ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 211 (2022). С. 96–113
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-211-96-113

УДК 517.968.74

ОБ ОДНОМ НАГРУЖЕННОМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ СМЕШАННОГО ТИПА С ДРОБНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ГЕРАСИМОВА—КАПУТО

© 2022 г. **Т. К. ЮЛДАШЕВ, Э. Т. КАРИМОВ**

Аннотация. Рассмотрены вопросы однозначной разрешимости краевой задачи для нагруженного интегро-дифференциального уравнения смешанного типа с дробными операторами Герасимова—Капуто, спектральными параметрами и малыми параметрами при смешанных производных. Решение задачи получено в виде рядов Фурье. Доказана однозначная разрешимость задачи для регулярных значений спектральных параметров. Изучена непрерывная зависимость решения краевой задачи от малых параметров и от заданных функций при регулярных значениях спектральных параметров.

***Ключевые слова*:** интегро-дифференциальное уравнение, уравнение смешанного типа, вырожденное ядро, однозначная разрешимость, дробный оператор Герасимова—Капуто.

ON ONE LOADED MIXED-TYPE INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH FRACTIONAL GERASIMOV–CAPUTO OPERATORS

© 2022 **T. K. YULDASHEV, E. T. KARIMOV**

Abstract. In this paper, we examine the unique solvability of a boundary-value problem for a loaded mixed-type integro-differential equation with fractional Gerasimov–Caputo operators, spectral parameters, and small coefficients of mixed derivatives. The solution of the problem is obtained in the form of a Fourier series. The unique solvability of the problem for regular values of the spectral parameters is proved. The continuous dependence of the solution of the boundary-value problem on small parameters and on given functions is studied for regular values of the spectral parameters.

***Keywords and phrases*:** integro-differential equation, mixed-type equation, degenerate kernel, unique solvability, fractional Gerasimov–Caputo operator.

***AMS Subject Classification*:** 35A02, 35M10, 35S05

1. Постановка задачи. Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, приводит к изучению смешанных и краевых задач для уравнений в частных производных. Поэтому теория краевых задач в настоящее время является одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений. Сегодня бурно развивается теория нагруженных дифференциальных уравнений с локальными и нелокальными краевыми условиями. Изучению этого раздела теории дифференциальных уравнений посвящено большое количество работ (см., например, [1–6, 8, 9, 11–16, 25, 44]).

Дробное исчисление играет важную роль в математическом моделировании во многих научных и инженерных дисциплинах (см. [34]). Так, в [31] рассматриваются некоторые основные проблемы сплошной среды и статистической механики; в [26] изучаются математические проблемы модели эпидемии Эболы; в [27, 40] изучается фракционная модель динамики туберкулезной инфекции и нового коронавируса (nCoV-2019), соответственно. Построение различных моделей задач теоретической физики с помощью дробного исчисления описано в [38, vols. 4, 5], [30, 37]. В [36] рассматривается конкретная физическая интерпретация дробных производных Хильфера и Герасимова—Капуто, описывающая случайное движение частицы, движущейся по действительной прямой с временами шага Пуассона с конечной скоростью. Подробный обзор применения дробного исчисления при решении прикладных задач приведен в [38, vol. 6–8], [32, 35].

Приложения для уравнений смешанного типа изучались в [7, 19, 39]. В частности, в [7] И. М. Гельфанд рассматривал пример движения газа в канале, окруженном пористой средой, причем движение газа в канале описывалось волновым уравнением, а вне канала — уравнением диффузии. Я. С. Уфлянд в [19] рассмотрел задачу о распространении электрических колебаний в составных линиях, когда потери на полубесконечной линии не учитывались, а остальная часть линии трактовалась как кабель без утечки. Он свел эту задачу к уравнению смешанного парабол-гиперболического типа. В [39] исследована гиперболо-параболическая система, возникающая при импульсном горении. Дробные дифференциальные уравнения смешанного типа изучаются во многих работах, в частности в [10, 17, 18, 23, 24, 28, 29, 33, 45, 46].

Одним из важных разделов теории интегральных и дифференциальных уравнений является теория интегро-дифференциальных уравнений. Наличие интегрального члена в дифференциальных уравнениях первого и второго порядков играет важную роль в теории динамических систем с автоматическим управлением (см. [20, 21]). Интегро-дифференциальные уравнения смешанного типа целого порядка с вырожденными ядрами и спектральными параметрами изучены в [41, 42].

В данной работе исследуются вопросы однозначной разрешимости краевой задачи для нагруженного интегро-дифференциального уравнения смешанного типа с дробными операторами Герасимова—Капуто и спектральными параметрами в многомерной прямоугольной области. Отметим, что краевые задачи для интегро-дифференциальных уравнений со спектральными параметрами имеют особенности при исследовании вопросов однозначной разрешимости (см. [22, 43]).

В основе настоящего исследования лежат дифференциальные операторы, которые относительно первого аргумента являются операторами Герасимова—Капуто дробного порядка $0 < \alpha < 1$, а относительно других аргументов являются частными дифференциальными операторами четвертого порядка. Оператор Герасимова—Капуто дробного порядка $m-1 < \alpha < m$ имеет вид

$$ {}_C D_{at}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int\limits_a^t (t-s)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(s) ds, $$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера.

В многомерной области $\Omega = \{-T < t < T,\ 0 < x_1, \ldots, x_m < l\}$ рассматривается следующее нагруженное интегро-дифференциальное уравнение дробного порядка:

$$ A_\varepsilon(U) - B_{1,\omega}(U) = \begin{cases} \nu \int\limits_0^T K_1(t,s) U(s,x) ds + F_1(t,x), & t > 0, \\ \nu \int\limits_{-T}^0 K_2(t,s) U(s,x) ds + F_2(t,x), & t < 0, \end{cases} \tag{1} $$

где

$$ F_i(t,x) = k_i(t) f_i \left(x, \int\limits_{\Omega_l^m} \Theta_i(y) U(0,y) dy \right), \quad i = 1, 2, $$

$$A_\varepsilon(U)=\frac{1+\operatorname{sgn}(t)}{2}\left[{}_C D_{0t}^{\alpha_1}-\sum_{i=1}^{m}\left(\varepsilon_1\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_i}-\varepsilon_2\frac{\partial^4}{\partial x_i\partial x_i\partial x_i\partial x_i}\right){}_C D_{0t}^{\beta_1}\right]U(t,x)+$$
$$+\frac{1-\operatorname{sgn}(t)}{2}\left[{}_C D_{0t}^{\alpha_2}-\sum_{i=1}^{m}\left(\varepsilon_1\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_i}-\varepsilon_2\frac{\partial^4}{\partial x_i\partial x_i\partial x_i\partial x_i}\right){}_C D_{0t}^{\beta_2}\right]U(t,x),$$

$$B_{1,\omega}(U)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{m}(U_{x_ix_i}-U_{x_ix_ix_ix_i}), & t>0,\\ \displaystyle\omega^2\sum_{i=1}^{m}(U_{x_ix_i}-U_{x_ix_ix_ix_i}), & t<0,\end{cases}$$

T и l — положительные числа, ω — положительный параметр, ε_1, ε_2 — положительные малые параметры, ν — действительный параметр, отличный от нуля, $0\neq K_j(t,s)=a_j(t)b_j(s)$ — вырожденное ядро, $a_j(t)\in C^2[-T;T]$, $b_j(s)\in C[-T;T]$, $f_i\in C_x^2(\Omega_l^m\times\mathbb{R})$,

$$\int\limits_{\Omega_l^m}|\Theta_i(y)|dy<\infty,\quad \int\limits_{\Omega_l^m}|\Theta_i(y)|dy=\int\limits_0^l\dots\int\limits_0^l|\Theta_i(y)|dy_1\cdot\ldots\cdot dy_m,\quad i,j=1,2,$$
$$k_1(t)\in C^2[0;T],\quad k_2(t)\in C^2[-T;0],\quad \mathbb{R}\equiv(-\infty;\infty),$$
$$x\in\Omega_l^m\equiv[0;l]^m,\quad 0<\beta_1<\alpha_1\leqslant 1,\quad 1<\beta_2<\alpha_2\leqslant 2.$$

Будем изучать следующую задачу.

Задача. Найти в области Ω неизвестную функцию $U(t,x)$, принадлежащую классу функций

$$U(t,x)\in C(\overline{\Omega})\cap C^{\alpha_1,4}(\Omega_+)\cap C^{\alpha_2,4}(\Omega_-)\cap C_{t,x}^{\alpha_1+4}(\Omega_+)\cap C_{t,x}^{\alpha_2+4}(\Omega_-)\cap$$
$$\cap\, C_{t,x_1,x_2,\dots,x_m}^{\alpha_1+4+0+\dots+0}(\Omega_+)\cap C_{t,x_1,x_2,\dots,x_m}^{\alpha_2+4+0+\dots+0}(\Omega_-)\cap C_{t,x_1,x_2,x_3,\dots,x_m}^{\alpha_1+0+4+0+\dots+0}(\Omega_+)\cap$$
$$\cap\, C_{t,x_1,x_2,x_3,\dots,x_m}^{\alpha_2+0+4+0+\dots+0}(\Omega_-)\cap\ldots\cap C_{t,x_1,\dots,x_{m-1},x_m}^{\alpha_1+0+\dots+0+4}(\Omega_+)\cap C_{t,x_1,\dots,x_{m-1},x_m}^{\alpha_2+0+\dots+0+4}(\Omega_-)\quad (2)$$

и удовлетворяющую смешанному интегро-дифференциальному уравнению (1) и следующим граничным условиям:

$$U(-T,x)=\varphi_1(x),\quad {}_C D_{0t}^{\theta}U(-T,x)=\varphi_2(x),\quad x\in\Omega_l^m,\quad (3)$$
$$U(t,0)=U(t,l)=U_{xx}(t,0)=U_{xx}(t,l)=0,\quad -T<t<T,\quad (4)$$

где $0<\theta<1$, $\varphi_i(x)$ — гладкие функции, $F_i(t,0)=F_i(t,l)=0$, $\varphi_i(0)=\varphi_i(l)=0$, $i=1,2$, $C^r(\Omega)$ — класс функций $U(t,x_1,\dots,x_m)$ с непрерывными производными

$$\frac{\partial^r U}{\partial t^r},\quad \frac{\partial^r U}{\partial x_1^r},\quad \ldots,\quad \frac{\partial^r U}{\partial x_m^r}$$

в области Ω, $C_{t,x}^{r,s}(\Omega)$ — класс функций $U(t,x_1,\dots,x_m)$ с непрерывными производными

$$\frac{\partial^r U}{\partial t^r},\quad \frac{\partial^s U}{\partial x_1^s},\quad \ldots,\quad \frac{\partial^s U}{\partial x_m^s}$$

в области Ω, $C_{t,x_1,x_2,\dots,x_m}^{r+r+0+\dots+0}(\Omega)$ — класс функций $U(t,x_1,\dots,x_m)$ с непрерывными производными $\partial^{2r}U/\partial t^r\partial x_1^r$ в области Ω и т. д.; $C_{t,x_1,\dots,x_{m-1},x_m}^{r+0+\dots+0+r}(\Omega)$ — класс функций $U(t,x_1,\dots,x_m)$ с непрерывной производной $\partial^{2r}U/\partial t^r\partial x_m^r$ в области Ω, r, s — положительные числа,

$$\overline{\Omega}=\big\{-T\leqslant t\leqslant T,\ x\in\Omega_l^m\big\},$$
$$\Omega_-=\big\{-T<t<0,\ 0<x_1,\dots,x_m<l\big\},\quad \Omega_+=\big\{0<t<T,\ 0<x_1,\dots,x_m<l\big\}.$$

2. Разложение решение задачи (1)–(4) **в ряд Фурье.** Исходя из характера задания спектральных условий (4), решение нагруженного интегро-дифференциального уравнения (1) в области Ω будем разыскивать в виде ряда Фурье по синусам

$$U(t,x)=\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}u^{\pm}_{n_1,\ldots,n_m}(t)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x), \tag{5}$$

где

$$u^{\pm}_{n_1,\ldots,n_m}(t)=\begin{cases} u^{+}_{n_1,\ldots,n_m}(t)=\int\limits_{\Omega_l^m}U(t,x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx, & t>0,\\ u^{-}_{n_1,\ldots,n_m}(t)=\int\limits_{\Omega_l^m}U(t,x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx, & t<0,\end{cases} \tag{6}$$

$$\int\limits_{\Omega_l^m}U(t,x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx=\int\limits_0^l\ldots\int\limits_0^l U(t,x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx_1\cdot\ldots\cdot dx_m,$$

$$\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)=\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^m\sin\frac{\pi n_1}{l}x_1\cdot\ldots\cdot\sin\frac{\pi n_m}{l}x_m,\quad n_1,\ldots,n_m=1,2,\ldots$$

Предположим также, что имеет место следующее разложение в ряд Фурье:

$$f_i(x,V_i)=\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}f_{in_1,\ldots,n_m}(V_i)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x), \tag{7}$$

где

$$f_{in_1,\ldots,n_m}(V_i)=\int\limits_{\Omega_l^m}f_i(y,V_i)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(y)dy,\quad f_i(y,V_i)=f_i\left(y,\int\limits_{\Omega_l^m}\Theta_i(z)U(0,z)dz\right),\quad i=1,2.$$

Подставляя ряды (5) и (7) в смешанное уравнение (1), получаем две счетные системы обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений дробного порядка с вырожденными ядрами:

$$\begin{gathered}{}_CD^{\alpha_1}_{0t}u^{+}_{n_1,\ldots,n_m}(t)+\\ +\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\right){}_CD^{\beta_1}_{0t}u^{+}_{n_1,\ldots,n_m}(t)+\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\left(1+\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\right)u^{+}_{n_1,\ldots,n_m}(t)=\\ =\nu\int\limits_0^T a_1(t)b_1(s)u^{+}_{n_1,\ldots,n_m}(s)ds+F_{1n_1,\ldots,n_m}(t),\quad t>0,\end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered}{}_CD^{\alpha_2}_{0t}u^{-}_{n_1,\ldots,n_m}(t)+\\ +\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\right){}_CD^{\beta_2}_{0t}u^{-}_{n_1,\ldots,n_m}(t)+\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\left(\omega^2+\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\right)u^{-}_{n_1,\ldots,n_m}(t)=\\ =\nu\int\limits_{-T}^0 a_2(t)b_2(s)u^{-}_{n_1,\ldots,n_m}(s)ds+F_{2n_1,\ldots,n_m}(t),\quad t<0,\end{gathered} \tag{9}$$

где

$$\mu_{n_1,\ldots,n_m}=\frac{\pi}{l}\sqrt{n_1^2+\ldots+n_m^2},\quad F_{in_1,\ldots,n_m}(t)=k_i(t)f_{in_1,\ldots,n_m}(V_i),\quad i=1,2. \tag{10}$$

Будем использовать метод Фредгольма для вырожденного ядра. Введя обозначения

$$\tau^{+}_{n_1,\ldots,n_m}=\int\limits_0^T b_1(s)u^{+}_{n_1,\ldots,n_m}(s)ds,\quad \tau^{-}_{n_1,\ldots,n_m}=\int\limits_{-T}^0 b_2(s)u^{-}_{n_1,\ldots,n_m}(s)ds, \tag{11}$$

представим счетные системы обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений (8) и (9) в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&{}_C D_{0t}^{\alpha_1} u^+_{n_1,\ldots,n_m}(t)+\\
&\quad+\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big(\varepsilon_1+\varepsilon_2\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big){}_C D_{0t}^{\beta_1} u^+_{n_1,\ldots,n_m}(t)+\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big(1+\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big)u^+_{n_1,\ldots,n_m}(t)=\\
&\qquad=\nu a_1(t)\tau^+_{n_1,\ldots,n_m}+F_{1n_1,\ldots,n_m}(t),\quad t>0, \qquad (12)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&{}_C D_{0t}^{\alpha_2} u^-_{n_1,\ldots,n_m}(t)+\\
&\quad+\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big(\varepsilon_1+\varepsilon_2\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big){}_C D_{0t}^{\beta_2} u^-_{n_1,\ldots,n_m}(t)+\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big(\omega^2+\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big)u^-_{n_1,\ldots,n_m}(t)=\\
&\qquad=\nu a_2(t)\tau^-_{n_1,\ldots,n_m}+F_{2n_1,\ldots,n_m}(t),\quad t<0. \qquad (13)
\end{aligned}
$$

Решения счетных систем (12) и (13), удовлетворяющие условиям

$$
u^+_{n_1,\ldots,n_m}(0)=C^+_{1n_1,\ldots,n_m},\quad u^-_{n_1,\ldots,n_m}(0)=C^-_{1n_1,\ldots,n_m},\quad \frac{d}{dt}u^-_{n_1,\ldots,n_m}(0)=C^-_{2n_1,\ldots,n_m},
$$

представим следующим образом:

$$
u^+_{n_1,\ldots,n_m}(t)=\nu\tau^+_{n_1,\ldots,n_m}\Psi_{11n_1,\ldots,n_m}(t)+\Psi_{12n_1,\ldots,n_m}(t)+C^+_{1n_1,\ldots,n_m}\Psi_{13n_1,\ldots,n_m}(t),\quad t>0, \qquad (14)
$$

$$
\begin{aligned}
&u^-_{n_1,\ldots,n_m}(t)=\nu\tau^-_{n_1,\ldots,n_m}\Psi_{21n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)+\Psi_{22n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)+\\
&\qquad+C^-_{1n_1,\ldots,n_m}\Psi_{23n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)-C^-_{2n_1,\ldots,n_m}\Psi_{24n_1,\ldots,n_m}(t,\omega),\quad t<0, \qquad (15)
\end{aligned}
$$

где $C^+_{1n_1,\ldots,n_m}$, $C^-_{in_1,\ldots,n_m}$ $(i=1,2)$ — неизвестные коэффициенты интегрирования, которые будут однозначно найдены в дальнейших вычислениях,

$$
\begin{aligned}
&\Psi_{11n_1,\ldots,n_m}(t)=\int_0^t a_1(t-s)s^{\alpha_1-1}\times\\
&\qquad\times E_{(\alpha_1-\beta_1,\alpha_1),\alpha_1}\Big(-\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big(\varepsilon_1+\varepsilon_2\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big)s^{\alpha_1-\beta_1},\ -\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big(1+\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big)s^{\alpha_1}\Big)ds,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Psi_{12n_1,\ldots,n_m}(t)=\int_0^t F_{1n_1,\ldots,n_m}(t-s)s^{\alpha_1-1}\times\\
&\qquad\times E_{(\alpha_1-\beta_1,\alpha_1),\alpha_1}\Big(-\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big(\varepsilon_1+\varepsilon_2\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big)s^{\alpha_1-\beta_1},\ -\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big(1+\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big)s^{\alpha_1}\Big)ds,
\end{aligned}
$$

$$
\Psi_{13n_1,\ldots,n_m}(t)=E_{(\alpha_1-\beta_1,\alpha_1),1}\big(-\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big(\varepsilon_1+\varepsilon_2\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big)t^{\alpha_1-\beta_1},-\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big(1+\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big)t^{\alpha_1}\big),
$$

$$
\Psi_{21n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)=\int_t^0 a_2(s-t)(-s)^{\alpha_2-1}\Psi_{25n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)ds,
$$

$$
\Psi_{22n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)=\int_t^0 F_{2n_1,\ldots,n_m}(s-t)(-s)^{\alpha_2-1}\Psi_{25n_1,\ldots,n_m}(t,\varepsilon,\omega)ds,
$$

$$
\begin{aligned}
&\Psi_{23n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)=\\
&\qquad=E_{(\alpha_2-\beta_2,\alpha_2),1}\Big(-\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big(\varepsilon_1+\varepsilon_2\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big)(-t)^{\alpha_2-\beta_2},\ -\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big(\omega^2+\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big)(-t)^{\alpha_2}\Big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Psi_{24n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)=\\
&\qquad=tE_{(\alpha_2-\beta_2,\alpha_2),2}\Big(-\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big(\varepsilon_1+\varepsilon_2\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big)(-t)^{\alpha_2-\beta_2},\ -\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big(\omega^2+\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big)(-t)^{\alpha_2}\Big),
\end{aligned}
$$

$$\Psi_{25n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)=$$
$$=E_{(\alpha_2-\beta_2,\alpha_2),\alpha_2}\Big(-\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}(\varepsilon_1+\varepsilon_2\mu^2_{n_1,\ldots,n_m})(-s)^{\alpha_2-\beta_2},\ -\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}(\omega^2+\mu^2_{n_1,\ldots,n_m})(-s)^{\alpha_2}\Big).$$

Через $E_{(\alpha,\beta),\gamma}(z_1,z_2)$ обозначена функция Миттаг-Леффлера двух переменных:

$$E_{(\alpha,\beta),\gamma}(z_1,z_2)=\sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}\frac{z_1^{m_1}z_2^{m_2}}{\Gamma(\gamma+\alpha m_1+\beta m_2)},$$

где $z_i,\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\alpha)>0$, $\mathrm{Re}(\beta)>0$.

Из постановки задачи (см. свойства в (2)) следует, что для неизвестной функции выполняется условие непрерывного сопряжения $U(0+0,x)=U(0-0,x)$. Следовательно, учитывая формулу (6), получаем условия на коэффициенты Фурье от неизвестной функции:

$$u^+_{n_1,\ldots,n_m}(0+0)=\int\limits_{\Omega_l^m}U(0+0,x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx=$$
$$=\int\limits_{\Omega_l^m}U(0-0,x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx=u^-_{n_1,\ldots,n_m}(0-0). \tag{16}$$

Положим

$$\varphi_{in_1,\ldots,n_m}=\int\limits_{\Omega_l^m}\varphi_i(x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx,\quad i=1,2.$$

Тогда с учетом формулы (6) из условий в (3) получаем

$$u^-_{n_1,\ldots,n_m}(-T)=\int\limits_{\Omega_l^m}U(-T,x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx=\int\limits_{\Omega_l^m}\varphi_1(x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx=\varphi_{1n_1,\ldots,n_m}, \tag{17}$$

$${}_CD^\theta_{0t}u^-_{n_1,\ldots,n_m}(-T)=\int\limits_{\Omega_l^m}{}_CD^\theta_{0t}U(-T,x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx=$$
$$=\int\limits_{\Omega_l^m}\varphi_2(x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx=\varphi_{2n_1,\ldots,n_m}. \tag{18}$$

С помощью условия непрерывного сопряжения (16) из (14) и (15) получаем соотношение

$$C^+_{1n_1,\ldots,n_m}=C^-_{1n_1,\ldots,n_m}.$$

Чтобы найти неизвестные коэффициенты интегрирования $C^-_{1n_1,\ldots,n_m}$ и $C^-_{2n_1,\ldots,n_m}$ в (15), воспользуемся условиями (17) и (18); получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}\nu\tau^-_{n_1,\ldots,n_m}\Psi_{21n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)+\Psi_{22n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)+\\ \qquad +C^-_{1n_1,\ldots,n_m}\Psi_{23n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)-C^-_{2n_1,\ldots,n_m}\Psi_{24n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)=\varphi_{1n_1,\ldots,n_m},\\ \nu\tau^-_{n_1,\ldots,n_m}D^\theta_{0t}\Psi_{21n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)+D^\theta_{0t}\Psi_{22n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)+\\ \qquad +C^-_{1n_1,\ldots,n_m}D^\theta_{0t}\Psi_{23n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)-C^-_{2n_1,\ldots,n_m}D^\theta_{0t}\Psi_{24n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)=\varphi_{2n_1,\ldots,n_m},\end{cases} \tag{19}$$

где $D^\theta_{0t}\Psi(-T)\equiv D^\theta_{0t}\Psi(t)|_{t=-T}$. При выполнении условия

$$\sigma_{n_1,\ldots,n_m}(\omega)=\Psi_{24n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)\cdot D^\theta_{0t}\Psi_{23n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)-$$
$$-\Psi_{23n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)\cdot D^\theta_{0t}\Psi_{24n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)\neq 0 \tag{20}$$

система (19) однозначно разрешима относительно $C^-_{1n_1,\ldots,n_m}$ и $C^-_{2n_1,\ldots,n_m}$. Решая ее, приходим к следующим представлениям для неизвестных коэффициентов:

$$C^-_{1n_1,\dots,n_m} = \frac{1}{\sigma_{n_1,\dots,n_m}(\omega)}\times$$
$$\times\Big[\varphi_{1n_1,\dots,n_m} D^\theta_{0t}\Psi_{24n_1,\dots,n_m}(-T,\omega) + \varphi_{2n_1,\dots,n_m}\Psi_{24n_1,\dots,n_m}(-T,\omega) - \nu\tau^-_{n_1,\dots,n_m}\times$$
$$\times\big(\Psi_{24n_1,\dots,n_m}(-T,\omega)D^\theta_{0t}\Psi_{21n_1,\dots,n_m}(-T,\omega) - \Psi_{21n_1,\dots,n_m}(-T,\omega)D^\theta_{0t}\Psi_{24n_1,\dots,n_m}(-T,\omega)\big)+$$
$$+\Psi_{22n_1,\dots,n_m}(-T,\omega)D^\theta_{0t}\Psi_{24n_1,\dots,n_m}(-T,\omega) - \Psi_{24n_1,\dots,n_m}(-T,\omega)D^\theta_{0t}\Psi_{22n_1,\dots,n_m}(-T,\omega)\Big],$$

$$C^-_{2n_1,\dots,n_m} = \frac{1}{\sigma_{n_1,\dots,n_m}(\omega)}\times$$
$$\times\Big[\varphi_{1n_1,\dots,n_m} D^\theta_{0t}\Psi_{23n_1,\dots,n_m}(-T,\omega) + \varphi_{2n_1,\dots,n_m}\Psi_{23n_1,\dots,n_m}(-T,\omega) - \nu\tau^-_{n_1,\dots,n_m}\times$$
$$\times\big(\Psi_{23n_1,\dots,n_m}(-T,\omega)D^\theta_{0t}\Psi_{21n_1,\dots,n_m}(-T,\omega) - \Psi_{21n_1,\dots,n_m}(-T,\omega)D^\theta_{0t}\Psi_{23n_1,\dots,n_m}(-T,\omega)\big)+$$
$$+\Psi_{22n_1,\dots,n_m}(-T,\omega)D^\theta_{0t}\Psi_{23n_1,\dots,n_m}(-T,\omega) - \Psi_{23n_1,\dots,n_m}(-T,\omega)D^\theta_{0t}\Psi_{22n_1,\dots,n_m}(-T,\omega)\Big].$$

Подставим полученные данные в (15); с учетом того, что $C^+_{1n_1,\dots,n_m} = C^-_{1n_1,\dots,n_m}$ в (14), получаем следующие представления для коэффициентов Фурье основных неизвестных функций в положительной и отрицательной частях области:

$$u^+_{n_1,\dots,n_m}(t,\omega,\nu) = \big[\varphi_{1n_1,\dots,n_m} + \varphi_{2n_1,\dots,n_m}\big]N_{11n_1,\dots,n_m}(t,\omega)+$$
$$+\nu\tau^+_{n_1,\dots,n_m}N_{12n_1,\dots,n_m}(t) - \nu\tau^-_{n_1,\dots,n_m}N_{13n_1,\dots,n_m}(t,\omega)+$$
$$+f_{1n_1,\dots,n_m}(V_1)N_{14n_1,\dots,n_m}(t) + f_{2n_1,\dots,n_m}(V_2)N_{15n_1,\dots,n_m}(t,\omega),\quad t>0,\quad (21)$$

$$u^-_{n_1,\dots,n_m}(t,\omega,\nu) = \varphi_{1n_1,\dots,n_m}N_{21n_1,\dots,n_m}(t,\omega) + \varphi_{2n_1,\dots,n_m}N_{22n_1,\dots,n_m}(t,\omega)+$$
$$+\nu\tau^-_{n_1,\dots,n_m}N_{23n_1,\dots,n_m}(t,\omega) + f_{2n_1,\dots,n_m}(V_2)N_{24n_1,\dots,n_m}(t,\omega),\quad t<0,\quad (22)$$

где

$$N_{11n_1,\dots,n_m}(t,\omega) = \frac{1}{\sigma_{n_1,\dots,n_m}(\omega)}\Psi_{13n_1,\dots,n_m}(t)\Psi_{24n_1,\dots,n_m}(-T,\omega),\quad N_{12n_1,\dots,n_m}(t) = \Psi_{11n_1,\dots,n_m}(t),$$

$$N_{13n_1,\dots,n_m}(t,\omega) = \frac{1}{\sigma_{n_1,\dots,n_m}(\omega)}\Big[\Psi_{24n_1,\dots,n_m}(-T,\omega)D^\theta_{0t}\Psi_{21n_1,\dots,n_m}(-T,\omega)-$$
$$-\Psi_{21n_1,\dots,n_m}(-T,\omega)D^\theta_{0t}\Psi_{24n_1,\dots,n_m}(-T,\omega)\Big]\Psi_{13n_1,\dots,n_m}(t),$$

$$N_{14n_1,\dots,n_m}(t) = \overline{\Psi}_{12n_1,\dots,n_m}(t),$$

$$N_{15n_1,\dots,n_m}(t,\omega) = \frac{1}{\sigma_{n_1,\dots,n_m}(\omega)}\Big[\overline{\Psi}_{22n_1,\dots,n_m}(-T,\omega)D^\theta_{0t}\Psi_{24n_1,\dots,n_m}(-T,\omega)-$$
$$-\Psi_{24n_1,\dots,n_m}(-T,\omega)D^\theta_{0t}\overline{\Psi}_{22n_1,\dots,n_m}(-T,\omega)\Big]\Psi_{13n_1,\dots,n_m}(t),$$

$$N_{21n_1,\dots,n_m}(t,\omega) = \frac{1}{\sigma_{n_1,\dots,n_m}(\omega)}\Big[\Psi_{23n_1,\dots,n_m}(t,\omega)D^\theta_{0t}\Psi_{24n_1,\dots,n_m}(-T,\omega)-$$
$$-\Psi_{24n_1,\dots,n_m}(t,\omega)D^\theta_{0t}\Psi_{23n_1,\dots,n_m}(-T,\omega)\Big],$$

$$N_{22n_1,\dots,n_m}(t,\omega) = \frac{1}{\sigma_{n_1,\dots,n_m}(\omega)}\Big[\Psi_{23n_1,\dots,n_m}(t,\omega)\Psi_{24n_1,\dots,n_m}(-T,\omega)+$$
$$+\Psi_{24n_1,\dots,n_m}(t,\omega)\Psi_{23n_1,\dots,n_m}(-T,\omega)\Big],$$

$$N_{23n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)=\Psi_{21n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)-$$
$$-\frac{1}{\sigma_{n_1,\ldots,n_m}(\omega)}\Big[\Psi_{24n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)D^{\theta}_{0t}\Psi_{21n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)-$$
$$-\Psi_{21n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)D^{\theta}_{0t}\Psi_{24n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)\Big]\Psi_{23n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)+$$
$$+\frac{1}{\sigma_{n_1,\ldots,n_m}(\omega)}\Big[\Psi_{23n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)D^{\theta}_{0t}\Psi_{21n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)-$$
$$-\Psi_{21n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)D^{\theta}_{0t}\Psi_{23n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)\Big]\Psi_{24n_1,\ldots,n_m}(t,\omega),$$

$$N_{24n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)=\overline{\Psi}_{22n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)+$$
$$+\frac{1}{\sigma_{n_1,\ldots,n_m}(\omega)}\Big[\overline{\Psi}_{22n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)D^{\theta}_{0t}\Psi_{24n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)-$$
$$-\Psi_{24n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)D^{\theta}_{0t}\overline{\Psi}_{22n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)\Big]\Psi_{23n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)+$$
$$+\frac{1}{\sigma_{n_1,\ldots,n_m}(\omega)}\Big[\overline{\Psi}_{22n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)D^{\theta}_{0t}\Psi_{23n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)-$$
$$-\Psi_{23n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)D^{\theta}_{0t}\overline{\Psi}_{22n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)\Big]\Psi_{24n_1,\ldots,n_m}(t,\omega),$$

$$\overline{\Psi}_{12n_1,\ldots,n_m}(t)=$$
$$=\int\limits_0^t k_1(t-s)s^{\alpha_1-1}E_{(\alpha_1-\beta_1,\alpha_1),\alpha_1}\Big(-\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big(\varepsilon_1+\varepsilon_2\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big)s^{\alpha_1-\beta_1},\ -\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}s^{\alpha_1}\Big)ds,$$

$$\overline{\Psi}_{22n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)=\int\limits_t^0 k_2(s-t)(-s)^{\alpha_2-1}\Psi_{25n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)ds.$$

Согласно методу Фредгольма для вырожденного ядра, подставим (21) и (22) в (11):

$$\tau^+_{n_1,\ldots,n_m}\big[1-\nu\chi_{12n_1,\ldots,n_m}(\omega)\big]+\nu\tau^-_{n_1,\ldots,n_m}\chi_{13n_1,\ldots,n_m}(\omega)=$$
$$=\big[\varphi_{1n_1,\ldots,n_m}+\varphi_{2n_1,\ldots,n_m}\big]\chi_{11n_1,\ldots,n_m}(\omega)+f_{1n_1,\ldots,n_m}(V_1)\chi_{14n_1,\ldots,n_m}(\omega)+$$
$$+f_{2n_1,\ldots,n_m}(V_2)\chi_{15n_1,\ldots,n_m}(\omega),\quad(23)$$

$$\tau^-_{n_1,\ldots,n_m}\big[1-\nu\chi_{23n_1,\ldots,n_m}(\omega)\big]=\varphi_{1n_1,\ldots,n_m}\chi_{21n_1,\ldots,n_m}(\omega)+\varphi_{2n_1,\ldots,n_m}\chi_{22n_1,\ldots,n_m}(\omega)+$$
$$+f_{2n_1,\ldots,n_m}(V_2)\chi_{24n_1,\ldots,n_m}(\omega),\quad(24)$$

где

$$\chi_{1in_1,\ldots,n_m}(\omega)=\int\limits_0^T b_1(s)N_{1in_1,\ldots,n_m}(s,\omega)ds,\quad i=\overline{1,5},$$

$$\chi_{2in_1,\ldots,n_m}(\omega)=\int\limits_{-T}^0 b_2(s)N_{2in_1,\ldots,n_m}(s,\omega)ds,\quad i=\overline{1,4}.$$

Решим линейные алгебраические уравнения (23) и (24) как систему алгебраических уравнений относительно величин $\tau^+_{n_1,\ldots,n_m}$ и $\tau^-_{n_1,\ldots,n_m}$. Если выполняются условия

$$\nu\chi_{12n_1,\ldots,n_m}(\omega)\neq 1,\quad \nu\chi_{23n_1,\ldots,n_m}(\omega)\neq 1,\quad(25)$$

то из (23) и (24) получим

$$\tau^+_{n_1,\ldots,n_m} = \varphi_{1n_1,\ldots,n_m} M_{11n_1,\ldots,n_m}(\omega) + \varphi_{2n_1,\ldots,n_m} M_{12n_1,\ldots,n_m}(\omega) + \\ + f_{1n_1,\ldots,n_m}(V_1) M_{13n_1,\ldots,n_m}(\omega) + f_{2n_1,\ldots,n_m}(V_2) M_{14n_1,\ldots,n_m}(\omega), \quad (26)$$

$$\tau^-_{n_1,\ldots,n_m} = \varphi_{1n_1,\ldots,n_m} M_{21n_1,\ldots,n_m}(\omega) + \varphi_{2n_1,\ldots,n_m} M_{22n_1,\ldots,n_m}(\omega) + \\ + f_{2n_1,\ldots,n_m}(V_2) M_{23n_1,\ldots,n_m}(\omega), \quad (27)$$

где

$$M_{1in_1,\ldots,n_m}(\omega) = \frac{1}{1-\nu\chi_{12n_1,\ldots,n_m}(\omega)}\left[\chi_{11n_1,\ldots,n_m}(\omega) - \nu\frac{\chi_{13n_1,\ldots,n_m}(\omega)\chi_{2in_1,\ldots,n_m}(\omega)}{1-\nu\chi_{23n_1,\ldots,n_m}(\omega)}\right], \quad i=1,2,$$

$$M_{13n_1,\ldots,n_m}(\omega) = \frac{\chi_{14n_1,\ldots,n_m}(\omega)}{1-\nu\chi_{12n_1,\ldots,n_m}(\omega)},$$

$$M_{14n_1,\ldots,n_m}(\omega) = \frac{1}{1-\nu\chi_{12n_1,\ldots,n_m}(\omega)}\left[\chi_{15n_1,\ldots,n_m}(\omega) - \nu\frac{\chi_{13n_1,\ldots,n_m}(\omega)\chi_{24n_1,\ldots,n_m}(\omega)}{1-\nu\chi_{23n_1,\ldots,n_m}(\omega)}\right],$$

$$M_{2in_1,\ldots,n_m}(\omega) = \frac{\chi_{2in_1,\ldots,n_m}(\omega)}{1-\nu\chi_{23n_1,\ldots,n_m}(\omega)}, \quad i=1,2,$$

$$M_{23n_1,\ldots,n_m}(\omega) = \frac{\chi_{24n_1,\ldots,n_m}(\omega)}{1-\nu\chi_{23n_1,\ldots,n_m}(\omega)}.$$

Подставляя (26) и (27) в (21) и (22), при $t>0$ получим

$$u^+_{n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu) = \varphi_{1n_1,\ldots,n_m} Q_{11n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu) + \varphi_{2n_1,\ldots,n_m} Q_{12n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu) + \\ + Q_{13n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu)\int\limits_{\Omega_l^m} f_1\left(y, \int\limits_{\Omega_l^m}\Theta_1(z)\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} u^+_{n_1,\ldots,n_m}(0)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(z)dz\right)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(y)dy + \\ + Q_{14n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu)\int\limits_{\Omega_l^m} f_2\left(y, \int\limits_{\Omega_l^m}\Theta_2(z)\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} u^-_{n_1,\ldots,n_m}(0)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(z)dz\right)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(y)dy \quad (28)$$

а при $t<0$ —

$$u^-_{n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu) = \varphi_{1n_1,\ldots,n_m} Q_{21n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu) + \varphi_{2n_1,\ldots,n_m} Q_{22n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu) + \\ + Q_{23n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu)\int\limits_{\Omega_l^m} f_2\left(y, \int\limits_{\Omega_l^m}\Theta_2(z)\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} u^-_{n_1,\ldots,n_m}(0)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(z)dz\right)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(y)dy, \quad (29)$$

где

$$Q_{1in_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu) = N_{11n_1,\ldots,n_m}(t,\omega) + \nu N_{12n_1,\ldots,n_m}(t,\omega) M_{1in_1,\ldots,n_m}(\omega) - \\ - \nu N_{13n_1,\ldots,n_m}(t,\omega) M_{2in_1,\ldots,n_m}(\omega), \quad i=1,2,$$

$$Q_{13n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu) = N_{14n_1,\ldots,n_m}(t,\omega) + \nu N_{12n_1,\ldots,n_m}(t,\omega) M_{13n_1,\ldots,n_m}(\omega),$$

$$Q_{14n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu) = N_{15n_1,\ldots,n_m}(t,\omega) + \nu N_{12n_1,\ldots,n_m}(t,\omega) M_{14n_1,\ldots,n_m}(\omega) - \\ - \nu N_{13n_1,\ldots,n_m}(t,\omega) M_{23n_1,\ldots,n_m}(\omega),$$

$$Q_{2in_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu) = N_{2in_1,\ldots,n_m}(t,\omega) + \nu N_{23n_1,\ldots,n_m}(t,\omega) M_{2in_1,\ldots,n_m}(\omega), \quad i=1,2,$$

$$Q_{23n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu) = N_{24n_1,\ldots,n_m}(t,\omega) + \nu N_{23n_1,\ldots,n_m}(t,\omega) M_{23n_1,\ldots,n_m}(\omega).$$

Подставляя представление (28) в ряд Фурье (5), получим следующее формальное решение задачи (1)–(4) при $t>0$:

$$U(t,x,\omega,\nu)=\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}\vartheta_{n_1,\dots,n_m}(x)\times$$
$$\times\Bigg[\varphi_{1n_1,\dots,n_m}Q_{11n_1,\dots,n_m}(t,\omega,\nu)+\varphi_{2n_1,\dots,n_m}Q_{12n_1,\dots,n_m}(t,\omega,\nu)+$$
$$+Q_{13n_1,\dots,n_m}(t,\omega,\nu)\int\limits_{\Omega_l^m}f_1\Bigg(y,\int\limits_{\Omega_l^m}\Theta_1(z)\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}u^+_{n_1,\dots,n_m}(0)\vartheta_{n_1,\dots,n_m}(z)dz\Bigg)\vartheta_{n_1,\dots,n_m}(y)dy+$$
$$+Q_{14n_1,\dots,n_m}(t,\omega,\nu)\int\limits_{\Omega_l^m}f_2\Bigg(y,\int\limits_{\Omega_l^m}\Theta_2(z)\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}u^-_{n_1,\dots,n_m}(0)\vartheta_{n_1,\dots,n_m}(z)dz\Bigg)\vartheta_{n_1,\dots,n_m}(y)dy\Bigg] \quad (30)$$

Подставляя представление (29) в ряд Фурье (5), получим следующее формальное решение задачи (1)–(4) при $t<0$:

$$U(t,x,\omega,\nu)=\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}\vartheta_{n_1,\dots,n_m}(x)\times$$
$$\times\Bigg[\varphi_{1n_1,\dots,n_m}Q_{21n_1,\dots,n_m}(t,\omega,\nu)+\varphi_{2n_1,\dots,n_m}Q_{22n_1,\dots,n_m}(t,\omega,\nu)+$$
$$+Q_{23n_1,\dots,n_m}(t,\omega,\nu)\int\limits_{\Omega_l^m}f_2\Bigg(y,\int\limits_{\Omega_l^m}\Theta_2(z)\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}u^-_{n_1,\dots,n_m}(0)\vartheta_{n_1,\dots,n_m}(z)dz\Bigg)\vartheta_{n_1,\dots,n_m}(y)dy\Bigg]. \quad (31)$$

Рассмотрим интегралы, присутствующие в составе рядов (30) и (31). В представлениях (28) и (29) положим $t=0$:

$$u^+_{n_1,\dots,n_m}(0)=0\cdot\int\limits_{\Omega_l^m}f_1\Bigg(y,\int\limits_{\Omega_l^m}\Theta_1(z)\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}u^+_{n_1,\dots,n_m}(0)\vartheta_{n_1,\dots,n_m}(z)dz\Bigg)\vartheta_{n_1,\dots,n_m}(y)dy,$$
$$u^-_{n_1,\dots,n_m}(0)=0\cdot\int\limits_{\Omega_l^m}f_2\Bigg(y,\int\limits_{\Omega_l^m}\Theta_2(z)\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}u^-_{n_1,\dots,n_m}(0)\vartheta_{n_1,\dots,n_m}(z)dz\Bigg)\vartheta_{n_1,\dots,n_m}(y)dy.$$

Отсюда следует, что $u^+_{n_1,\dots,n_m}(0)=u^-_{n_1,\dots,n_m}(0)=0$. Поэтому ряды (30) и (31) можно переписать в следующем виде:

$$U(t,x,\omega,\nu)=\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}\vartheta_{n_1,\dots,n_m}(x)\Bigg[\varphi_{1n_1,\dots,n_m}Q_{11n_1,\dots,n_m}(t,\omega,\nu)+$$
$$+\varphi_{2n_1,\dots,n_m}Q_{12n_1,\dots,n_m}(t,\omega,\nu)+Q_{13n_1,\dots,n_m}(t,\omega,\nu)\int\limits_{\Omega_l^m}f_1(y,0)\vartheta_{n_1,\dots,n_m}(y)dy+$$
$$+Q_{14n_1,\dots,n_m}(t,\omega,\nu)\int\limits_{\Omega_l^m}f_2(y,0)\vartheta_{n_1,\dots,n_m}(y)dy\Bigg], \quad (32)$$

$$U(t,x,\omega,\nu)=\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}\vartheta_{n_1,\dots,n_m}(x)\Bigg[\varphi_{1n_1,\dots,n_m}Q_{21n_1,\dots,n_m}(t,\omega,\nu)+$$
$$+\varphi_{2n_1,\dots,n_m}Q_{22n_1,\dots,n_m}(t,\omega,\nu)+Q_{23n_1,\dots,n_m}(t,\omega,\nu)\int\limits_{\Omega_l^m}f_2(y,0)\vartheta_{n_1,\dots,n_m}(y)dy\Bigg]. \quad (33)$$

Теперь предположим, что условие (20) нарушается при некоторых значениях спектрального параметра ω. Тогда будем рассматривать следующее алгебраическое уравнение относительно спектрального параметра ω:

$$\sigma_{n_1,\ldots,n_m}(\omega) = \Psi_{24n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)\cdot D^{\theta}_{0t}\Psi_{23n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega) - \\ - \Psi_{23n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)\cdot D^{\theta}_{0t}\Psi_{24n_1,\ldots,n_m}(-T,\varepsilon,\omega) = 0. \quad (34)$$

Множество положительных решений этого алгебраического уравнения (34) относительно спектрального параметра ω обозначим через $\Im_1$. Указанные значения $\omega \in \Im_1$ назовем иррегулярными; для таких значений условие (20) нарушается. Множество $\Lambda_1 = (0;\infty)\backslash\Im_1$ называется множеством регулярных значений спектрального параметра ω; для таких регулярных значений условие (20) выполняется.

Теперь предположим, что условия в (25) нарушаются:

$$\nu\chi_{12n_1,\ldots,n_m}(\varepsilon,\omega) = 1, \quad \nu\chi_{23n_1,\ldots,n_m}(\omega) = 1.$$

Имеем

$$\nu_1 = \frac{1}{\chi_{12n_1,\ldots,n_m}(\omega)}, \quad \nu_2 = \frac{1}{\chi_{23n_1,\ldots,n_m}(\omega)}.$$

Для регулярных значений $\omega \in \Lambda_1$ имеют место неравенства

$$\chi_{12n_1,\ldots,n_m}(\omega) \neq 0, \quad \chi_{23n_1,\ldots,n_m}(\omega) \neq 0.$$

Множество $\{\nu_1,\nu_2\}$ обозначим через $\Im_2$. Тогда множество $\Lambda_2 = (-\infty;0)\cup(0;\infty)\setminus\Im_2$ называется множеством регулярных значений спектрального параметра ν. Для всех значений $\nu \in \Lambda_2$ условия (25) выполняются. Введем обозначение

$$\aleph = \big\{n_1,\ldots,n_m \in \mathbb{N};\ \omega \in \Lambda_1;\ \nu \in \Lambda_2\big\},$$

где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Это множество, в котором все значения спектральных параметров ω и ν регулярны. Для таких регулярных значений параметра ν решения задачи (1)–(4) в подобластях Ω_1 и Ω_2 представляются в виде рядов (32) и (33) соответственно.

3. Сходимость рядов (32) **и** (33)**.** Для установления единственности решения $U(t,x,\omega,\nu)$ задачи (1)–(4) предположим, что существуют два решения этой задачи U_1 и U_2. Тогда их разность $U = U_1 - U_2$ также является решением интегро-дифференциального уравнения (1), удовлетворяющим условиям (2)–(4) с функциями $\varphi_i(x) \equiv 0$ $(i = 1,2)$. Тогда для $\varphi_{in_1,\ldots,n_m} = 0$ $(i = 1,2)$ из формул (32) и (33) в области Ω следует, что

$$\int\limits_{\Omega_l^m} U(t,x,\omega,\nu)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx = 0.$$

Следовательно, в силу полноты системы собственных функций

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n_1}{l}x_1\right\},\ \left\{\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n_2}{l}x_2\right\},\ \ldots,\ \left\{\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n_m}{l}x_m\right\}$$

в пространстве $L_2(\Omega_l^m)$, заключаем, что $U(t,x,\omega,\nu) \equiv 0$ для всех $x \in \Omega_l^m \equiv [0;l]^m$ и $t \in [-T;T]$. Следовательно, при регулярных значениях спектральных параметров ω и ν функция $U(t,x,\omega,\nu)$ является единственным решением интегро-дифференциального уравнения смешанного типа (1) с условиями (2)–(4), если эта функция существует в области Ω.

Воспользуемся пространством $L_2(\Omega_l^m)$ суммируемых функций в области Ω_l^m с нормой

$$\|\vartheta(x)\|_{L_2(\Omega_l^m)} = \sqrt{\int\limits_{\Omega_l^m} |\vartheta(x)|^2\,dx} < \infty.$$

Условия гладкости. Пусть функции

$$\varphi_i(x), f_i(x) \in C^4(\Omega_l^m), \quad i = 1,2$$

имеют кусочно непрерывные производные пятого порядка в области Ω_l^m.

Интегрируя по частям пять раз по всем переменным $x_1, x_2, \ldots, x_m$, получим следующие формулы (см. [43]):

$$|\varphi_{in_1,\ldots,n_m}| = \left(\frac{l}{\pi}\right)^{5m} \frac{\left|\varphi^{(5m)}_{in_1,\ldots,n_m}\right|}{n_1^5 \ldots n_m^5}, \quad |f_{in_1,\ldots,n_m}| = \left(\frac{l}{\pi}\right)^{5m} \frac{\left|f^{(5m)}_{in_1,\ldots,n_m}\right|}{n_1^5 \ldots n_m^5}, \tag{35}$$

где

$$\varphi^{(5m)}_{in_1,\ldots,n_m} = \int\limits_{\Omega_l^m} \frac{\partial^{5m}\varphi_i(x)}{\partial x_1^5 \partial x_2^5 \ldots \partial x_m^5} \vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x) dx,$$

$$f^{(5m)}_{in_1,\ldots,n_m} = \int\limits_{\Omega_l^m} \frac{\partial^{5m} f_i(x)}{\partial x_1^5 \partial x_2^5 \ldots \partial x_m^5} \vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x) dx, \quad i = 1,2.$$

Для этих функций имеют место неравенства Бесселя:

$$\sqrt{\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \left[\varphi^{(5m)}_{in_1,\ldots,n_m}\right]^2} \leqslant \left(\frac{2}{l}\right)^m \left\| \frac{\partial^{5m}\varphi_i(x)}{\partial x_1^5 \partial x_2^5 \ldots \partial x_m^5} \right\|_{L_2(\Omega_l^m)}, \tag{36}$$

$$\sqrt{\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \left[f^{(5m)}_{in_1,\ldots,n_m}\right]^2} \leqslant \left(\frac{2}{l}\right)^m \left\| \frac{\partial^{5m} f_i(x)}{\partial x_1^5 \partial x_2^5 \ldots \partial x_m^5} \right\|_{L_2(\Omega_l^m)}, \quad i = 1,2. \tag{37}$$

Также используем следующие известные свойства функции Миттаг-Леффлера:

1. Для всех $k > 0$, $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 \in (0;2]$, $\alpha_0 \leqslant \beta_0 \leqslant \gamma_0$, $t \geqslant 0$ функция $t^{\beta_0 - 1} E_{\alpha_0,\beta_0,\gamma_0}(-kt^{\alpha}, -kt^{\beta})$ является полной, монотонной и имеет место оценка

$$(-1)^s [t^{\beta_0 - 1} E_{(\alpha_0,\beta_0),\gamma_0}(-kt^{\alpha_0}, -kt^{\beta_0})]^{(s)} \geqslant 0, \quad s = 0,1,2,\ldots \tag{38}$$

2. Для всех $\alpha_0, \beta_0 \in (0,2)$, $\gamma \in \mathbb{R}$ и $\arg z_1 = \pi$, справедливы следующие оценки

$$|E_{(\alpha_0,\beta_0),\gamma_0}(z_1, z_2)| \leqslant \frac{C_1}{1 + |z_1|}, \tag{39}$$

$$|E_{(\alpha_0,\beta_0),\gamma_0}(\varepsilon_1 z_1, z_2) - E_{(\alpha_0,\beta_0),\gamma_0}(\varepsilon_2 z_1, z_2)| \leqslant |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \frac{C_2}{1 + |z_1|}, \tag{40}$$

где $0 < C_i = \text{const}$ не зависит от z, $\varepsilon_i \in (0; \varepsilon_0)$, $0 < \varepsilon_0 = \text{const}$, $i = 1,2$.

Используя условия гладкости, докажем, что при регулярных значениях спектральных параметров ω и ν ряды (32) и (33) сходятся абсолютно и равномерно; при этом возможно их почленное дифференцирование.

Согласно свойствам (38) и (39) функции Миттаг-Леффлера, функции $Q_{1in_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu)$ $(i = \overline{1,4})$ и $Q_{2jn_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu)$ $(j = \overline{1,3})$ равномерно ограничены на отрезке $[-T;T]$. Тогда для всех положительных целых чисел $n_1, \ldots, n_m$ существуют такие постоянные C_{1k} $(k = 1,2)$, что справедливы следующие оценки:

$$\max_{n_1,\ldots,n_m \in \mathbb{N}} \max_{i=\overline{1,4}} |Q_{1in_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu)| \leqslant C_{11}, \qquad \max_{n_1,\ldots,n_m \in \mathbb{N}} \max_{j=\overline{1,3}} |Q_{2jn_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu)| \leqslant C_{12}, \tag{41}$$

где $C_{1k} = \text{const}$, $k = 1,2$.

Применяя оценки (41), формулу (35), неравенство Коши—Буняковского и неравенства Бесселя (36) и (37) к рядам (32) и (33), получаем

$$
\begin{aligned}
|U(t,x,\omega,\nu)| &\leqslant \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} |u^{+}_{n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu)|\cdot|\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)| \leqslant \\
&\leqslant \left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^m C_{11} \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \left[|\varphi_{1n_1,\ldots,n_m}| + |\varphi_{2n_1,\ldots,n_m}| + |f_{1n_1,\ldots,n_m}| + |f_{2n_1,\ldots,n_m}|\right] \leqslant \\
&\leqslant \gamma_1 \left[\left\|\frac{\partial^{5m}\varphi_1(x)}{\partial x_1^5 \partial x_2^5 \ldots \partial x_m^5}\right\|_{L_2(\Omega_l^m)} + \left\|\frac{\partial^{5m}\varphi_2(x)}{\partial x_1^5 \partial x_2^5 \ldots \partial x_m^5}\right\|_{L_2(\Omega_l^m)} + \right. \\
&\left. + \left\|\frac{\partial^{5m} f_1(x)}{\partial x_1^5 \partial x_2^5 \ldots \partial x_m^5}\right\|_{L_2(\Omega_l^m)} + \left\|\frac{\partial^{5m} f_2(x)}{\partial x_1^5 \partial x_2^5 \ldots \partial x_m^5}\right\|_{L_2(\Omega_l^m)}\right] < \infty, \quad (42)
\end{aligned}
$$

где

$$
\gamma_1 = \left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^{5m/2} C_{11} C_{01} \left(\frac{l}{\pi}\right)^{5m}, \quad C_{01} = \sqrt{\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \frac{1}{n_1^{10} \ldots n_m^{10}}};
$$

$$
\begin{aligned}
|U(t,x,\omega,\nu)| &\leqslant \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} |u^{-}_{n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu)|\cdot|\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)| \leqslant \\
\leqslant \gamma_2 &\left[\left\|\frac{\partial^{5m}\varphi_1(x)}{\partial x_1^5 \partial x_2^5 \ldots \partial x_m^5}\right\|_{L_2(\Omega_l^m)} + \left\|\frac{\partial^{5m}\varphi_2(x)}{\partial x_1^5 \partial x_2^5 \ldots \partial x_m^5}\right\|_{L_2(\Omega_l^m)} + \left\|\frac{\partial^{5m} f_2(x)}{\partial x_1^5 \partial x_2^5 \ldots \partial x_m^5}\right\|_{L_2(\Omega_l^m)}\right] < \infty, \quad (43)
\end{aligned}
$$

где

$$
\gamma_2 = \left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^{5m/2} C_{12} C_{01} \left(\frac{l}{\pi}\right)^{5m}.
$$

Из оценок (42) и (43) следует, что ряды (32) и (33) сходятся абсолютно и равномерно в области $\overline{\Omega}$ при $(n_1,\ldots,n_m,\omega,\nu) \in \aleph = \{n_1,\ldots,n_m \in \mathbb{N};\ \omega \in \Lambda_1;\ \nu \in \Lambda_2\}$. Поэтому при таких чисел $(n_1,\ldots,n_m,\omega,\nu) \in \aleph$ функций (32) и (33) можно нужное число раз формально дифференцировать в области $\overline{\Omega}$:

$$
\begin{aligned}
{}_C D_{0t}^{\alpha_1} U(t,x,\omega,\nu) &= \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x) \times \\
&\times \Big[\varphi_{1n_1,\ldots,n_m} {}_C D_{0t}^{\alpha_1} Q_{11n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu) + \varphi_{2n_1,\ldots,n_m} {}_C D_{0t}^{\alpha_1} Q_{12n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu) + \\
&+ f_{1n_1,\ldots,n_m} {}_C D_{0t}^{\alpha_1} Q_{13n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu) + f_{2n_1,\ldots,n_m} {}_C D_{0t}^{\alpha_1} Q_{14n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu)\Big], \quad t > 0, \quad (44)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_C D_{0t}^{\alpha_2} U(t,x,\omega,\nu) &= \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x) \Big[\varphi_{1n_1,\ldots,n_m} {}_C D_{0t}^{\alpha_2} Q_{21n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu) + \\
&+ \varphi_{2n_1,\ldots,n_m} {}_C D_{0t}^{\alpha_2} Q_{22n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu) + f_{2n_1,\ldots,n_m} {}_C D_{0t}^{\alpha_2} Q_{23n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu)\Big], \quad t < 0, \quad (45)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_{x_1x_1x_1x_1}(t,x,\omega,\nu) &= \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n_1}{l}\right)^4 \vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x) \Big[\varphi_{1n_1,\ldots,n_m} Q_{11n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu) + \\
&+ \varphi_{2n_1,\ldots,n_m} Q_{12n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu) + f_{1n_1,\ldots,n_m} Q_{13n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu) + \\
&+ f_{2n_1,\ldots,n_m} Q_{14n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu)\Big], \quad t > 0, \quad (46)
\end{aligned}
$$

$$U_{x_1x_1x_1x_1}(t,x,\omega,\nu)=\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\left(\frac{\pi n_1}{l}\right)^4\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\Big[\varphi_{1n_1,\ldots,n_m}Q_{21n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu)+$$
$$+\varphi_{2n_1,\ldots,n_m}Q_{22n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu)+f_{2n_1,\ldots,n_m}Q_{23n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu)\Big],\quad t<0. \quad (47)$$

Аналогичным образом в области Ω определяются разложения в ряды Фурье следующих функций:

$$U_{x_2x_2x_2x_2}(t,x,\omega,\nu),\ U_{x_3x_3x_3x_3}(t,x,\omega,\nu),\ \ldots,\ U_{x_mx_mx_mx_m}(t,x,\omega,\nu),$$
$${}_CD_{0t}^{\alpha_1}U_{x_1x_1}(t,x,\omega,\nu),\ {}_CD_{0t}^{\alpha_2}U_{x_1x_1}(t,x,\omega,\nu),\ {}_CD_{0t}^{\alpha_1}U_{x_2x_2}(t,x,\omega,\nu),\ \ldots,$$
$${}_CD_{0t}^{\alpha_2}U_{x_2x_2}(t,x,\omega,\nu),\ \ldots,\ {}_CD_{0t}^{\alpha_1}U_{x_mx_m}(t,x,\omega,\nu),\ {}_CD_{0t}^{\alpha_2}U_{x_mx_m}(t,x,\omega,\nu).$$

Сходимость рядов (44) и (45) доказывается аналогично доказательству сходимости рядов (32) и (33). Поэтому достаточно показать сходимость рядов (46) и (47). Принимая во внимание формулы (35)–(37) и оценки (41) и применяя неравенство Коши—Буняковского, получаем

$$|U_{x_1x_1x_1x_1}(t,x,\omega,\nu)|\leqslant\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\left(\frac{\pi n_1}{l}\right)^4|u^+_{n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu)|\cdot|\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)|\leqslant$$
$$\leqslant\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^m\left(\frac{\pi}{l}\right)^4C_{11}\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}n_1^4\Big[|\varphi_{1n_1,\ldots,n_m}|+|\varphi_{2n_1,\ldots,n_m}|+|f_{1n_1,\ldots,n_m}|+|f_{2n_1,\ldots,n_m}|\Big]\leqslant$$
$$\leqslant\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^mC_{11}\left(\frac{l}{\pi}\right)^{5m-4}\left[\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\frac{1}{n_1n_2^5\ldots n_m^5}|\varphi^{(5m)}_{1n_1,\ldots,n_m}|+\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\frac{1}{n_1n_2^5\ldots n_m^5}|\varphi^{(5m)}_{2n_1,\ldots,n_m}|+\right.$$
$$\left.+\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\frac{1}{n_1n_2^5\ldots n_m^5}|f^{(5m)}_{1n_1,\ldots,n_m}|+\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\frac{1}{n_1n_2^5\ldots n_m^5}|f^{(5m)}_{2n_1,\ldots,n_m}|\right]\leqslant$$
$$\leqslant\gamma_3\left[\left\|\frac{\partial^{5m}\varphi_1(x)}{\partial x_1^5\partial x_2^5\ldots\partial x_m^5}\right\|_{L_2(\Omega_l^m)}+\left\|\frac{\partial^{5m}\varphi_2(x)}{\partial x_1^5\partial x_2^5\ldots\partial x_m^5}\right\|_{L_2(\Omega_l^m)}+\right.$$
$$\left.+\left\|\frac{\partial^{5m}f_1(x)}{\partial x_1^5\partial x_2^5\ldots\partial x_m^5}\right\|_{L_2(\Omega_l^m)}+\left\|\frac{\partial^{5m}f_2(x)}{\partial x_1^5\partial x_2^5\ldots\partial x_m^5}\right\|_{L_2(\Omega_l^m)}\right]<\infty,$$

где

$$\gamma_3=\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^{5m/2}C_{11}C_{02}\left(\frac{l}{\pi}\right)^{5m-2},\quad C_{02}=\sqrt{\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\frac{1}{n_1^2n_2^{10}\ldots n_m^{10}}};$$

$$|U_{x_1x_1x_1x_1}(t,x,\omega,\nu)|\leqslant\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\left(\frac{\pi n_1}{l}\right)^4|u^-_{n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu)|\cdot|\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)|\leqslant$$
$$\leqslant\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^m\left(\frac{\pi}{l}\right)^4C_{11}\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}n_1^4\Big[|\varphi_{1n_1,\ldots,n_m}|+|\varphi_{2n_1,\ldots,n_m}|+|f_{2n_1,\ldots,n_m}|\Big]\leqslant$$
$$\leqslant\gamma_4\left[\left\|\frac{\partial^{5m}\varphi_1(x)}{\partial x_1^5\partial x_2^5\ldots\partial x_m^5}\right\|_{L_2(\Omega_l^m)}+\left\|\frac{\partial^{5m}\varphi_2(x)}{\partial x_1^5\partial x_2^5\ldots\partial x_m^5}\right\|_{L_2(\Omega_l^m)}+\left\|\frac{\partial^{5m}f_2(x)}{\partial x_1^5\partial x_2^5\ldots\partial x_m^5}\right\|_{L_2(\Omega_l^m)}\right]<\infty,$$

где

$$\gamma_4=\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^{5m/2}C_{12}C_{02}\left(\frac{l}{\pi}\right)^{5m-2}.$$

Аналогично доказывается сходимость рядов Фурье в области Ω для следующих функций:

$$U_{x_2x_2x_2x_2}(t,x,\omega,\nu),\ U_{x_3x_3x_3x_3}(t,x,\omega,\nu),\ \ldots,\ U_{x_mx_mx_mx_m}(t,x,\omega,\nu),$$
$${}_CD_{0t}^{\alpha_1}U_{x_1x_1}(t,x,\omega,\nu),\ {}_CD_{0t}^{\alpha_2}U_{x_1x_1}(t,x,\omega,\nu),\ {}_CD_{0t}^{\alpha_1}U_{x_2x_2}(t,x,\omega,\nu),\ \ldots,$$

$$ {}_C D_{0t}^{\alpha_2} U_{x_2 x_2}(t,x,\omega,\nu), \ \ldots, \ {}_C D_{0t}^{\alpha_1} U_{x_m x_m}(t,x,\omega,\nu), \ {}_C D_{0t}^{\alpha_2} U_{x_m x_m}(t,x,\omega,\nu). $$

Отсюда следует, что функции (32) и (33) обладают свойствами (2) для регулярных значений спектральных параметров ω и ν.

4. Непрерывная зависимость решения от малого параметра. Рассматривается непрерывная зависимость решения задачи (1)–(4) от малых параметров $\varepsilon_i > 0$ $(i = 1, 2)$ при регулярных значениях спектральных параметров ω и ν. Пусть ε_{11} и ε_{12} — два разных значения первого малого положительного параметра ε_1. С помощью оценок (38)–(40) легко проверить, что верны следующие оценки:

$$ \max_{n_1,\ldots,n_m \in \mathbb{N}} \max_{t \in [0;T]} \Big| Q_{1in_1,\ldots,n_m}(t,\varepsilon_{11},\omega,\nu) - Q_{1in_1,\ldots,n_m}(t,\varepsilon_{12},\omega,\nu) \Big| \leqslant C_{21} |\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}|, \quad i = \overline{1,4}, \tag{48} $$

$$ \max_{n_1,\ldots,n_m \in \mathbb{N}} \max_{t \in [-T;0]} \Big| Q_{2in_1,\ldots,n_m}(t,\varepsilon_{11},\omega,\nu) - Q_{2in_1,\ldots,n_m}(t,\varepsilon_{12},\omega,\nu) \Big| \leqslant C_{22} |\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}|, \quad i = \overline{1,3}, \tag{49} $$

где $0 < C_{2i} = \mathrm{const}$, $\varepsilon_{1i} \in (0; \varepsilon_{10})$, $0 < \varepsilon_{10} = \mathrm{const}$, $i = 1, 2$.

Далее, учитывая формулу (35), оценки (48), (49) и применяя неравенство Коши—Буняковского и неравенства Бесселя (36) и (37), из рядов (32) и (33) получаем

$$ \Big| U(t,x,\varepsilon_{11},\omega,\nu) - U(t,x,\varepsilon_{12},\omega,\nu \Big| \leqslant $$
$$ \leqslant \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \big| u^{+}_{n_1,\ldots,n_m}(t,\varepsilon_{11},\omega,\nu) - u^{+}_{n_1,\ldots,n_m}(t,\varepsilon_{12},\omega,\nu) \big| \cdot |\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)| \leqslant $$
$$ \leqslant \left(\sqrt{\frac{2}{l}} \right)^m C_{21} |\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}| \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \Big[|\varphi_{1n_1,\ldots,n_m}| + |\varphi_{2n_1,\ldots,n_m}| + |f_{1n_1,\ldots,n_m}| + |f_{2n_1,\ldots,n_m}| \Big] \leqslant $$
$$ \leqslant \gamma_5 |\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}| \Bigg[\left\| \frac{\partial^{5m} \varphi_1(x)}{\partial x_1^5 \partial x_2^5 \ldots \partial x_m^5} \right\|_{L_2(\Omega_l^m)} + \left\| \frac{\partial^{5m} \varphi_2(x)}{\partial x_1^5 \partial x_2^5 \ldots \partial x_m^5} \right\|_{L_2(\Omega_l^m)} + $$
$$ + \left\| \frac{\partial^{5m} f_1(x)}{\partial x_1^5 \partial x_2^5 \ldots \partial x_m^5} \right\|_{L_2(\Omega_l^m)} + \left\| \frac{\partial^{5m} f_2(x)}{\partial x_1^5 \partial x_2^5 \ldots \partial x_m^5} \right\|_{L_2(\Omega_l^m)} \Bigg] = |\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}| \cdot C_{31}, \tag{50} $$

где

$$ \gamma_5 = \left(\sqrt{\frac{2}{l}} \right)^{5m/2} C_{21} C_{01} \left(\frac{l}{\pi} \right)^{5m}, \quad 0 < C_{31} = \mathrm{const} < \infty; $$

$$ \Big| U(t,x,\varepsilon_{11},\omega,\nu) - U(t,x,\varepsilon_{12},\omega,\nu) \Big| \leqslant $$
$$ \leqslant \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \Big| u^{-}_{n_1,\ldots,n_m}(t,\varepsilon_{11},\omega,\nu) - u^{-}_{n_1,\ldots,n_m}(t,\varepsilon_{12},\omega,\nu) \Big| \cdot |\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)| \leqslant $$
$$ \leqslant \gamma_{10} |\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}| \Bigg[\left\| \frac{\partial^{5m} \varphi_1(x)}{\partial x_1^5 \partial x_2^5 \ldots \partial x_m^5} \right\|_{L_2(\Omega_l^m)} + $$
$$ + \left\| \frac{\partial^{5m} \varphi_2(x)}{\partial x_1^5 \partial x_2^5 \ldots \partial x_m^5} \right\|_{L_2(\Omega_l^m)} + \left\| \frac{\partial^{5m} f_2(x)}{\partial x_1^5 \partial x_2^5 \ldots \partial x_m^5} \right\|_{L_2(\Omega_l^m)} \Bigg] = |\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}| \cdot C_{32}, \tag{51} $$

где

$$ \gamma_6 = \left(\sqrt{\frac{2}{l}} \right)^{5m/2} C_{22} C_{01} \left(\frac{l}{\pi} \right)^{5m}, \quad 0 < C_{32} = \mathrm{const} < \infty. $$

Из оценок (50) и (51) следует, что $|U(t,x,\varepsilon_{11},\omega,\nu) - U(t,x,\varepsilon_{12},\omega,\nu)|$ мало, если $|\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}|$ мало в области $\overline{\Omega}$ при $(n_1, \ldots, n_m, \omega, \nu) \in \aleph$.

Аналогично доказывается, что решение $U(t,x,\omega,\nu)$ задачи (1)–(4) непрерывно зависит от второго малого параметра ε_2 и от заданных функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$.

5. Заключение и формулировка теоремы. В данной работе исследованы вопросы однозначной разрешимости задачи (1)–(4) для нагруженного интегро-дифференциального уравнения смешанного типа с операторами Герасимова—Капуто различных дробных порядков, спектральными параметрами и малым параметром при смешанных производных в многомерной прямоугольной области Ω. Для $(n_1, \ldots, n_m, \omega, \nu) \in \aleph$ доказаны некоторые утверждения при выполнении условий гладкости: пусть функции

$$\varphi_i(x) \in C^4(\Omega_l^m), \quad f_i\left(x, \int\limits_{\Omega_l^m} \Theta_i(y) U(0,y) dy\right) \in C_x^2(\Omega_l^m \times \mathbb{R}), \quad i = 1, 2,$$

имеют кусочно непрерывные производные пятого порядка в области Ω_l^m.

Сформулируем теорему доказанную в данной работе.

Теорема. *Пусть выполняются условия гладкости. Тогда для всевозможных натуральных чисел* $n_1, \ldots, n_m$ *и для всех регулярных значений параметров* ω *и* ν *из множества* $\aleph$ *граничная задача* (1)–(4) *однозначно разрешима в области* Ω*, а её решение представляется в виде рядов Фурье* (32) *и* (33) *в соответствующих подобластях. Данное решение задачи* (1)–(4) *непрерывно зависит от заданных функций* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$*. Кроме того, имеет место предельное равенство*

$$\lim_{\varepsilon_i \to 0} U(t, x, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega, \nu) = U(t, x, 0, 0, \omega, \nu), \quad i = 1, 2,$$

где $U(t, x, 0, 0, \omega, \nu)$ *— решение дробного интегро-дифференциального уравнения смешанного типа вида*

$$A_0(U) - B_{1,\omega}(U) = \begin{cases} \nu \int\limits_0^T K_1(t,s) U(s,x) ds + F_1(t,x), & t > 0, \\ \nu \int\limits_{-T}^0 K_2(t,s) U(s,x) ds + F_2(t,x), & t < 0, \end{cases}$$

где

$$A_0(U) = \left[\frac{1 + \operatorname{sgn}(t)}{2} {}_C D_{0t}^{\alpha_1} + \frac{1 - \operatorname{sgn}(t)}{2} {}_C D_{0t}^{\alpha_2}\right] U(t,x),$$

$$B_{1,\omega}(U) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^m (U_{x_i x_i} - U_{x_i x_i x_i x_i}), & t > 0, \\ \omega^2 \sum\limits_{i=1}^m (U_{x_i x_i} - U_{x_i x_i x_i x_i}), & t < 0, \end{cases}$$

при граничных условиях (3) *и* (4),

$$F_i(t,x) = k_i(t) f_i\left(x, \int\limits_{\Omega_l^m} \Theta_i(y) U(0,y) dy\right), \quad i = 1, 2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абдуллаев О. Х.* Нелокальная задача для нагруженного уравнения смешанного типа с интегральным оператором// Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2016. — *20*, № 2. — С. 220–240.
2. *Абдуллаев О. Х.* Об одной задаче для уравнения параболо-гиперболического типа с нелинейной нагруженной частью// Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — *176*. — С. 121–128.
3. *Аттаев А. Х.* Краевые задачи с характеристическими носителями для нагруженных вырождающихся гиперболических уравнений/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Нальчик, 1989.

4. *Бозиев О. Л.* Краевые задачи для некоторых классов нагруженных уравнений гиперболического типа/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Нальчик, 2000.
5. *Борисов В. Н., Нахушев А. М.* Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений и их приложения к прогнозу уровня грунтовых вод// Диффер. уравн. — 1977. — *13*, № 1. — С. 105–110.
6. *Бородин А. В.* Дифференцируемость по параметру решений нелинейно нагруженных краевых задач для уравнений в частных произволных второго порядка// Диффер. уравн. — 1979. — *15*, № 1. — С. 18–26.
7. *Гельфанд И. М.* Некторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 1959. — *14*, № 3 (87). — С. 3–19.
8. *Геккиева С. Х.* Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений с дробной производной по времени/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Нальчик, 2003.
9. *Дженалиев М. Т.* К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. — Алматы: Гылым, 1995.
10. *Зарубин А. Н.* Краевая задача для дифференциально-разностного смешанно-составного уравнения с дробной производной, функциональным запаздыванием и опережением// Диффер. уравн. — 2019. — *55*, № 2. — С. 217–226.
11. *Казиев В. М.* О задаче Дарбу для одного нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка// Диффер. уравн. — 1978. — *14*, № 1. — С. 181–185.
12. *Кожанов А. И.* Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнении и о связанной с ним обратной задаче// Мат. заметки. — 2004. — *76*, № 6. — С. 840–853.
13. *Нахушев А. М.* О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка// Диффер. уравн. — 1976. — *12*, № 1. — С. 103–108.
14. *Нахушев А. М.* Нелокальная задача и задача Гурса для нагруженного уравнения гиперболического типа и их приложения к прогнозу почвенной влаги// Докл. АН СССР. — 1978. — *242*, № 5. — С. 1008–1011.
15. *Нахушев А. М.* Краевые задачи для нагруженного интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги// Диффер. уравн. — 1979. — *15*, № 1. — С. 96–105.
16. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их приложения// Диффер. уравн. — 1983. — *19*, № 1. — С. 86–94.
17. *Репин О. А.* Нелокальная задача с операторами Сайго для уравнения смешанного типа третьего порядка// Изв. вузов. Мат. — 63–68. — № 1.
18. *Репин О. А.* Об одной задаче для уравнения смешанного типа с дробной производной// Изв. вузов. Мат. — 2018. — № 8. — С. 46–51.
19. *Уфлянд Я. С.* О распространении колебаний в сложных электрических линиях// Инж.-физ. ж. — 1964. — *7*, № 1. — С. 89–92.
20. *Юлдашев Т. К.* Нелокальная краевая задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром// Диффер. уравн. — 2018. — *54*, № 12. — С. 1687–1694.
21. *Юлдашев Т. К.* О разрешимости краевой задачи для обыкновенного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2019. — *59*, № 2. — С. 252–263.
22. *Юлдашев Т. К.* Спектральные особенности решений краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма второго порядка с отражением аргумента// Изв. Ин-та мат. информ. Удмурт. ун-та. — 2019. — *54*. — С. 122–134.
23. *Abdullaev O. Kh., Sadarangani K.* Nonlocal problems with integral gluing condition for loaded mixed-type equations involving the Caputo fractional derivative// Electron. J. Differ. Equations. — 2016. — 164.
24. *Agarwal P., Berdyshev A. S., Karimov E. T.* Solvability of a nonlocal problem with integral transmitting condition for mixed type equation with Caputo fractional derivative// Results Math. — 2017. — *71*, № 3. — P. 1235–1257.
25. *Assanova A. T., Imanchiyev A. E., Kadirbayeva Zh. M.* A nonlocal problem for loaded partial differential equations of fourth order// Вестн. Караганд. ун-та. Мат. — 2020. — № 1 (97). — С. 6–16.
26. *Area I., Batarfi H., Losada J., Nieto J. J., Shammakh W., Torres A.* On a fractional order Ebola epidemic model// Adv. Difference Equations. — 2015. — 278.
27. *Hussain A., Baleanu D., Adeel M.* Existence of solution and stability for the fractional order novel coronavirus (nCoV-2019) model// Adv. Difference Equations. — 2020. — 384.

28. *Karimov E. T., Al-Salti N., Kerbal S.* An inverse source non-local problem for a mixed-type equation with a Caputo fractional differential operator// East-Asian J. Appl. Math. — 2017. — *7*, № 2. — P. 417–438.
29. *Karimov E. T., Kerbal S., Al-Salti N.* Inverse source problem for multi-term fractional mixed-type equation// in: Advances in Real and Complex Analysis with Applications. — Singapore: Springer Nature, 2017. — P. 289–301.
30. *Kumar D., Baleanu D.* Fractional calculus and its applications in physics// Front. Phys. — 2019. — *7*, № 6. — 81.
31. *Mainardi F.* Fractional calculus: Some basic problems in continuum and statistical mechanics// in: Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics (*Carpinteri A., Mainardi F.*, eds.). — Wien: Springer, 1997.
32. *Patnaik S., Hollkamp J. P., Semperlotti F.* Applications of variable-order fractional operators: A review// Proc. Roy. Soc. A. — 2020. — *476*. — 20190498.
33. *Salakhitdinov M. S., Karimov E. T.* Uniqueness of an inverse source non-local problem for fractional-order mixed-type equations// Eurasian Math. J. — 2016. — *7*, № 1. — P. 74–83.
34. *Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.* Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications. — Yverdon: Gordon & Breach, 1993.
35. *Sandev T., Tomovski Z.* Fractional Equations and Models: Theory and Applications. — Cham, Switzerland: Springer Nature, 2019.
36. *Saxena R. K., Garra R., Orsingher E.* Analytical solution of space-time fractional telegraph-type equations involving Hilfer and Hadamard derivatives// Integral Transform. Spec. Funct. — 2016. — *21*, № 1. — P. 30–42.
37. *Sun H., Chang A., Zhang Y., Chen W.* A review on variable-order fractional differential equations: Mathematical foundations, physical models, numerical methods, and applications// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2019. — *22*, № 1. — P. 27–59.
38. *Tenreiro Machado J. A.* Handbook of Fractional Calculus with Applications. — Berlin–Boston: De Gruyter, 2019.
39. *Terlyga O., Bellout H., Bloom F.* A hyperbolic-parabolic system arising in pulse combustion: Existence of solutions for the linearized problem// Electron. J. Differ. Equations. — 2013. — 46.
40. *Ullah S., Khan M. A., Farooq M., Hammouch Z., Baleanu D.* A fractional model for the dynamics of tuberculosis infection using Caputo–Fabrizio derivative// Discr. Cont. Dynam. Syst. Ser. S. — 2020. — *13*, № 3. — P. 975–993.
41. *Yuldashev T. K.* On an integro-differential equation of pseudoparabolic-pseudohyperbolic type with degenerate kernels// Proc. Yerevan Univ. Phys. Mat. Sci. — 2018. — *52*, № 1. — P. 19–26.
42. *Yuldashev T. K.* Nonlocal inverse problem for a pseudohyperbolic-pseudoelliptic type integro-differential equations// Axioms. — 2020. — *9*, № 2. — 45.
43. *Yuldashev T. K.* On a boundary-value problem for Boussinesq-type nonlinear integro-differential equation with reflecting argument// Lobachevskii J. Math. — 2020. — *41*, № 1. — P. 111–123.
44. *Yuldashev T. K., Islomov B. I., Alikulov E. K.* Boundary-value problems for loaded third-order parabolic-hyperbolic equations in infinite three-dimensional domains// Lobachevskii J. Math. — 2020. — *41*, № 5. — P. 926—944.
45. *Yuldashev T. K., Kadirkulov B. J.* Boundary-value problem for weak nonlinear partial differential equations of mixed-type with fractional Hilfer operator// Axioms. — 2020. — *9*, № 2. — 68.
46. *Yuldashev T. K., Kadirkulov B. J.* Nonlocal problem for a mixed type fourth-order differential equation with Hilfer fractional operator// Ural Math. J. — 2020. — *6*, № 1. — P. 153–167.

Юлдашев Турсун Камалдинович
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

Каримов Эркинжон Тулкинович
Институт математики имени В. И. Романовского
Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан
E-mail: erkinjon.karimov@mathinst.uz