ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 210 (2022). С. 12–23
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-210-12-23

УДК 517.967

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С МЛАДШИМИ ЧЛЕНАМИ

© 2022 г. **О. Х. АБДУЛЛАЕВ, А. А. МАТЧАНОВА**

Аннотация. В работе изучены краевые задачи для смешанного дифференциального уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа с дробным оператором Герасимова—Капуто. Определены необходимые классы заданных функций, обеспечивающие однозначную разрешимость поставленных краевых задач. Доказаны существование и единственность решения краевой задачи.

Ключевые слова: параболо-гиперболическое уравнение, дифференциальный оператор Герасимова—Капуто, интегральное уравнение, единственность решения, существование решения.

ON THE SOLVABILITY OF BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR THIRD-ORDER EQUATIONS OF PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE WITH LOWER TERMS

© 2022 **O. Kh. ABDULLAEV, A. A. MATCHANOVA**

Abstract. In this paper, boundary-value problems for a third-order mixed differential equation of the parabolic-hyperbolic type with a fractional Gerasimov–Caputo operator are examined. Classes of functions that ensure the unique solvability of the boundary-value problem are found. The existence and uniqueness of a solution of the boundary-value problem are proved.

Keywords and phrases: parabolic-hyperbolic equation, Gerasimov–Caputo differential operator, integral equation, uniqueness of solution, existence of solution.

AMS Subject Classification: 35M10, 34K37, 35R11, 35D30

1. Постановка задачи. Известно, что краевые задачи для уравнения смешанного типа третьего порядка

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\right)Lu=0$$

с параболо-гиперболическим оператором Lu рассматривались в работах Т. Д. Джураева, А. Сопуева и М. Мамажанова [2], М. Мамажанова и Д. Холмуратова [3]. На корректность постановки краевых задач для такого уравнения существенное влияние оказывают коэффициенты a, b и c. В случаях $b=c=0$ и $a=c=0$ различные краевые задачи исследованы в [1, 6].

Задачи для уравнения параболо-гиперболического типа с интегро-дифференциальными операторами дробного порядка были изучены многими авторами (см. [7, 9, 10, 13]). Для нагруженного уравнения третьего порядка с параболо-гиперболическим оператором целого порядка были изучены локальные краевые задачи (см. [8, 14]). Отметим, что краевые задачи для вышеуказанного уравнения в случае, когда Lu — параболо-гиперболический оператор с дифференциальным оператором дробного порядка, изучены только с операторами без младших членов (см. [7, 12]).

В данной работе исследуется однозначная разрешимость локальных краевых задач для уравнения указанного типа при $a \neq 0$.

2. Постановка задач и необходимые функциональные соотношения. Пусть Ω — односвязная область, ограниченная отрезками BB_0, B_0A_0, A_0A прямых $x = 1$, $y = h = \text{const} > 0$, $x = 0$ и характеристиками $AC : x + y = 0$, $BC : x - y = 1$ уравнения колебания струны, пересекающимися в точке $C(1/2, -1/2)$. Введем следующие обозначения:

$$\Omega_1 = \Omega \cap \{y > 0\}, \quad \Omega_2 = \Omega \cap \{y < 0\} = \left\{(x, y) : -\frac{1}{2} < y < 0,\ -y < x < y + 1\right\}.$$

В области Ω рассмотрим уравнение

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\right) Lu = 0, \tag{1}$$

где

$$Lu \equiv \begin{cases} L_1u = u_{xx} - {}_cD^{\alpha}_{0y}u + a_1(x, y)u_x + c_1(x, y)u & \text{при } (x, y) \in \Omega_1, \\ L_2u = u_{xx} - u_{yy} + a_2(x, y)u_x + b_2(x, y)u_y + c_2(x, y)u & \text{при } (x, y) \in \Omega_2 \end{cases}$$

и ${}_cD^{\alpha}_{oy}$ — дробная производная Герасимова—Капуто порядка $0 < \alpha < 1$ (см. [11]):

$${}_cD^{\alpha}_{oy}f(y) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int\limits_0^y (y - t)^{-\alpha} f'(t)dt,$$

a, b и c — заданные постоянные числа, $a \neq 0$, $a_i(x, y)$, $b_2(x, y)$, $c_i(x, y)$ — заданные функции в областях Ω_i $(i = 1, 2)$, соответственно. В области Ω_1 функции $a_1(x, y)$, $c_1(x, y)$, $\partial a_1(x, y)/\partial x$, $\partial a_1(x, y)/\partial y$ удовлетворяют условию Гельдера, а в области Ω_2 — принадлежат следующим функциональным классам:

$$\text{при } ab = 0: \quad a_2(x, y), b_2(x, y) \in C^1(\overline{\Omega_2}), \quad c_2(x, y) \in C^0(\overline{\Omega_2});$$
$$\text{при } ab \neq 0: \quad a_2(x, y), b_2(x, y) \in C^2(\Omega_2), \quad c_2(x, y) \in C^1(\overline{\Omega}_2).$$

Определение. Функция $u(x, y)$ называется *регулярным решением* уравнения (1), если она имеет непрерывные производные, входящие в оператор Lu, где $Lu \in C^1(\Omega)$.

Задача 1. Найти в области Ω регулярное решение $u(x, y)$ уравнения (1) из класса функций

$$W = \left\{u(x, y) : u(x, y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\overline{\Omega}_2 \setminus BC),\ u_{xx} \in C(\Omega_1 \cup AA_0)\right\}$$

и удовлетворяющее граничным условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y); \quad u(1, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant h, \tag{2}$$

$$u_{xx}(0, y) = \varphi_3(y), \quad 0 \leqslant y < h, \tag{3}$$

$$u|_{AC} = \psi_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{AC} = \psi_2(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \tag{5}$$

а также условию склеивания

$$u_y(x, -0) = \lim_{y \to +0} {}_cD^{\alpha}_{0y}u(x, y), \quad x \in (0, 1) \tag{6}$$

на интервале AB при $0 < b/a \leqslant 1$, где $\mathbf{n}$ — внутренняя нормаль, $\varphi_i(y)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ $(i = \overline{1, 3})$ — заданные функции, причем $\psi_1(0) = \varphi_1(0)$.

Теорема 1. *При выполнении условий*

$$\varphi_1(y) \in C^1[0,h] \cap C^2(0,h), \quad \varphi_2(y) \in C[0,h], \quad \varphi_3(y) \in C[0,h] \cap C^1[0,h),$$
$$\psi_1(x) \in C\left[0,\frac{1}{2}\right] \cap C^1\left[0,\frac{1}{2}\right), \quad \psi_2(x) \in C\left[0,\frac{1}{2}\right] \cap C^1\left(0,\frac{1}{2}\right),$$

решение задачи 1 *существует и единственно.*

Доказательство. Полагая

$$u(x,y) = \begin{cases} u_1(x,y) & \text{при } (x,y) \in \Omega_1, \\ u_2(x,y) & \text{при } (x,y) \in \Omega_2, \end{cases}$$

перепишем уравнение (2) в виде двух систем:

$$\begin{cases} u_{1xx} - {}_cD^{\alpha}_{0y}u_1 + a_1(x,y)u_{1x} + c_1(x,y)u_1 = \upsilon_1(x,y), \\ a\upsilon_{1x} + b\upsilon_{1y} + c\upsilon_1 = 0 \end{cases} \quad \text{при } (x,y) \in \Omega_1, \tag{7}$$

$$\begin{cases} u_{2xx} - u_{2yy} + a_2(x,y)u_{2x} + b_2(x,y)u_{2y} + c_2(x,y)u_2 = \upsilon_2(x,y) \\ a\upsilon_{2x} + b\upsilon_{2y} + c\upsilon_2 = 0, \end{cases} \quad \text{при } (x,y) \in \Omega_2, \tag{8}$$

где $\upsilon_j(x,y)$ $(j=1,2)$ — произвольные непрерывно дифференцируемые функции.

Учитывая, что функция

$$\upsilon_{2x}(x,y) = w_2(bx-ay)\exp\left(-\frac{c(bx+ay)}{2ab}\right)$$

является решением второго уравнения системы (8), первое уравнение системы (8) перепишем в следующем виде:

$$L_2u = w_2(bx-ay)\exp\left(-\frac{c(bx+ay)}{2ab}\right), \tag{9}$$

где $w_2(bx-ay)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция. После перехода к характеристическим координатам $\xi = x+y$, $\eta = x-y$ уравнение (9) принимает вид

$$u_{2\xi\eta} + a_3(\xi,\eta)u_{2\xi} + b_3(\xi,\eta)u_{2\eta} + c_3(\xi,\eta)u_2 =$$
$$= \frac{1}{4}w_2\left(\frac{b-a}{2}\xi + \frac{b+a}{2}\eta\right)\exp\left[-\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}\xi + \frac{b-a}{2}\eta\right)\right], \tag{10}$$

а условия (4) и (5) — вид

$$u_2|_{\xi=0} = \psi_1\left(\frac{\eta}{2}\right); \quad \left.\frac{\partial u_2}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2\left(\frac{\eta}{2}\right). \tag{11}$$

Известно, что решение уравнения (10), удовлетворяющее условиям (11) и $(u_{2\xi} - u_{2\eta})\big|_{\eta=\xi} = \nu(\xi)$, имеет следующий вид (см. [1,5]):

$$u_2(\xi,\eta) = F(\xi,\eta) + \int_0^{\xi} T_0(\xi,\eta,t)\nu(t)dt +$$
$$+ \frac{1}{4}\int_0^{\xi} dt \int_t^{\xi} S(t,\tau,\xi,\eta)w_2\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\tau\right)\exp\left[-\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}t + \frac{b-a}{2}\tau\right)\right]d\tau +$$
$$+ \frac{1}{4}\int_0^{\xi} dt \int_t^{\eta} T(t,\tau,\xi,\eta)w_2\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\tau\right)\exp\left[-\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}t + \frac{b-a}{2}\tau\right)\right]d\tau, \tag{12}$$

где

$$F(\xi,\eta)=\psi_1\left(\frac{\eta}{2}\right)+\psi_1\left(\frac{\xi}{2}\right)-\psi_1(0)+\int\limits_0^\xi dt\int\limits_t^\xi \Phi(t,\tau)S(t,\tau,\xi,\eta)d\tau+$$
$$+\int\limits_0^\xi dt\int\limits_t^\eta \Phi(t,\tau)T(t,\tau,\xi,\eta)d\tau, \quad (13a)$$

$$\Phi(\xi,\eta)=\frac{1}{2}a_3(\xi,\eta)\psi_1'\left(\frac{\xi}{2}\right)-\frac{1}{2}b_3(\xi,\eta)\psi_1'\left(\frac{\eta}{2}\right)-c_3(\xi,\eta)\left[\psi_1\left(\frac{\eta}{2}\right)+\psi_1\left(\frac{\xi}{2}\right)+\psi_1(0)\right], \quad (13b)$$

$$T_0(\xi,\eta,t)=1-\int\limits_t^\xi a_3(t,\tau)S(t,\tau,\xi,\eta)d\tau-\int\limits_t^\eta a_3(t,\tau)T(t,\tau,\xi,\eta)d\tau-$$
$$-\int\limits_t^\xi d\lambda\int\limits_\lambda^\xi c_3(\lambda,\tau)S(\lambda,\tau,\xi,\eta)d\tau-\int\limits_t^\xi d\lambda\int\limits_\lambda^\eta c_3(\lambda,\tau)S(\lambda,\tau,\xi,\eta)d\tau, \quad (13c)$$

а функции $S(t,\tau,\xi,\eta)$ и $T(t,\tau,\xi,\eta)$ выражаются через коэффициенты $a_3(\xi,\eta)$, $b_3(\xi,\eta)$, $c_3(\xi,\eta)$ и непрерывны в $\overline{D_{\xi\eta}}\times\overline{D_{\xi\eta}}$, функции $T_\eta(t,\tau,\xi,\eta)$, $S_\xi(t,\tau,\xi,\eta)$, $S_\eta(t,\tau,\xi,\eta)$ непрерывны также в области $\overline{D_{\xi\eta}}\times\overline{D_{\xi\eta}}$, а функция $T_\xi(t,\tau,\xi,\eta)$ может иметь разрыв первого рода внутри этой области (см. [5]), где $D_{\xi\eta}=\{(\xi,\eta):0<\eta<1,\ 0<\xi<\eta\}$.

Подставляя (12) в (11), с учетом соотношений

$$\nu(0)=u_{2y}(0,0)=u_{1y}(0,0)=\varphi_1'(0), \quad \psi_1'(0)=\sqrt{2}\psi_2(0)-\varphi_1'(0)$$

получим

$$u_{2\xi}(\xi,\eta)=F_\xi(\xi,\eta)+T_0(\xi,\eta,\xi)\nu(\xi)+\int\limits_0^\xi T_{0\xi}(\xi,\eta,t)\nu(t)dt+$$
$$+\frac{1}{4}\int\limits_0^\xi S(t,\xi,\xi,\eta)w_2\left(\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}\xi\right)\exp\left[-\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}t+\frac{b-a}{2}\xi\right)\right]dt+$$
$$+\frac{1}{4}\int\limits_0^\xi dt\int\limits_t^\xi S_\xi(t,\tau,\xi,\eta)w_2\left(\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}\tau\right)\exp\left[-\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}t+\frac{b-a}{2}\tau\right)\right]d\tau+$$
$$+\frac{1}{4}\int\limits_\xi^\eta T(\xi,\tau,\xi,\eta)w_2\left(\frac{b-a}{2}\xi+\frac{b+a}{2}\tau\right)\exp\left[-\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}\xi+\frac{b-a}{2}\tau\right)\right]d\tau+$$
$$+\frac{1}{4}\int\limits_0^\xi dt\int\limits_t^\eta T_\xi(t,\tau,\xi,\eta)w_2\left(\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}\tau\right)\exp\left[-\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}t+\frac{b-a}{2}\tau\right)\right]d\tau, \quad (14a)$$

$$u_{2\xi}(0,\eta)=F_\xi(0,\eta)+T_0(0,\eta,0)\nu(0)+\frac{1}{4}\int\limits_0^\eta T(0,\tau,0,\eta)w_2\left(\frac{b+a}{2}\tau\right)\exp\left[-\frac{c(b-a)\tau}{4ab}\right]d\tau, \quad (14b)$$

$$F_\xi(0,\eta)=\frac{1}{2}\psi_1'(0)+\int\limits_0^\eta \Phi(0,\tau)T(0,\tau,0,\eta)d\tau, \quad (14c)$$

$$T_0(0,\eta,0)=1-\int\limits_0^{\eta} a_3(0,\tau)T(0,\tau,0,\eta)d\tau. \tag{14d}$$

Учитывая второе условие (11), из (14) получим

$$\int\limits_0^{\eta} T(0,\tau;0,\eta)\omega_2\left(-\frac{(b+a)\tau}{2}\right)\exp\left(-\frac{c(b-a)\tau}{4ab}\right)d\tau=2\sqrt{2}\psi_2\left(\frac{\eta}{2}\right)-2\psi_1'(0)-$$
$$-4\int\limits_0^{\eta}\Phi(0,\tau)T(0,\tau,0,\eta)d\tau-4\left[1-\int\limits_0^{\eta}a_3(0,\tau)T(0,\tau,0,\eta)d\tau\right]\varphi_1'(0). \tag{15}$$

Дифференцируя уравнения (15) по η и учитывая условие $T(0,\eta,0,\eta)=1$, приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$\omega_2\left(-\frac{(b+a)\eta}{2}\right)+\int\limits_0^{\eta}K_1(\tau,\eta)\omega_2\left(-\frac{(b+a)\tau}{2}\right)d\tau=g_1(\eta), \tag{16}$$

где

$$K_1(\tau,\eta)=T_\eta(0,\tau;0,\eta)\exp\left[\frac{c(a-b)(\tau-\eta)}{4ab}\right],$$

$$g_1(\eta)=\left\{\sqrt{2}\psi_2'\left(\frac{\eta}{2}\right)-4\Phi(0,\eta)-4\int\limits_0^{\eta}\Phi(0,\tau)T_\eta(0,\tau;0,\eta)d\tau+\right.$$
$$\left.+4\varphi_1'(0)\left[a_3(0,\eta)+\int\limits_0^{\eta}a_3(0,\tau)T_\eta(0,\tau,0,\eta)d\tau\right]\right\}\exp\left[\frac{c(b-a)\eta}{4ab}\right].$$

В силу свойств классов принадлежности заданных функций и коэффициентов уравнения (1), из (13) следует, что $|\Phi(0,\eta)|\leqslant \text{const}$. Отсюда, учитывая неравенство $|T_\eta(t,\tau;s,\eta)|\leqslant \text{const}$, получаем

$$|K_1(\tau,\eta)|\leqslant \text{const} \text{ и } |g_1(\eta)|\leqslant \text{const}.$$

Следовательно, уравнение (16) имеет единственное решение, т.е. $\omega_2\left(\frac{\eta}{2}\right)$ однозначно определяется для всех $-\frac{1}{2}\leqslant\frac{\eta}{2}\leqslant 0$. Учитывая неравенство $-\frac{1}{2}\leqslant\frac{\xi-\eta}{2}\leqslant 0$ и подставляя значение $\omega_2\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)$ в (12), получаем решение $u_2(\xi,\eta)$ в виде

$$u_2(\xi,\eta)=M(\xi,\eta)+\int\limits_0^{\xi}T_0(\xi,\eta;t)\nu(t)dt, \tag{17}$$

где

$$M(\xi,\eta)=F(\xi,\eta)+$$
$$+\frac{1}{4}\int\limits_0^{\xi}dt\int\limits_t^{\xi}S(t,\tau,\xi,\eta)w_2\left(\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}\tau\right)\exp\left[-\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}t+\frac{b-a}{2}\tau\right)\right]d\tau+$$
$$+\frac{1}{4}\int\limits_0^{\xi}dt\int\limits_t^{\eta}T(t,\tau,\xi,\eta)w_2\left(\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}\tau\right)\exp\left[-\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}t+\frac{b-a}{2}\tau\right)\right]d\tau.$$

При $\eta = \xi = x$, полагая $M(x) = M(x,x)$, $T_0(x,t) = T_0(x,x;t)$ и $\tau(x) = u_2(x,x)$, из (17) находим

$$\tau(x) = M(x) + \int\limits_0^x T_0(x,t)\nu(t)dt. \tag{18}$$

Дифференцируя уравнения (18), получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $\nu(x)$:

$$\nu(x) + \int\limits_0^x T_{0x}(x,t)\nu(t)dt = \tau'(x) - M'(x), \tag{19}$$

где

$$\begin{aligned} M(\xi,\xi) = F(\xi,\xi) + {} \\ &+ \frac{1}{4}\int\limits_0^\xi dt \int\limits_t^\xi S(t,\tau,\xi,\xi) w_2\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\tau\right) \exp\left[-\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}t + \frac{b-a}{2}\tau\right)\right] d\tau + \\ &+ \frac{1}{4}\int\limits_0^\xi dt \int\limits_t^\xi T(t,\tau,\xi,\xi) w_2\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\tau\right) \exp\left[-\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}t + \frac{b-a}{2}\tau\right)\right] d\tau, \end{aligned} \tag{20a}$$

$$\begin{aligned} M_\xi(\xi,\xi) = F_\xi(\xi,\xi) + {} \\ &+ \frac{1}{4}\int\limits_0^\xi \big(S(t,\xi,\xi,\xi) + T(t,\xi,\xi,\xi)\big) w_2\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\xi\right) \exp\left[-\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}t + \frac{b-a}{2}\xi\right)\right] dt + \\ &+ \frac{1}{4}\int\limits_0^\xi dt \int\limits_t^\xi \big(S_\xi(t,\xi,\xi,\xi) + T_\xi(t,\xi,\xi,\xi)\big) w_2\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\tau\right) \times \\ &\qquad \times \exp\left[-\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}t + \frac{b-a}{2}\tau\right)\right] d\tau, \end{aligned} \tag{20b}$$

$$F(\xi,\xi) = 2\psi_1\left(\frac{\xi}{2}\right) - \psi_1(0) + \int\limits_0^\xi dt \int\limits_t^\xi \Phi(t,\tau)(S(t,\tau,\xi,\xi) + T(t,\tau,\xi,\xi))d\tau, \tag{21a}$$

$$\begin{aligned} F_\xi(\xi,\xi) = \psi_1'\left(\frac{\xi}{2}\right) + \int\limits_0^\xi \Phi(t,\xi)(S(t,\xi,\xi,\xi) + T(t,\xi,\xi,\xi))dt + {} \\ &+ \int\limits_0^\xi dt \int\limits_t^\xi \Phi(t,\tau)(S_\xi(t,\xi,\xi,\xi) + T_\xi(t,\xi,\xi,\xi))d\tau. \end{aligned} \tag{21b}$$

В силу свойств класса принадлежности заданных функций и свойств функции Римана—Адамара (т.е. в силу свойств функций $S(t,\tau,\xi,\eta)$ и $T(t,\tau,\xi,\eta)$), из (20) и (21) заключаем, что $|M_\xi(\xi,\xi)| \leqslant \text{const}$. Следовательно, учитывая, что $T_{0x}(x,t)$ может иметь разрыв первого рода и правая часть уравнения непрерывна, решение интегрального уравнения (19) можем записать в виде

$$\nu(x) = \tau'(x) - M'(x) + \int\limits_0^x \Gamma_0(x,t)[M'(t) - \tau'(t)]dt, \tag{22}$$

где $\nu(x) \in C[0,1]$ и $\Gamma_0(x,t)$ — резольвента ядра $T_{0x}(x,t)$. Таким образом, мы нашли первое соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области D_2.

Чтобы получить второе соотношение между этими функциями, перепишем уравнение (1) при $y > 0$ в виде

$$L_1 u_1 = \omega_1(bx - ay) \exp\left(-\frac{c}{2ab}(bx + ay)\right), \tag{23}$$

где $\omega_1(bx - ay)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Далее, учитывая условия задачи, с учетом (2) и соотношения

$$ {}_cD^{\alpha}_{0y} u_1(0, y) = {}_cD^{\alpha}_{0y}\varphi_1(y) \quad \text{при } x \to +0$$

из (23) получаем

$$\omega_1(-ay) = \left[\varphi_3(y) - {}_cD^{\alpha}_{oy}\varphi_1(y) + a_1(0, y)u_x(0, y) + c_1(0, y)\varphi_1(y)\right] \exp\left(\frac{cy}{2b}\right).$$

Отсюда, учитывая неравенство $|u_x(0, y)| \leqslant \mathrm{const}$ и предполагая, что функция $a_1(0, y)$ стремится к нулю, получаем

$$\omega_1(bx) = \left[\varphi_3\left(-\frac{bx}{a}\right) - {}_cD^{\alpha}_{0\frac{-bx}{a}}\varphi_1\left(-\frac{bx}{a}\right)\right] \exp\left(-\frac{cx}{2a}\right) + c_1\left(0, -\frac{bx}{a}\right)\varphi_1\left(-\frac{bx}{a}\right) \exp\left(-\frac{cx}{2a}\right). \tag{24}$$

С другой стороны, переходя к пределу при $y \to +0$, из уравнения (23) находим второе соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области Ω_1:

$$\tau''(x) + a_1(x, 0)\tau'(x) + c_1(x, 0)\tau(x) - \nu(x) = \omega_1(bx) \exp\left(-\frac{cx}{2a}\right). \tag{25}$$

Подставляя (22) в уравнение (25), получаем

$$\tau''(x) + p(x)\tau'(x) + q(x)\tau(x) + \int_0^x \Gamma_0(x, t)\tau'(t)dt = f(x), \tag{26}$$

где $p(x) = a_1(x, 0) - 1$, $q(x) = c_1(x, 0)$,

$$f(x) = \left[\varphi_3\left(-\frac{bx}{a}\right) -_c D^{\alpha}_{0-\frac{bx}{a}}\varphi_1\left(-\frac{bx}{a}\right) + c_1\left(0, -\frac{bx}{a}\right)\varphi_1\left(-\frac{bx}{a}\right)\right] \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{cx}{a}\right) + \int_0^x \Gamma_0(x, t)M'(t)dt - M'(x).$$

Интегрируя уравнения (26) от 0 до x, с учетом начальных условий

$$\tau(0) = \varphi_1(0) = \psi_1(0), \quad \tau'(0) = \sqrt{2}\psi_2(0) - \varphi_1'(0) \tag{27}$$

получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\tau(x) - \int_0^x K_2(x, t)\tau(t)dt = \Phi_2(x), \tag{28}$$

где

$$K_2(x, t) = -p(t) + (x - t)(p'(t) - q(t) + \Gamma_0(t, t) - \int_t^x dt \int_t^z \Gamma_{0z}(z, t)dz,$$

$$\Phi_2(x) = \int_0^x (f(t) + \Gamma_0(t, 0)\varphi_1(0))(x - t)dt + (\sqrt{2}\psi_2(0) - \varphi_1'(0) - \varphi_1(0)p(0))x + \varphi_1(0),$$

причем $|K_2(x, t)| \leqslant \mathrm{const}$, $|\Phi_2(x)| \leqslant \mathrm{const}$.

Учитывая класс принадлежности ядра и правой части уравнения (28), решение уравнения (28) запишем в виде

$$\tau(x) = \Phi_2(x) + \int_0^x R_2(x, z)\Phi_2(z)dz, \tag{29}$$

где $\Gamma_2(x,t)$ — резольвента ядра $K_2(x,t)$. Таким образом, функция $\tau(x)$ однозначно определена.

После определения функции $\tau(x)$, таким же образом однозначно определим функцию $\nu(x)$ из (22). Следовательно, решение исследуемой задачи в области Ω_2 восстанавливается как решение Коши—Гурса.

Далее, для определения функции $u_1(x,y)$ в области Ω_1 воспользуемся решением первой краевой задачи для уравнения (23), решение которого имеет вид

$$u_1(x,y)=\int\limits_0^y G_\xi(x,y,0,\eta)\varphi_1(\eta)d\eta-\int\limits_0^y G_\xi(x,y,1,\eta)\varphi_2(\eta)d\eta+\int\limits_0^1 G_0(x-\xi,y)\tau(\xi)d\xi-$$
$$-\int\limits_0^y\int\limits_0^1 G(x,y,\xi,\eta)\Big(\omega_1(b\xi-a\eta)\exp\Big[-\frac{c}{2ab}(b\xi+a\eta)\Big]-$$
$$-a_1(\xi,\eta)u_{1\xi}(\xi,\eta)-c_1(\xi,\eta)u_1(\xi,\eta)\Big)d\xi d\eta, \quad (30)$$

где

$$G_0(x-\xi,y)=\frac{1}{(1-\alpha)}\int\limits_0^y \eta^{-\alpha}G_\xi(x,y,\xi,\eta)d\eta,$$

$$G(x,y,\xi,\eta)=\frac{(y-\eta)^{\alpha/2-1}}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e^{1,\alpha/2}_{1,\alpha/2}\left(-\frac{|x-\xi+2n|}{(y-\eta)^{\alpha/2}}\right)-e^{1,\alpha/2}_{1,\alpha/2}\left(-\frac{|x+\xi+2n|}{(y-\eta)^{\alpha/2}}\right)\right];$$

здесь

$$e^{1,\delta}_{1,\delta}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!(\delta-\delta n)} \quad (31)$$

— функция типа Райта (см. [4]),

$$u_1(x,y)=g(x,y)-\int\limits_0^y\int\limits_0^1\Big[(G(x,y,\xi,\eta)a_1(\xi,\eta))'_\xi-c_1(\xi,\eta)\Big]u_1(\xi,\eta)d\xi d\eta, \quad (32)$$

$$g(x,y)=\int\limits_0^y G_\xi(x,y,0,\eta)\varphi_1(\eta)d\eta-\int\limits_0^y G_\xi(x,y,1,\eta)\varphi_2(\eta)d\eta+$$
$$+\int\limits_0^1 G_0(x-\xi,y)\tau(\xi)d\xi-\int\limits_0^y\int\limits_0^1\omega_1(b\xi-a\eta)\exp\left[-\frac{c}{2ab}(b\xi+a\eta)\right]d\xi d\eta+$$
$$+\int\limits_0^y\Big[a_1(1,\eta)G(x,y,1,\eta)\varphi_2(\eta)-a_1(0,\eta)G(x,y,0,\eta)\varphi_1(\eta)\Big]d\eta. \quad (33)$$

Так как ядро и правая часть уравнения (32) непрерывно дифференцируемы, то оно допускает единственное решение в классе непрерывно дифференцируемых функций. Таким образом, доказана однозначная разрешимость задачи 1.

Пусть теперь $b=0$; тогда вместо систем уравнений (7) и (8) рассмотрим уравнения

$$L_1u=w_1(y)\exp\left(-\frac{c}{a}x\right),\quad L_2u=w_2(y)\exp\left(-\frac{c}{a}x\right),$$

причем учитываем, что канонический вид второго уравнения таков:

$$u_{2\xi\eta}+a_3(\xi,\eta)u_{2\xi}+b_3(\xi,\eta)u_{2\eta}+c_3(\xi,\eta)u_2=\frac{1}{4}w_2\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)\exp\left(-\frac{c(\xi+\eta)}{2a}\right). \quad (34)$$

Известно, что решение уравнения (34), удовлетворяющее условиям (11) и $(u_{2\xi}-u_{2\eta})\big|_{\eta=\xi}=\nu(\xi)$, имеет следующий вид (см. [1,5]):

$$u_2(\xi,\eta)=F(\xi,\eta)+ \\ +\int\limits_0^\xi T_0(\xi,\eta,t)\nu(t)dt+\frac{1}{4}\int\limits_0^\xi dt\int\limits_t^\xi S(t,\tau,\xi,\eta)w_2\left(\frac{t-\tau}{2}\right)\exp\left[-\frac{c(t+\tau)}{2a}\right]d\tau+ \\ +\frac{1}{4}\int\limits_0^\xi dt\int\limits_t^\eta T(t,\tau,\xi,\eta)w_2\left(\frac{t-\tau}{2}\right)\exp\left[-\frac{c(t+\tau)}{2a}\right]d\tau. \quad (35)$$

Как и выше, учитывая соотношения

$$\nu(0)=u_{2y}(0,0)=u_{1y}(0,0)=\varphi_1'(0),\quad \psi_1'(0)=\sqrt{2}\psi_2(0)-\varphi_1'(0)$$

и применяя второе условие (11), из (35) получим

$$\int\limits_0^\eta T(0,\tau;0,\eta)\omega_2\left(-\frac{\tau}{2}\right)\exp\left(-\frac{c\tau}{2a}\right)d\tau=2\sqrt{2}\psi_2\left(\frac{\eta}{2}\right)-2\psi_1'(0)- \\ -4\int\limits_0^\eta \Phi(0,\tau)T(0,\tau,0,\eta)d\tau-4\left[1-\int\limits_0^\eta a_3(0,\tau)T(0,\tau,0,\eta)d\tau\right]\varphi_1'(0). \quad (36)$$

Дифференцируя уравнения (36) по η и учитывая условие $T(0,\eta,0,\eta)=1$, приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$\omega_2\left(-\frac{\eta}{2}\right)+\int\limits_0^\eta K_3(\tau,\eta)\omega_2\left(-\frac{\tau}{2}\right)d\tau=g_3(\eta), \quad (37)$$

где

$$K_3(\tau,\eta)=T_\eta(0,\tau;0,\eta)\exp\left[\frac{c(\tau-\eta)}{2a}\right],$$

$$g_3(\eta)=\left\{\sqrt{2}\psi_2'\left(\frac{\eta}{2}\right)-4\Phi(0,\eta)-4\int\limits_0^\eta \Phi(0,\tau)T_\eta(0,\tau;0,\eta)d\tau+\right. \\ \left.+4\varphi_1'(0)\left[a_3(0,\eta)+\int\limits_0^\eta a_3(0,\tau)T_\eta(0,\tau,0,\eta)d\tau\right]\right\}\exp\left(\frac{c\eta}{2a}\right).$$

Аналогичными рассуждениями, учитывая неравенства $|\Phi(0,\eta)|\leqslant \mathrm{const}$ и $|T_\eta(t,\tau;s,\eta)|\leqslant \mathrm{const}$, можем записать $|K_3(\tau,\eta)|\leqslant \mathrm{const}$ и $|g_3(\eta)|\leqslant \mathrm{const}$. Следовательно, в силу теории интегральных уравнений Вольтерра, уравнение (37) имеет единственное решение, т.е. $\omega_2\left(\frac{\eta}{2}\right)$ однозначно определяется для всех $-\frac{1}{2}\leqslant\frac{\eta}{2}\leqslant 0$. Учитывая неравенства $-\frac{1}{2}\leqslant\frac{\xi-\eta}{2}\leqslant 0$ и подставляя значение $\omega_2\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)$ в (12), получаем решение $u_2(\xi,\eta)$ в виде

$$u_2(\xi,\eta)=M_1(\xi,\eta)+\int\limits_0^\xi T_0(\xi,\eta;t)\nu(t)dt,$$

где

$$M_1(\xi,\eta)=F(\xi,\eta)+\frac{1}{4}\int\limits_0^{\xi}dt\int\limits_t^{\xi}S(t,\tau,\xi,\eta)\exp\left[-\frac{c(t+\tau)}{2a}\right]w_2\left(\frac{t-\tau}{2}\right)d\tau+$$
$$+\frac{1}{4}\int\limits_0^{\xi}dt\int\limits_t^{\eta}T(t,\tau,\xi,\eta)\exp\left[-\frac{c(t+\tau)}{2a}\right]w_2\left(\frac{t-\tau}{2}\right)d\tau.$$

Далее, легко заметить, что первое соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области D_2, имеет такой же вид как (22), при этом $M(x,x)$ достаточно заменить на $M_1(x,x)$.

Чтобы получить второе соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ в параболической части области, рассмотрим уравнение
$$L_1u_1=\omega_1(y)\exp\left(-\frac{c}{a}x\right), \tag{38}$$
где $\omega_1(y)$ — произвольная непрерывная функция. В силу свойств класса принадлежности задачи 1 и (2), с учетом соотношения ${}_cD^{\alpha}_{0y}u_1(0,y)={}_cD^{\alpha}_{0y}\varphi_1(y)$ при $x\to+0$ из (38) следует, что
$$\omega_1(y)=\Big[\varphi_3(y)-{}_cD^{\alpha}_{oy}\varphi_1(y)+c_1(0,y)\varphi_1(y)\Big]. \tag{39}$$
С другой стороны, переходя в этом уравнении к пределу при $y\to+0$, получаем второе соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области Ω_1:
$$\tau''(x)+a_1(x,0)\tau'(x)+c_1(x,0)\tau(x)-\nu(x)=\omega_1(0)\exp\left(-\frac{cx}{a}\right). \tag{40}$$
Подставляя (39) в (40), получаем
$$\tau''(x)+p(x)\tau'(x)+q(x)\tau(x)+\int\limits_0^x\Gamma_0(x,t)\tau'(t)dt=\omega_1(0)\exp\left(-\frac{cx}{a}\right)+m(x), \tag{41}$$
где
$$p(x)=a_1(x,0)-1,\quad q(x)=c_1(x,0),\quad m(x)=\int\limits_0^x\Gamma_0(x,t)M_1'(t)dt-M_1'(x).$$
Интегрируя уравнения (41) от 0 до x, с учетом начальных условий (27) получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода
$$\tau(x)-\int\limits_0^x K_4(x,t)\tau(t)dt=\Phi_4(x), \tag{42}$$
где
$$K_4(x,t)=-p(t)+(x-t)\Big(p'(t)-q(t)+\Gamma_0(t,t)\Big)-\int\limits_t^x dt\int\limits_t^z\Gamma_{0z}(z,t)dz,$$

$$\Phi_4(x)=\int\limits_0^x\left(\omega_1(0)\exp\left(-\frac{ct}{a}\right)+m(t)+\Gamma_0(t,0)\varphi_1(0)\right)(x-t)dt+$$
$$+\Big(\sqrt{2}\psi_2(0)-\varphi_1'(0)-\varphi_1(0)p(0)\Big)x+\varphi_1(0),$$
причем $|K_4(x,t)|\leqslant\mathrm{const}$, $|\Phi_4(x)|\leqslant\mathrm{const}$. Учитывая класс принадлежности ядра и правой части уравнения (42), решение уравнения (42) запишем в виде
$$\tau(x)=\Phi_4(x)+\int\limits_0^x R_4(x,z)\Phi_4(z)dz, \tag{43}$$
где $\Gamma_4(x,t)$ — резольвента ядра $K_4(x,t)$. Таким образом, функция $\tau(x)$ однозначно определена.

Мы уже определили функцию $\tau(x)$. Таким же образом однозначно определяем функцию $\nu(x)$ из (22). Следовательно, решение исследуемой задачи в области Ω_2 восстанавливается как решение Коши—Гурса.

Далее, для определения функции $u_1(x,y)$ в области Ω_1 воспользуемся решением первой краевой задачи для уравнения (38), которое имеет вид

$$u_1(x,y) = \int\limits_0^y G_\xi(x,y,0,\eta)\varphi_1(\eta)d\eta - \int\limits_0^y G_\xi(x,y,1,\eta)\varphi_2(\eta)d\eta + \int\limits_0^1 G_0(x-\xi,y)\tau(\xi)d\xi -$$
$$- \int\limits_0^y \int\limits_0^1 G(x,y,\xi,\eta)\left(\omega_1(\eta)\exp\left[-\frac{c}{a}\xi\right] - a_1(\xi,\eta)u_{1\xi}(\xi,\eta) - c_1(\xi,\eta)u_1(\xi,\eta)\right)d\xi d\eta, \quad (44)$$

где

$$G_0(x-\xi,y) = \frac{1}{(1-\alpha)}\int\limits_0^y \eta^{-\alpha}G_\xi(x,y,\xi,\eta)d\eta,$$
$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{(y-\eta)^{\alpha/2-1}}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e^{1,\alpha/2}_{1,\alpha/2}\left(-\frac{|x-\xi+2n|}{(y-\eta)^{\alpha/2}}\right) - e^{1,\alpha/2}_{1,\alpha/2}\left(-\frac{|x+\xi+2n|}{(y-\eta)^{\alpha/2}}\right)\right];$$

здесь $e^{1,\delta}_{1,\delta}$ — функция типа Райта (см. (31));

$$u_1(x,y) = g_1(x,y) - \int\limits_0^y\int\limits_0^1 \left[(G(x,y,\xi,\eta)a_1(\xi,\eta))'_\xi - c_1(\xi,\eta)\right]u_1(\xi,\eta)d\xi d\eta, \quad (45)$$

$$g_1(x,y) = \int\limits_0^y G_\xi(x,y,0,\eta)\varphi_1(\eta)d\eta - \int\limits_0^y G_\xi(x,y,1,\eta)\varphi_2(\eta)d\eta + \int\limits_0^1 G_0(x-\xi,y)\tau(\xi)d\xi -$$
$$- \int\limits_0^y\int\limits_0^1 \omega_1(\eta)\exp\left(-\frac{c}{a}\xi\right)d\xi d\eta + \int\limits_0^y \left[a_1(1,\eta)G(x,y,1,\eta)\varphi_2(\eta) - a_1(0,\eta)G(x,y,0,\eta)\varphi_1(\eta)\right]d\eta.$$

Так как ядро и правая часть уравнения (45) непрерывно дифференцируемы, то оно допускает единственное решение в классе непрерывно дифференцируемых функций. Таким образом, доказана однозначная разрешимость задачи. □

Аналогично исследуется следующая задача.

Задача 2. Требуется найти функцию $u(x,y)$ из класса

$$W = \left\{u(x,y):\ u(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\overline{\Omega}_2),\ u_{xx} \in C(\Omega_1 \cup BB_0)\right\},$$

удовлетворяющую всем условиям задачи 1, но вместо условий (4) и (5) требуем выполнения условий

$$u|_{BC} = \psi_3(x), \qquad \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{BC} = \psi_4(x), \quad \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1,$$

а условия $0 < b/a \leqslant 1$ требуем выполнения условия $-1 < b/a < 0$, где $\psi_3(x)$, $\psi_4(x)$ — заданные функции.

Теорема 2. *При выполнении условий*

$$\varphi_1(y) \in C^1[0,h] \cap C^2(0,h), \quad \varphi_2(y) \in C[0,h], \quad \varphi_3(y) \in C[0,h] \cap C^1[0,h),$$

$$\psi_3(x) \in C\left[\frac{1}{2},1\right] \cap C^1\left(\frac{1}{2},1\right], \quad \psi_4(x) \in C\left[\frac{1}{2},1\right] \cap C^1\left(\frac{1}{2},1\right)$$

решение задачи 2 существует и единственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Джураев Т. Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. — Ташкент: Фан, 1979.
2. *Джураев Т. Д, Сопуев А., Мамажонов М.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. — Ташкент: Фан, 1986.
3. *Мамажанов М., Холмуратов Д.* Краевые задачи для уравнений параболического-гиперболического типа третьего порядка// Диффер. уравн. — 1989. — *25*, № 2. — С. 271–275.
4. *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. — М.: Наука, 2005.
5. *Пулькин С. П.* Интегральное представление решения задачи Коши—Гурса// Уч. зап. Куйбышев. гос. пед. ин-та. Физ.-мат. науки. — 1959. — № 29. — С. 25–40.
6. *Салахитдинов М. С.* Уравнения смешанно-составного типа. — Ташкент: Фан, 1974.
7. *Abdullaev O. Kh., Matchanova A. A.* Non-local boundary-value problems for a loaded parabolic-hyperbolic type equation of third order involving Caputo operator// Bull. Inst. Math. — 2018.. — № 5. — P. 36–42.
8. *Islomov B., Baltaeva U.* Boudanry-value problems for a third-order loaded parabolic-hyperbolic type equation with variable coefficients// Electron. J. Differ. Equations. — 2015. — 221.
9. *Kadirkulov B. J.* Boundary problems for mixed parabolic-hyperbolic equations with two lines of changing type and fractional derivative// Electron. J. Differ. Equations. — 2014. — 57.
10. *Karimov E. T., Akhatov J.* A boundary problem with integral gluing condition for a parabolic-hyperbolic equation involving the Caputo fractional derivative// Electron. J. Differ. Equations. — 2014. — 14.
11. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — Amsterdam: North-Holland, 2006.
12. *Praveen A., Abdullaev O. Kh.* A nonlocal problem with integral gluing condition for a third-order loaded equation with parabolic-hyperbolic operator involving fractional derivatives// Math. Meth. Appl. Sci. — 2019. — *43*. — P. 3716–3726.
13. *Sadarangani K., Abdullaev O. Kh.* A non-local problem with discontinuous matching condition for loaded mixed-type equation involving the Caputo fractional derivative// Adv. Difference Equations. — 2016. — 241.
14. *Yuldashev T. K., Islomov B. I., Alikulov E. K.* Boundary-value problems for loaded third-order parabolic-hyperbolic equations in infinite three-dimensional domains// Lobachevskii J. Math. — 2020. — *41*, № 5. — P. 926–944.

Абдуллаев Обиджон Хайруллаевич
Институт математики имени В. И. Романовского
Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `obidjon.mth@gmail.com`

Матчанова Айгул Азатбаевна
Институт ионно-плазменных и лазерных технологий имени У. А. Арифова
Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `oygul87-87@mail.ru`