$$\Psi_n(v;Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})=C'_n=\mathrm{const}.\quad(1.7.18f)$$

Замечание 7.2. Поскольку в первые интегралы (1.7.18a)–(1.7.18f), вообще говоря, входит величина v, то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (1.7.8), либо вместе с системой (1.7.9a)–(1.7.9i) использовать вспомогательное уравнение (1.7.4a).

Последний (n-й) первый интеграл (1.7.18f) также имеет кинематический смысл и «привязывает» уравнение на β_{n-2}, а функции Ψ_2,Ψ_n можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_n.

В формулировке теоремы 7.3 (в отличие от теоремы 7.2) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. Именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (1.7.18a)–(1.7.18f) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 7.3 преобразованный набор первых интегралов (1.7.18a)–(1.7.18f) системы (1.7.9a)–(1.7.9i) (системы при отсутствии силового поля) по-прежнему остается набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (1.7.9a)–(1.7.9i) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$\begin{pmatrix}Z_{n-1}\\Z_{n-2}\\\ldots\\Z_2\\Z_1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}w_{n-1}\\w_{n-2}\\\ldots\\w_2\\w_1\end{pmatrix},$$
$$w_{n-1}=Z_{n-1},\quad w_{n-2}=\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-2}^2},\quad w_{n-3}=\frac{Z_2}{Z_1},\quad w_{n-4}=\frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2+Z_2^2}},\ldots,\quad(1.7.19)$$
$$w_2=\frac{Z_{n-3}}{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-4}^2}},\quad w_1=\frac{Z_{n-2}}{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-3}^2}},$$

система (1.7.9a)–(1.7.9i) распадается следующим образом:

$$\alpha'=-w_{n-1}+b(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2)\sin\alpha,\quad(1.7.20a)$$

$$w'_{n-1}=-w_{n-2}^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+bw_{n-1}(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2)\cos\alpha,\quad(1.7.20b)$$

$$w'_{n-2}=w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+bw_{n-2}(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2)\cos\alpha,\quad(1.7.20c)$$

$$\begin{cases}w'_s=d_s(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})\dfrac{1+w_s^2}{w_s}\dfrac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s},\\ \beta'_s=d_s(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}),\ s=1,\ldots,n-3,\end{cases}\quad(1.7.20d)$$

$$\beta'_{n-2}=d_{n-2}(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}),\quad(1.7.20e)$$

где

$$d_1(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})=\mathcal{Z}_{n-2}(w_{n-1},\ldots,w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\quad(1.7.21a)$$

$$d_2(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})=-\mathcal{Z}_{n-3}(w_{n-1},\ldots,w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1},\quad(1.7.21b)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$d_{n-2}(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})=(-1)^{n+1}\mathcal{Z}_1(w_{n-1},\ldots,w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}};\quad(1.7.21c)$$

при этом

$$z_k = \mathcal{Z}_k(w_{n-1}, \dots, w_1), \quad k = 1, \dots, n-2, \tag{1.7.22}$$

— функции в силу замены (1.7.19).

Видно, что система (1.7.20a)–(1.7.20e) порядка $3 + 2(n-3) + 1 = 2(n-1)$ распадается на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (1.7.20a)–(1.7.20c) — третьего, а системы (1.7.20d) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (1.7.20a)–(1.7.20e) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.7.20a)–(1.7.20c), по одному — для систем (1.7.20d) (всего $n-3$ штуки), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (1.7.20e) (*т.е. всего* n).

Замечание 7.3. Выпишем первые интегралы (1.7.18a)–(1.7.18f) в переменных $w_1, \dots, w_{n-1}$ в силу (1.7.19). Получим:

$$\Theta_1(v; w_{n-1}, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}) = \frac{w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2}{w_{n-2} \sin \alpha} = C_1'' = \text{const}, \tag{1.7.23a}$$

$$\Theta_2(v; w_{n-1}, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}) = w_{n-2} \sin \alpha = C_2'' = \text{const}, \tag{1.7.23b}$$

$$\Theta_{s+2}(v; w_{n-1}, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\sin \beta_s} = C_{s+2}'' = \text{const}, \quad s = 1, \dots, n-3, \tag{1.7.23c}$$

$$\Theta_n(v; w_{n-1}, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}) = C_n'' = \text{const}. \tag{1.7.23d}$$

Замечание 7.4. Поскольку в первые интегралы (1.7.23a)–(1.7.23d), вообще говоря, входит величина v, то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (1.7.8), либо вместе с системой (1.7.20a)–(1.7.20e) использовать вспомогательное уравнение (1.7.4a).

Таким образом, два независимых первых интеграла (1.7.23a), (1.7.23b) достаточны для интегрирования системы (1.7.20a)–(1.7.20c), первые интегралы (1.7.23c) (их $n-3$ штук) достаточны для интегрирования независимых уравнений первого порядка

$$\frac{dw_s}{d\beta_s} = \frac{1 + w_s^2}{w_s} \frac{\cos \beta_s}{\sin \beta_s}, \quad s = 1, \dots, n-3, \tag{1.7.24}$$

после замены независимого переменного эквивалентных соответственно системам (1.7.20d), и, наконец, первый интеграл (1.7.23d) достаточен для «привязывания» уравнения (1.7.20e). Доказана следующая теорема.

Теорема 7.4. *Система* (1.7.9a)–(1.7.9i) *порядка* $2(n-1)$ *обладает достаточным количеством* (n) *независимых первых интегралов.*

7.5. Частичное введение внешнего силового поля. Теперь рассмотрим систему (1.7.4b)–(1.7.4j) при условии $b = 0$ за исключением слагаемых, содержащих $Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2$. При этом частично добавим внешнее силовое поле. Именно, его наличие характеризует коэффициент $\sin \alpha \cos \alpha$ в уравнении (1.7.25b) (в отличие от системы (1.7.9a)–(1.7.9i)). Рассматриваемая система примет вид

$$\alpha' = -Z_{n-1} + b \left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2 \right) \sin \alpha, \tag{1.7.25a}$$

$$Z_{n-1}' = \sin \alpha \cos \alpha - \left(\sum_{s=1}^{n-2} Z_s^2 \right) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + b Z_{n-1} \left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2 \right) \cos \alpha, \tag{1.7.25b}$$

$$Z_{n-2}' = Z_{n-2} Z_{n-1} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \left(\sum_{s=1}^{n-3} Z_s^2 \right) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + b Z_{n-2} \left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2 \right) \cos \alpha, \tag{1.7.25c}$$

$$Z'_{n-3} = Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \left(\sum_{s=1}^{n-4} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + bZ_{n-3}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha, \quad (1.7.25\text{d})$$

. . . .

$$Z'_1 = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\} + bZ_1\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha, \quad (1.7.25\text{e})$$

$$\beta'_1 = Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad (1.7.25\text{f})$$

$$\beta'_2 = -Z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \quad (1.7.25\text{g})$$

. . . .

$$\beta'_{n-3} = (-1)^n Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}}, \quad (1.7.25\text{h})$$

$$\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1} Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}; \quad (1.7.25\text{i})$$

при этом во вспомогательном уравнении (1.7.4a) на величину v функцию $\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z)$ следует выбрать в виде

$$\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z) = -b(Z_1^2+\ldots+Z_{n-1}^2)\cos\alpha.$$

Теорема 7.5. *Система* (1.7.25a)–(1.7.25i) *обладает n независимыми первыми интегралами следующего вида*:

$$\Phi_1(v;Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = v^2(Z_1^2+\ldots+Z_{n-1}^2+\sin^2\alpha) = C_1 = \text{const}, \quad (1.7.26\text{a})$$

$$\Phi_2(v;Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = v^2\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-2}^2}\sin\alpha = C_2 = \text{const}, \quad (1.7.26\text{b})$$

$$\Phi_3(v;Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = v^2\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-3}^2}\sin\alpha\sin\beta_1 = C_3 = \text{const}, \quad (1.7.26\text{c})$$

. . . .

$$\Phi_{n-2}(v;Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = v^2\sqrt{Z_1^2+Z_2^2}\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4} = C_{n-2} = \text{const}, \quad (1.7.26\text{d})$$

$$\Phi_{n-1}(v;Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = v^2 Z_1\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3} = C_{n-1} = \text{const}, \quad (1.7.26\text{e})$$

$$\Phi_n(v;Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = C_n = \text{const}. \quad (1.7.26\text{f})$$

Замечание 7.5. Поскольку в первые интегралы (1.7.26a)–(1.7.26f), вообще говоря, входит величина v, то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (1.7.8), либо вместе с системой (1.7.25a)–(1.7.25i) использовать вспомогательное уравнение (1.7.4a).

Первый интеграл (1.7.26a) по своей структуре похож на интеграл полной энергии. Последний (n-й) первый интеграл (1.7.26f) имеет кинематический смысл, «привязывает» уравнение на β_{n-2} и найден выше.

Перефразируем теорему 7.5 следующим образом.

Теорема 7.6. *Система* (1.7.25a)–(1.7.25i) *обладает n независимыми первыми интегралами следующего вида:*

$$\Psi_1(v;Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{Z_1^2+\ldots+Z_{n-1}^2+\sin^2\alpha}{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-2}^2}\sin\alpha} = C'_1 = \text{const}, \quad (1.7.27\text{a})$$

$$\Psi_2(v;Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = C'_2 = \text{const}, \quad (1.7.27\text{b})$$

$$\Psi_3(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \frac{\Phi_{n-2}}{\Phi_{n-1}} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}{Z_1 \sin \beta_{n-3}} = C_3' = \text{const}, \tag{1.7.27c}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Psi_{n-2}(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \frac{\Phi_3}{\Phi_4} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-4}^2} \sin \beta_2} = C_{n-2}' = \text{const}, \tag{1.7.27d}$$

$$\Psi_{n-1}(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \frac{\Phi_2}{\Phi_3} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2} \sin \beta_1} = C_{n-1}' = \text{const}, \tag{1.7.27e}$$

$$\Psi_n(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = C_n' = \text{const}. \tag{1.7.27f}$$

Замечание 7.6. Поскольку в первые интегралы (1.7.27a)–(1.7.27f), вообще говоря, входит величина v, то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (1.7.8), либо вместе с системой (1.7.25a)–(1.7.25i) использовать вспомогательное уравнение (1.7.4a).

Функции Ψ_2, Ψ_n можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_n.

В формулировке теоремы 7.6 (в отличие от теоремы 7.5) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (1.7.27a)–(1.7.27f) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 7.6 преобразованный набор первых интегралов (1.7.27a)–(1.7.27f) системы (1.7.25a)–(1.7.25i) по-прежнему остается набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (1.7.25a)–(1.7.25i) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (1.7.19) система (1.7.25a)–(1.7.25i) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_{n-1} + b(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2) \sin \alpha, \tag{1.7.28a}$$

$$w_{n-1}' = \sin \alpha \cos \alpha - w_{n-2}^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + b w_{n-1}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2) \cos \alpha, \tag{1.7.28b}$$

$$w_{n-2}' = w_{n-2} w_{n-1} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + b w_{n-2}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2) \cos \alpha, \tag{1.7.28c}$$

$$\begin{cases} w_s' = d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \dfrac{1 + w_s^2}{w_s} \dfrac{\cos \beta_s}{\sin \beta_s}, \\ \beta_s' = d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}), \ s = 1, \ldots, n-3, \end{cases} \tag{1.7.28d}$$

$$\beta_{n-2}' = d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}), \tag{1.7.28e}$$

где выполнены условия (1.7.21). Видно, что система (1.7.28a)–(1.7.28e) порядка $3 + 2(n-3) + 1 = 2(n-1)$ распадается на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (1.7.28a)–(1.7.28c) — третьего, а системы (1.7.28d) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (1.7.28a)–(1.7.28e) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.7.28a)–(1.7.28c), по одному — для систем (1.7.28d) (всего $n-3$ штуки), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (1.7.28e) (*т.е. всего* n).

Замечание 7.7. Выпишем первые интегралы (1.7.27a)–(1.7.27f) в переменных $w_1, \ldots, w_{n-1}$ в силу (1.7.19):

$$\Theta_1(v; w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \frac{w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2 + \sin^2 \alpha}{w_{n-2} \sin \alpha} = C_1'' = \text{const}, \tag{1.7.29a}$$

$$\Theta_2(v; w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = w_{n-2} \sin \alpha = C_2'' = \text{const}, \tag{1.7.29b}$$

$$\Theta_{s+2}(v; w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\sin\beta_s} = C''_{s+2} = \mathrm{const}, \quad s = 1, \ldots, n-3, \tag{1.7.29c}$$

$$\Theta_n(v; w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = C''_n = \mathrm{const}. \tag{1.7.29d}$$

Замечание 7.8. Поскольку в первые интегралы (1.7.29a)–(1.7.29d), вообще говоря, входит величина v, то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (1.7.8), либо вместе с системой (1.7.28a)–(1.7.28e) использовать вспомогательное уравнение (1.7.4a).

Таким образом, два независимых первых интеграла (1.7.29a), (1.7.29b) достаточны для интегрирования системы (1.7.28a)–(1.7.28c), первые интегралы (1.7.29c) (их $n-3$ штук) достаточны для интегрирования независимых уравнений первого порядка

$$\frac{dw_s}{d\beta_s} = \frac{1+w_s^2}{w_s}\frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \quad s = 1, \ldots, n-3, \tag{1.7.30}$$

после замены независимого переменного эквивалентных соответственно системам (1.7.28d), и, наконец, первый интеграл (1.7.29d) достаточен для «привязывания» уравнения (1.7.28e). Доказана следующая теорема.

Теорема 7.7. *Система* (1.7.25a)–(1.7.25i) *порядка* $2(n-1)$ *обладает достаточным количеством* (n) *независимых первых интегралов.*

7.6. Полный список первых интегралов. Перейдем теперь к интегрированию системы (1.7.4b)–(1.7.4j) порядка $2(n-1)$ (без каких бы то ни было упрощений — при наличии всех коэффициентов).

Аналогичным образом, для полного интегрирования системы (1.7.4b)–(1.7.4j) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (1.7.19) система (1.7.4b)–(1.7.4j) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_{n-1} + b(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha, \tag{1.7.31a}$$

$$w'_{n-1} = \sin\alpha\cos\alpha - w_{n-2}^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_{n-1}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\cos\alpha - bw_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{1.7.31b}$$

$$w'_{n-2} = w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_{n-2}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\cos\alpha - bw_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{1.7.31c}$$

$$\begin{cases} w'_s = d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})\dfrac{1+w_s^2}{w_s}\dfrac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \\ \beta'_s = d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}), \ s = 1, \ldots, n-3, \end{cases} \tag{1.7.31d}$$

$$\beta'_{n-2} = d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}), \tag{1.7.31e}$$

где выполнены условия (1.7.21). Видно, что система (1.7.31a)–(1.7.31e) порядка $2(n-1)$ распадается на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (1.7.31a)–(1.7.31c) — третьего, а системы (1.7.31d) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (1.7.31a)–(1.7.31e) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.7.31a)–(1.7.31c), по одному — для систем (1.7.31d) (всего $n-3$ штуки), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (1.7.31e) (*т.е. всего* n).

Для начала поставим в соответствие независимой подсистеме третьего порядка (1.7.31a)–(1.7.31c) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dw_{n-1}}{d\alpha} = \dfrac{\sin\alpha\cos\alpha + bw_{n-1}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\cos\alpha - bw_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha - w_{n-2}^2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{-w_{n-1} + b(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha}, \\ \dfrac{dw_{n-2}}{d\alpha} = \dfrac{bw_{n-2}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\cos\alpha - bw_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha + w_{n-2}w_{n-1}\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{-w_{n-1} + b(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha}. \end{cases} \tag{1.7.32}$$

Используя замену $\tau = \sin\alpha$, перепишем систему (1.7.32) в алгебраическом виде

$$\begin{cases} \dfrac{dw_{n-1}}{d\tau} = \dfrac{\tau + bw_{n-1}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2) - bw_{n-1}\tau^2 - w_{n-2}^2/\tau}{-w_{n-1} + b\tau(1-\tau^2) + b\tau(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)}, \\ \dfrac{dw_{n-2}}{d\tau} = \dfrac{bw_{n-2}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2) - bw_{n-2}\tau^2 + w_{n-2}w_{n-1}/\tau}{-w_{n-1} + b\tau(1-\tau^2) + b\tau(w_{n-2}^2 + w_{n-2}^2)}. \end{cases} \tag{1.7.33}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_{n-2} = u_1\tau, \quad w_{n-1} = u_2\tau, \tag{1.7.34}$$

приводим систему (1.7.33) к следующему виду:

$$\begin{cases} \tau\dfrac{du_2}{d\tau} + u_2 = \dfrac{1 - bu_2\tau^2 + bu_2(u_1^2+u_2^2)\tau^2 - u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2+u_2^2) + b(1-\tau^2)}, \\ \tau\dfrac{du_1}{d\tau} + u_1 = \dfrac{bu_1(u_1^2+u_2^2)\tau^2 - bu_1\tau^2 + u_1u_2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2+u_2^2) + b(1-\tau^2)}, \end{cases} \tag{1.7.35}$$

или, эквивалентно,

$$\begin{cases} \tau\dfrac{du_2}{d\tau} = \dfrac{1 - bu_2 + u_2^2 - u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2+u_2^2) + b(1-\tau^2)}, \\ \tau\dfrac{du_1}{d\tau} = \dfrac{2u_1u_2 - bu_1}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2+u_2^2) + b(1-\tau^2)}. \end{cases} \tag{1.7.36}$$

Поставим в соотвествие системе второго порядка (1.7.36) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - u_1^2}{2u_1u_2 - bu_1}, \tag{1.7.37}$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{u_2^2 + u_1^2 - bu_2 + 1}{u_1}\right) = 0. \tag{1.7.38}$$

Итак, уравнение (1.7.37) имеет первый интеграл

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 - bu_2 + 1}{u_1} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{1.7.39}$$

который в прежних переменных выглядит следующим образом:

$$\Theta_1(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = \frac{w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2 - bw_{n-1}\sin\alpha + \sin^2\alpha}{w_{n-2}\sin\alpha} = C_1 = \mathrm{const}. \tag{1.7.40}$$

Замечание 7.9. При $b = 0$ первый интеграл (1.7.40) системы (1.7.31a)–(1.7.31c) совпадает с первым интегралом (1.7.29a) системы (1.7.28a)–(1.7.28c), но при $b \neq 0$ ни числитель выражения (1.7.40), ни его знаменатель не являются первыми интегралами системы (1.7.31a)–(1.7.31c) по отдельности (хотя при $b = 0$ и числитель и знаменатель выражения (1.7.40) являются первыми интегралами системы (1.7.28a)–(1.7.28c)).

Далее найдем дополнительный первый интеграл системы третьего порядка (1.7.31a)–(1.7.31c). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (1.7.39) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - 1. \tag{1.7.41}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2 + C_1^2 - 4 \geqslant 0, \tag{1.7.42}$$

и фазовое пространство системы (1.7.31a)–(1.7.31c) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (1.7.41). Таким образом, в силу соотношения (1.7.39) первое уравнение системы (1.7.36) примет вид

$$\tau\frac{du_2}{d\tau} = \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}{-u_2 + b(1-\tau^2) + b\tau^2(U_1^2(C_1, u_2) + u_2^2)}, \tag{1.7.43}$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\Big\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + 1)}\Big\}; \tag{1.7.44}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (1.7.42), или вид уравнения Бернулли:

$$\frac{d\tau}{du_2} = \frac{(b - u_2)\tau - b\tau^3(1 - U_1^2(C_1, u_2) - u_2^2)}{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}. \tag{1.7.45}$$

Уравнение (1.7.45) (при учете (1.7.44)) легко приводится к линейному неоднородному уравнению:

$$\frac{dp}{du_2} = \frac{2(u_2 - b)p + 2b(1 - U_1^2(C_1, u_2) - u_2^2)}{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}, \quad p = \frac{1}{\tau^2}. \tag{1.7.46}$$

Последний факт означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде (т.е. через конечную комбинацию квадратур). При этом общее решение уравнения (1.7.46) зависит от произвольной постоянной C_2. Полные выкладки приводить не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (1.7.46), даже в частном случае $b = C_1 = 2$ имеет следующее решение:

$$p = p_0(u_2) = C\big[\sqrt{1 - (u_2 - 1)^2} \pm 1\big] \exp\left[\sqrt{\frac{1 \mp \sqrt{1 - (u_2 - 1)^2}}{1 \pm \sqrt{1 - (u_2 - 1)^2}}}\right], \quad C = \text{const}. \tag{1.7.47}$$

Замечание 7.10. В выражение найденного первого интеграла формально можно вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (1.7.40).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий вид:

$$\Theta_2(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = \ln|\sin\alpha| + G_2\left(\sin\alpha, \frac{w_{n-1}}{\sin\alpha}, \frac{w_{n-2}}{\sin\alpha}\right) = C_2 = \text{const}. \tag{1.7.48}$$

Итак, найдены два первых интеграла (1.7.40), (1.7.48) независимой системы третьего порядка (1.7.31a)–(1.7.31c). Осталось указать по одному первому интегралу — для систем (1.7.31d) (их всего $n-3$), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (1.7.31e).

Действительно, искомые первые интегралы совпадают с первыми интегралами (1.7.29c), (1.7.29d), а именно:

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\sin\beta_s} = C''_{s+2} = \text{const}, \quad s = 1, \dots, n-3, \tag{1.7.49}$$

$$\Theta_n(\beta_{n-3}, \beta_{n-2}) = \beta_{n-2} \pm \operatorname{arctg}\frac{C_{n-1}\cos\beta_{n-3}}{\sqrt{C_{n-2}^2\sin^2\beta_{n-3} - C_{n-1}^2}} = C''_n = \text{const}; \tag{1.7.50}$$

при этом в левую часть равенства (1.7.50) вместо C_{n-2}, C_{n-1} можно подставить интегралы (1.7.49) при $s = n-4, n-3$.

Теорема 7.8. *Система* (1.7.31a)–(1.7.31e) *порядка* $2(n-1)$ *обладает достаточным количеством* (n) *независимых первых интегралов* (1.7.40), (1.7.48), (1.7.49), (1.7.50).

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений при условии (1.7.1) имеет

$$1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + n = \frac{n^2 - n + 4}{2}, \quad n > 2,$$

инвариантных соотношений: имеются аналитическая неинтегрируемая связь вида (1.4.1), соответствующая аналитическому первому интегралу (1.7.6), циклические первые интегралы вида (1.3.2), (1.3.3), первый интеграл вида (1.7.40), также имеется первый интеграл (1.7.48), который может быть найден из уравнения (1.7.46), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и, наконец, трансцендентные первые интегралы вида (1.7.49), (1.7.50).

Теорема 7.9. *Система динамических уравнений (в случае $n = 6$ это система* (1.2.4a)–(1.2.4f), (1.2.9a)–(1.2.9o)) *при условиях* (1.4.1), (1.7.1), (1.3.2), (1.3.3) *обладает* $1 + (n-1)(n-2)/2 + n = (n^2 - n + 4)/2$ *инвариантными соотношениями (полным набором), n из которых являются, вообще говоря, трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа.*

8. Случай зависимости момента неконсервативных сил от тензора угловой скорости.

8.1. Введение зависимости от тензора угловой скорости и приведенная система. Продолжаем изучать динамику n-мерного твердого тела в евклидовом пространстве $\mathbf{E}^n$. Поскольку данный раздел посвящен исследованию случая движения при наличии зависимости момента действующих внешних сил от тензора угловой скорости, введем такую зависимость с более общих позиций.

Пусть $x = (x_{1N}, \ldots, x_{nN})$ — координаты точки N приложения внешней силы на тело (в частности, на $(n-1)$-мерный диск, задаваемый равенством $x_{1N} = 0$), $Q = (Q_1, \ldots, Q_n)$ — компоненты, не зависящие от тензора угловой скорости. Будем вводить зависимость функций $x = (x_{1N}, \ldots, x_{nN})$ от тензора угловой скорости лишь линейным образом, поскольку даже само данное введение априори не очевидно (см. [44, 46]).

Итак, примем зависимость $x = Q + R$, где $R = (R_1, \ldots, R_n)$ — вектор-функция, содержащая компоненты тензора угловой скорости. При этом зависимость функции R от компонент тензора угловой скорости — гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} = -\frac{1}{v}\Omega h, \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}; \tag{1.8.1}$$

например, в случае $n = 6$ тензор Ω имеет вид

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{15} & \omega_{14} & -\omega_{12} & \omega_9 & -\omega_5 \\ \omega_{15} & 0 & -\omega_{13} & \omega_{11} & -\omega_8 & \omega_4 \\ -\omega_{14} & \omega_{13} & 0 & -\omega_{10} & \omega_7 & -\omega_3 \\ \omega_{12} & -\omega_{11} & \omega_{10} & 0 & -\omega_6 & \omega_2 \\ -\omega_9 & \omega_8 & -\omega_7 & \omega_6 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_5 & -\omega_4 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\Omega \in \mathrm{so}(n)$ — тензор угловой скорости, $(h_1, \ldots, h_n)$ — некоторые положительные параметры.

Применительно к нашей задаче можно считать, что $x_{1N} \equiv 0$; при этом

$$x_{2N} = Q_2 - h_1\frac{\omega_{r_{n-1}}}{v},\ x_{3N} = Q_3 + h_1\frac{\omega_{r_{n-2}}}{v}, \ldots, x_{nN} = Q_n + (-1)^{n+1}h_1\frac{\omega_{r_1}}{v}, \tag{1.8.2}$$

где $h_2 = \ldots = h_n$ в силу динамической симметрии (что, в принципе, нам сейчас не требуется). Здесь $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_{n-1}}$ — оставшиеся, вообще говоря, ненулевые компоненты тензора угловой скорости Ω.

8.2. Приведенная система. Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина (см. [28, 73]), пользуясь (1.5.4), имеем:

$$Q = R(\alpha)\mathbf{i}_N, \tag{1.8.3}$$

а динамические функции s, $x_{2N}, \ldots, x_{nN}$ примем в следующем виде:

$$s(\alpha) = B\cos\alpha, \quad \mathbf{r}_N = Q - \frac{1}{v}\Omega h, \quad R(\alpha) = A\sin\alpha, \quad A, B > 0, \tag{1.8.4}$$

убеждающем нас о том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т.е. присутствует зависимость момента от компонент тензора угловой скорости).

При этом функции $\Gamma_v(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega/v)$, $\Delta_{v,s}(\alpha,\beta_1,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega/v)$, $s=1,\ldots,n-1$, входящие в систему (1.5.6b)–(1.5.6i), примут следующий вид:

$$\begin{gathered}\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=A\sin\alpha-\frac{h_1}{v}z_{n-1},\\ \Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=\frac{h_1}{v}z_{n-2},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=(-1)^{n+1}\frac{h_1}{v}z_1.\end{gathered}\tag{1.8.5}$$

Тогда благодаря условиям (1.4.1), (1.8.4) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (1.5.6a)–(1.5.6i)) примет вид аналитической системы:

$$v'=v\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z),\tag{1.8.6a}$$

$$\alpha'=-Z_{n-1}+b\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)\sin\alpha+b\sin\alpha\cos^2\alpha-bH_1Z_{n-1}\cos^2\alpha,\tag{1.8.6b}$$

$$\begin{gathered}Z'_{n-1}=\sin\alpha\cos\alpha-(1+bH_1)\left(\sum_{s=1}^{n-2}Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+bZ_{n-1}\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)\cos\alpha-\\ -bZ_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha+bH_1Z_{n-1}^2\sin\alpha\cos\alpha-H_1Z_{n-1}\cos\alpha,\end{gathered}\tag{1.8.6c}$$

$$\begin{gathered}Z'_{n-2}=(1+bH_1)Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+(1+bH_1)\left(\sum_{s=1}^{n-3}Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+bZ_{n-2}\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)\cos\alpha-\\ -bZ_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha+bH_1Z_{n-2}Z_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha-H_1Z_{n-2}\cos\alpha,\end{gathered}\tag{1.8.6d}$$

$$\begin{gathered}Z'_{n-3}=(1+bH_1)Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\\ -(1+bH_1)Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}-(1+bH_1)\left(\sum_{s=1}^{n-4}Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+\\ +bZ_{n-3}\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)\cos\alpha-bZ_{n-3}\sin^2\alpha\cos\alpha+bH_1Z_{n-3}Z_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha-H_1Z_{n-3}\cos\alpha,\end{gathered}\tag{1.8.6e}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{gathered}Z'_1=(1+bH_1)Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}+bZ_1\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)-\\ \cos\alpha-bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha+bH_1Z_1Z_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha-H_1Z_1\cos\alpha,\end{gathered}\tag{1.8.6f}$$

$$\beta'_1=(1+bH_1)Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\tag{1.8.6g}$$

$$\beta'_2=-(1+bH_1)Z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1},\tag{1.8.6h}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\beta'_{n-3}=(-1)^n(1+bH_1)Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}},\tag{1.8.6i}$$

$$\beta'_{n-2}=(-1)^{n+1}(1+bH_1)Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}},\tag{1.8.6j}$$

где

$$\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z) = -b\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha + b\sin^2\alpha\cos\alpha - bH_1 Z_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha;$$

при этом выбираем, как и выше, безразмерные параметры b, H_1 и постоянную n_1 следующим образом:

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{(n-2)I_2}, \quad H_1 = \frac{Bh_1}{(n-2)I_2 n_0}, \quad n_1 = n_0. \tag{1.8.7}$$

Итак, система (1.8.6a)–(1.8.6j) может быть рассмотрена на своем фазовом $2(n-1)+1$-мерном многообразии

$$W_1 = \mathbb{R}^1_+\{v\} \times T_*\mathbf{S}^{n-1}\Big\{Z_{n-1},\ldots,Z_1;$$
$$0 \leqslant \alpha \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \beta_1 \leqslant \pi,\ \ldots,\ 0 \leqslant \beta_{n-3} \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \beta_{n-2} < 2\pi\Big\}, \tag{1.8.8}$$

т.е. на прямом произведении числового луча на касательное расслоение к $(n-1)$-мерной сфере.

Видно, что в системе (1.8.6a)–(1.8.6j) порядка $2(n-1)+1$ образовалась независимая система (1.8.6b)–(1.8.6j) порядка $2(n-1)$ на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{Z_{n-1},\ldots,Z_1;\ \alpha, \beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$ к $(n-1)$-мерной сфере $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$. При этом в независимой системе (1.8.6b)–(1.8.6j) порядка $2(n-1)$ образовалась еще одна независимая система (1.8.6b)–(1.8.6i) порядка $2n-3$ на своем $(2n-3)$-мерном многообразии.

Теорема 8.1. *У динамической части уравнений движения при условиях* (1.3.1), (1.3.2), (1.3.3) *выделяется динамическая система* (1.5.6b)–(1.5.6i) *на касательном расслоении*

$$T_*\mathbf{S}^{n-1}\{Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$$

к $(n-1)$-мерной сфере $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$. В частности, при условии (1.7.1) *выделяется система* (1.8.6b)–(1.8.6j).

8.3. Об аналитическом первом интеграле. В силу (1.4.1) значение скорости центра масс является первым интегралом системы (1.5.1a)–(1.5.1h) (при условии (1.4.3)), а именно функция фазовых переменных

$$\Psi_0(v,\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},z_1,\ldots,z_{n-1}) = v^2 + \sigma^2(z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2) - 2\sigma z_{n-1} v\sin\alpha = V_C^2 \tag{1.8.9}$$

постоянна на ее фазовых траекториях (при этом величины $z_1,\ldots,z_{n-1}$ выбираются в силу (1.4.8)).

В силу невырожденной замены независимого переменного (при $v \neq 0$) у системы (1.8.6a)–(1.8.6j) также существует аналитический интеграл, а именно, функция фазовых переменных

$$\Psi_1(v,\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z_1,\ldots,Z_{n-1}) = v^2(1 + b^2(Z_1^2+\ldots+Z_{n-1}^2) - 2bZ_{n-1}\sin\alpha) = V_C^2 \tag{1.8.10}$$

постоянна на ее фазовых траекториях.

Равенство (1.8.10) позволяет, не решая системы (1.8.6a)–(1.8.6j), найти зависимость скорости характерной точки твердого тела (центра D $(n-1)$-мерного диска) от других фазовых переменных, а именно, при $V_C \neq 0$ выполнено равенство

$$v^2 = \frac{V_C^2}{1 + b^2(Z_1^2+\ldots+Z_{n-1}^2) - 2bZ_{n-1}\sin\alpha}. \tag{1.8.11}$$

Поскольку в фазовом пространстве системы (1.8.6a)–(1.8.6j) существуют асимптотические (или притягивающие, или отталкивающие) предельные множества, то, как будет видно, равенство (1.8.10) задает единственный аналитический (даже непрерывный) первый интеграл системы (1.8.6a)–(1.8.6j) во всем фазовом пространстве.

8.4. Полный список первых интегралов. Для полного интегрирования системы (1.8.6b)–(1.8.6j) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Но рассматриваемые системы имеют такие симметрии, которые позволяют снизить достаточное количество первых интегралов до n для интегрирования систем. Действительно, после замены переменных

$$\begin{pmatrix} Z_{n-1} \\ Z_{n-2} \\ \dots \\ Z_2 \\ Z_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} w_{n-1} \\ w_{n-2} \\ \dots \\ w_2 \\ w_1 \end{pmatrix},$$

$$w_{n-1} = Z_{n-1}, \quad w_{n-2} = \sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2}, \quad w_{n-3} = \frac{Z_2}{Z_1}, \quad w_{n-4} = \frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}, \quad \ldots, \tag{1.8.12}$$

$$w_2 = \frac{Z_{n-3}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-4}^2}}, \quad w_1 = \frac{Z_{n-2}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2}},$$

система (1.8.6b)–(1.8.6j) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -(1 + bH_1)w_{n-1} + b(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha - bH_1 w_{n-1}\cos^2\alpha, \tag{1.8.13a}$$

$$w'_{n-1} = \sin\alpha\cos\alpha - (1 + bH_1)w_{n-2}^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_{n-1}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\cos\alpha - \\ - bw_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha + bH_1 w_{n-1}^2\sin\alpha\cos\alpha - H_1 w_{n-1}\cos\alpha, \tag{1.8.13b}$$

$$w'_{n-2} = (1 + bH_1)w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_{n-2}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\cos\alpha - \\ - bw_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha + bH_1 w_{n-2}w_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha - H_1 w_{n-2}\cos\alpha, \tag{1.8.13c}$$

$$\begin{cases} w'_s = d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})\dfrac{1 + w_s^2}{w_s}\dfrac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \\ \beta'_s = d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}), \quad s = 1, \ldots, n-3, \end{cases} \tag{1.8.13d}$$

$$\beta'_{n-2} = d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}), \tag{1.8.13e}$$

где выполнены условия

$$d_1(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = (1 + bH_1)\mathcal{Z}_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{1.8.14a}$$

$$d_2(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = -(1 + bH_1)\mathcal{Z}_{n-3}(w_{n-1}, \ldots, w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{1.8.14b}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \\ = (-1)^{n+1}(1 + bH_1)\mathcal{Z}_1(w_{n-1}, \ldots, w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}; \tag{1.8.14c}$$

при этом

$$z_k = \mathcal{Z}_k(w_{n-1}, \ldots, w_1), \quad k = 1, \ldots, n-2, \tag{1.8.15}$$

— функции в силу замены (1.8.12).

Видно, что система (1.8.13a)–(1.8.13e) порядка $2(n-1)$ распадается на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (1.8.13a)–(1.8.13c) — третьего, а системы (1.8.13d) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (1.8.13a)–(1.8.13e) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.8.13a)–(1.8.13c), по одному — для систем (1.8.13d) (всего $n-3$ штуки), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (1.8.13e) (*т.е. всего n*).

Для начала поставим в соответствие независимой подсистеме третьего порядка (1.8.13a)–(1.8.13c) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{cases}\dfrac{dw_{n-1}}{d\alpha} = \dfrac{R_2(\alpha, w_{n-2}, w_{n-1})}{-w_{n-1} + b(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha - bH_1 w_{n-1}\cos^2\alpha},\\ \dfrac{dw_{n-2}}{d\alpha} = \dfrac{R_1(\alpha, w_{n-2}, w_{n-1})}{-w_{n-1} + b(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha - bH_1 w_{n-1}\cos^2\alpha},\end{cases} \tag{1.8.16}$$

где

$$R_2(\alpha, w_{n-2}, w_{n-1}) = \sin\alpha\cos\alpha + bw_{n-1}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\cos\alpha - bw_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha -$$
$$- (1 + bH_1)w_{n-2}^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bH_1 w_{n-1}^2\sin\alpha\cos\alpha - H_1 w_{n-1}\cos\alpha,$$

$$R_1(\alpha, w_{n-2}, w_{n-1}) = bw_{n-2}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\cos\alpha - bw_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha +$$
$$+ (1 + bH_1)w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bH_1 w_{n-2}w_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha - H_1 w_{n-2}\cos\alpha.$$

Используя замену $\tau = \sin\alpha$, перепишем систему (1.8.16) в алгебраическом виде:

$$\begin{cases}\dfrac{dw_{n-1}}{d\tau} = \dfrac{\tau + bw_{n-1}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2) - bw_{n-1}\tau^2 - (1 + bH_1)\dfrac{w_{n-2}^2}{\tau} + bH_1 w_{n-1}^2\tau - H_1 w_{n-1}}{-w_{n-1} + b\tau(1 - \tau^2) + b\tau(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2) - bH_1 w_{n-1}(1 - \tau^2)},\\ \dfrac{dw_{n-2}}{d\tau} = \dfrac{bw_{n-2}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2) - bw_{n-2}\tau^2 + (1 + bH_1)\dfrac{w_{n-2}w_{n-1}}{\tau} + bH_1 w_{n-2}w_{n-1}\tau - H_1 w_{n-2}}{-w_{n-1} + b\tau(1 - \tau^2) + b\tau(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2) - bH_1 w_{n-1}(1 - \tau^2)}.\end{cases} \tag{1.8.17}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_{n-2} = u_1\tau, \quad w_{n-1} = u_2\tau, \tag{1.8.18}$$

приводим систему (1.8.17) к следующему виду:

$$\begin{cases}\tau\dfrac{du_2}{d\tau} + u_2 = \dfrac{1 - bu_2\tau^2 + bu_2(u_1^2 + u_2^2)\tau^2 - (1 + bH_1)u_1^2 - H_1 u_2 + bH_1 u_2^2\tau^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2) - bH_1 u_2(1 - \tau^2)},\\ \tau\dfrac{du_1}{d\tau} + u_1 = \dfrac{bu_1(u_1^2 + u_2^2)\tau^2 - bu_1\tau^2 + (1 + bH_1)u_1u_2 - H_1 u_1 + bH_1 u_1u_2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2) - bH_1 u_2(1 - \tau^2)}\end{cases} \tag{1.8.19}$$

или, эквивалентно,

$$\begin{cases}\tau\dfrac{du_2}{d\tau} = \dfrac{1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2 - (1 + bH_1)u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2) - bH_1 u_2(1 - \tau^2)},\\ \tau\dfrac{du_1}{d\tau} = \dfrac{2(1 + bH_1)u_1u_2 - (b + H_1)u_1}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2) - bH_1 u_2(1 - \tau^2)}.\end{cases} \tag{1.8.20}$$

Поставим в соответствие системе второго порядка (1.8.20) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2 - (1 + bH_1)u_1^2}{2(1 + bH_1)u_1u_2 - (b + H_1)u_1}, \tag{1.8.21}$$

которое несложно привести к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{(1 + bH_1)u_2^2 + (1 + bH_1)u_1^2 - (b + H_1)u_2 + 1}{u_1}\right) = 0. \tag{1.8.22}$$

Итак, уравнение (1.8.21) имеет первый интеграл

$$\frac{(1 + bH_1)u_2^2 + (1 + bH_1)u_1^2 - (b + H_1)u_2 + 1}{u_1} = C_1 = \text{const}, \tag{1.8.23}$$

который в прежних переменных выглядит следующим образом:

$$\Theta_1(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = \frac{(1 + bH_1)(w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2) - (b + H_1)w_{n-1} \sin\alpha + \sin^2\alpha}{w_{n-2} \sin\alpha} = C_1 = \text{const}. \quad (1.8.24)$$

Замечание 8.1. Рассмотрим систему (1.8.13a)–(1.8.13c) с переменной диссипацией с нулевым средним (см. [66, 68, 69, 71]), которая становится консервативной при $b = H_1$:

$$\alpha' = -(1 + b^2)w_{n-1} + b\left(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2\right)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha - b^2 w_{n-1}\cos^2\alpha, \quad (1.8.25a)$$

$$w_{n-1}' = \sin\alpha\cos\alpha - (1 + b^2)w_{n-2}^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_{n-1}\left(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2\right)\cos\alpha - \\ - bw_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha + b^2 w_{n-1}^2 \sin\alpha\cos\alpha - bw_{n-1}\cos\alpha, \quad (1.8.25b)$$

$$w_{n-2}' = (1 + b^2)w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_{n-2}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\cos\alpha - \\ - bw_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha + b^2 w_{n-2}w_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha - bw_{n-2}\cos\alpha. \quad (1.8.25c)$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$(1 + b^2)(w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2) - 2bw_{n-1}\sin\alpha + \sin^2\alpha = C_1^* = \text{const}, \quad (1.8.26)$$

$$w_{n-2}\sin\alpha = C_2^* = \text{const}. \quad (1.8.27)$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (1.8.26), (1.8.27) также является первым интегралом системы (1.8.25). Однако при $b \neq H_1$ каждая из функций

$$(1 + bH_1)(w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2) - (b + H_1)w_{n-1}\sin\alpha + \sin^2\alpha \quad (1.8.28)$$

и (1.8.27) по отдельности не является первым интегралом системы (1.8.13a)–(1.8.13c). Однако отношение функций (1.8.28), (1.8.27) является первым интегралом системы (1.8.13a)–(1.8.13c) при любых b, H_1.

Далее найдем дополнительный первый интеграл системы третьего порядка (1.8.13a)–(1.8.13c). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (1.8.23) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 - \frac{b + H_1}{2(1 + bH_1)}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2(1 + bH_1)}\right)^2 = \frac{(b - H_1)^2 + C_1^2 - 4}{4(1 + bH_1)^2}. \quad (1.8.29)$$

Параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(b - H_1)^2 + C_1^2 - 4 \geqslant 0, \quad (1.8.30)$$

и фазовое пространство системы (1.8.13a)–(1.8.13c) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (1.8.29).

Таким образом, в силу соотношения (1.8.23) первое уравнение системы (1.8.20) примет вид

$$\tau\frac{du_2}{d\tau} = \frac{1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2 - (1 + bH_1)U_1^2(C_1, u_2)}{-u_2 + b(1 - \tau^2) + b\tau^2(U_1^2(C_1, u_2) + u_2^2) - bH_1u_2(1 - \tau^2)}, \quad (1.8.31)$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(1 + bH_1)(1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2)}\right\}, \quad (1.8.32)$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (1.8.30), или вид уравнения Бернулли:

$$\frac{d\tau}{du_2} = \frac{(b - (1 + bH_1)u_2)\tau - b\tau^3(1 - U_1^2(C_1, u_2) - u_2^2 - H_1u_2)}{1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2 - (1 + bH_1)U_1^2(C_1, u_2)}. \quad (1.8.33)$$

Уравнение (1.8.33) (при учете (1.8.32)) легко приводится к линейному неоднородному уравнению:

$$\frac{dp}{du_2} = \frac{2((1 + bH_1)u_2 - b)p + 2b(1 - H_1u_2 - u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2))}{1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2 - (1 + bH_1)U_1^2(C_1, u_2)}, \quad p = \frac{1}{\tau^2}. \quad (1.8.34)$$

Последний факт означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде (т.е. через конечную комбинацию квадратур). При этом общее решение уравнения (1.8.34) зависит от произвольной постоянной C_2. Полные выкладки приводить не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (1.8.34), даже в частном случае

$$|b-H_1|=2, \quad C_1=\frac{1-A_1^4}{1+A_1^4}, \quad A_1=\frac{1}{2}(b+H_1)$$

имеет следующее достаточно громоздкое решение:

$$p=p_0(u_2)=C[1-A_1u_2]^{2/(1+A_1^4)}\left|\frac{\sqrt{C_1^2-4A_1^2(1-A_1u_2)^2}\pm C_1}{\sqrt{C_1^2-4A_1^2(1-A_1u_2)^2}\mp C_1}\right|^{\pm A_1^4/(1+A_1^4)}\times$$
$$\times\exp\frac{2(A_1-b)}{(1+A_1^4)A_1(A_1u_2-1)}, \quad C=\mathrm{const}. \quad (1.8.35)$$

Замечание 8.2. В выражение найденного первого интеграла формально можно вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (1.8.24). Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_{n-1},w_{n-2};\alpha)=\ln|\sin\alpha|+G_2\left(\sin\alpha,\frac{w_{n-1}}{\sin\alpha},\frac{w_{n-2}}{\sin\alpha}\right)=C_2=\mathrm{const}. \quad (1.8.36)$$

Итак, найдены два первых интеграла (1.8.24), (1.8.36) независимой системы третьего порядка (1.8.13a)–(1.8.13c). Осталось указать по одному первому интегралу — для систем (1.8.13d) (их всего $n-3$), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (1.8.13e).

Действительно, искомые первые интегралы совпадают с первыми интегралами (1.7.29c), (1.7.29d), а именно,

$$\Theta_{s+2}(w_s;\beta_s)=\frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\sin\beta_s}=C''_{s+2}=\mathrm{const}, \quad s=1,\ldots,n-3, \quad (1.8.37)$$

$$\Theta_n(\beta_{n-3},\beta_{n-2})=\beta_{n-2}\pm\operatorname{arctg}\frac{C_{n-1}\cos\beta_{n-3}}{\sqrt{C_{n-2}^2\sin^2\beta_{n-3}-C_{n-1}^2}}=C_n=\mathrm{const}; \quad (1.8.38)$$

при этом в левую часть равенства (1.8.38) вместо C_{n-2}, C_{n-1} необходимо подставить интегралы (1.8.37) при $s=n-4,n-3$.

Теорема 8.2. *Система* (1.8.13a)–(1.8.13e) *порядка* $2(n-1)$ *обладает достаточным количеством* (n) *независимых первых интегралов* (1.8.24), (1.8.36), (1.8.37), (1.8.38).

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений при условии (1.8.4) имеет

$$1+\frac{(n-1)(n-2)}{2}+n=\frac{n^2-n+4}{2}, \quad n>2,$$

инвариантных соотношений: имеются аналитическая неинтегрируемая связь вида (1.4.1), соответствующая аналитическому первому интегралу (1.7.6), циклические первые интегралы вида (1.3.2), (1.3.3), первый интеграл вида (1.8.24), также имеется первый интеграл (1.8.36), который может быть найден из уравнения (1.8.34), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и, наконец, трансцендентные первые интегралы вида (1.8.37), (1.8.38).

Теорема 8.3. *Система динамических уравнений* (*в случае* $n=6$ *это система* (1.2.4a)–(1.2.4f), (1.2.9a)–(1.2.9o)) *при условиях* (1.4.1), (1.8.4), (1.3.2), (1.3.3) *обладает* $1+(n-1)(n-2)/2+n=(n^2-n+4)/2$ *инвариантными соотношениями* (*полным набором*), n *из которых являются, вообще говоря, трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа.*

8.5. Топологические аналогии. Имеют место следующие топологические и механические аналогии.

1. Движение свободного n-мерного твердого тела в неконсервативном поле сил со следящей силой (при наличии неинтегрируемой связи) при учете дополнительной зависимости от тензора угловой скорости (см. также [67, 70, 74]).
2. Движение закрепленного n-мерного физического маятника в потоке набегающей среды (неконсервативное поле сил) при учете дополнительной зависимости от тензора угловой скорости (см. также [60, 64]).
3. Вращение n-мерного твердого тела вокруг центра масс, движущегося прямолинейно и равномерно, и находящегося в неконсервативном поле сил при учете дополнительной зависимости от тензора угловой скорости (см. также [52, 56]).

О более общих топологических аналогиях см. также [2, 15, 16].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В.* Архимедовы равномерные структуры// Совр. мат. Фундам. напр. — 2007. — *23.* — С. 46–51.
2. *Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В.* Многообразия непрерывных структур// Совр. мат. Фундам. напр. — 2007. — *23.* — С. 71–86.
3. *Богоявленский О. И.* Динамика твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью// Докл. АН СССР. — 1983. — *272*, № 6. — С. 1364–1367.
4. *Богоявленский О. И.* Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера// Докл. АН СССР. — 1986. — *287*, № 5. — С. 1105–1108.
5. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.
6. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.
7. *Веселов А. П.* Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на $so(4)$// Докл. АН СССР. — 1983. — *270*, № 6. — С. 1298–1300.
8. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2001. — *380*, № 1. — С. 47–50.
9. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2002. — *383*, № 5. — С. 635–637.
10. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — *5.* — С. 37–41.
11. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Символы Леви-Чивиты, обобщенные векторные произведения и новые случаи интегрируемости в механике многомерного тела// Совр. мат. прилож. — 2012. — *76.* — С. 22–39.
12. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
13. *Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
14. *Иванова Т. А.* Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — *52*, № 2. — С. 43–51.
15. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — *38*, № 1. — С. 3–67.
16. *Козлов В. В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — *79*, № 3. — С. 307–316.
17. *Козлов В. В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 2019. — *74*, № 1 (445). — С. 117–148.
18. *Колмогоров А. Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе// Докл. АН СССР. — 1953. — *93*, № 5. — С. 763–766.
19. *Локшин Б. Я., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Маятниковые системы с динамической симметрией// Совр. мат. прилож. — 2016. — *100.* — С. 76–133.
20. *Манаков С. В.* Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела// Функц. анал. прилож. — 1976. — *10*, № 4. — С. 93–94.

21. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — *9*, № 100. — С. 136–150.
22. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — *9/1*, № 110. — С. 35–41.
23. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — *7*, № 118. — С. 60–69.
24. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
25. *Тихонов А. А.* Метод управления для угловой стабилизации электродинамической тросовой системы// Автомат. телемех. — 2020. — № 2. — С. 91–114.
26. *Трофимов В. В.* Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — *44*, № 5. — С. 1191–1199.
27. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — *16*, № 4. — С. 3–229.
28. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости// в кн.: Полн. собр. соч.. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133–135.
29. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
30. *Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в среде с сопротивлением// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1992. — *1*. — С. 52–58.
31. *Шамолин М. В.* Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента// Прикл. мат. мех. — 1993. — *57*, № 4. — С. 40–49.
32. *Шамолин М. В.* Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1996. — *4*. — С. 57–69.
33. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 3. — С. 209–210.
34. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — *364*, № 5. — С. 627–629.
35. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — *375*, № 3. — С. 343–346.
36. *Шамолин М. В.* Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 1. — С. 169–170.
37. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathrm{so}(4)\times\mathbf{R}^4$// Усп. мат. наук. — 2005. — *60*, № 6. — С. 233–234.
38. *Шамолин М. В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — *69*, № 6. — С. 1003–1010.
39. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — *62*, № 5. — С. 169–170.
40. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. прикл. мат. — 2008. — *14*, № 3. — С. 3–237.
41. *Шамолин М. В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — *425*, № 3. — С. 338–342.
42. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — *65*, № 1. — С. 189–190.
43. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — *437*, № 2. — С. 190–193.
44. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — *440*, № 2. — С. 187–190.
45. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *444*, № 5. — С. 506–509.
46. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — *453*, № 1. — С. 46–49.

47. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — *68*, № 5 (413). — С. 185–186.
48. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — *449*, № 4. — С. 416–419.
49. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — *457*, № 5. — С. 542–545.
50. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — *20*, № 4. — С. 3–231.
51. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — *461*, № 5. — С. 533–536.
52. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — *464*, № 6. — С. 688–692.
53. *Шамолин М. В.* Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 6. — С. 743–759.
54. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *475*, № 5. — С. 519–523.
55. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — *474*, № 2. — С. 177–181.
56. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *477*, № 2. — С. 168–172.
57. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией// Пробл. мат. анал. — 2018. — № 95. — С. 79–101.
58. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *482*, № 5. — С. 527–533.
59. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *479*, № 3. — С. 270–276.
60. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 1. Твердое тело в неконсервативном поле. — М.: ЛЕНАНД, 2019.
61. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *489*, № 6. — С. 592–598.
62. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *485*, № 5. — С. 583–587.
63. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *487*, № 4. — С. 381–386.
64. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 2: Закрепленные маятники разной размерности. — М.: ЛЕНАНД, 2021.
65. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *491*, № 1. — С. 95–101.
66. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *494*, № 1. — С. 105–111.
67. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *495*, № 1. — С. 84–90.
68. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *497*, № 1. — С. 23–30.
69. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *500*, № 1. — С. 78–86.
70. *Шамолин М. В.* Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *501*, № 1. — С. 89–94.

71. *Aleksandrov A. Y., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A.* On the monoaxial stabilization of a rigid body under vanishing restoring torque// AIP Conf. Proc. — 2018. — *1959.* — 080001.
72. *Poincaré H.* Calcul des probabilités. — Paris: Gauthier-Villars, 1912.
73. *Shamolin M. V.* Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2002. — *110*, № 2. — P. 2528–2557.
74. *Tikhonov A. A., Yakovlev A. B.* On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters// Int. J. Plasma Env. Sci. Techn.. — *13*, № 1. — P. 49–52.

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: `shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru`