ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 205 (2022). С. 16–21
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-205-16-21

УДК 519.17

# АСИМПТОТИКА ЧИСЛА НЕЗАВИСИМОСТИ СЛУЧАЙНОГО ПОДГРАФА ГРАФА $G(n, r, <s)$

© 2022 г. **А. М. РАЙГОРОДСКИЙ**

Аннотация. В работе рассматривается вероятностная версия классической задачи экстремальной комбинаторики, изучение которой было начато в середине прошлого века П. Эрдешем, Ч. Ко и Р. Радо.

***Ключевые слова***: случайный граф, экстремальная система множеств, гиперграф.

# ASYMPTOTICS OF THE INDEPENDENCE NUMBER OF A RANDOM SUBGRAPH OF THE GRAPH $G(n, r, <s)$

© 2022 **A. M. RAIGORODSKY**

Abstract. In this paper, we discuss the probabilistic version of the classical problem of extremal combinatorics stated appeared in the middle of the 20th century by P. Erdős, C. Ko, and R. Rado.

***Keywords and phrases***: random graph, extremal system of sets, hypergraph.

***AMS Subject Classification***: 05C80

**Теорема 1** (П. Эрдеш, Ч. Ко, Р. Радо, см. [12]). *Пусть даны натуральные числа $r$ и $s$, $s < r$. Пусть $\mathcal{R}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ — множество из $n$ элементов. Обозначим $m(n, r, s)$ максимальную мощность такой совокупности $r$-элементных подмножеств множества $\mathcal{R}_n$, что любые два подмножества в этой совокупности имеют не менее $s$ общих элементов (такая совокупность называется $s$-пересекающейся). Тогда найдется такое $n_0(r, s)$, что при всех $n \geqslant n_0(r, s)$ выполнено $m(n, r, s) = C_{n-s}^{r-s}$.*

Отметим, что оценка $m(n, r, s) \geqslant C_{n-s}^{r-s}$ практически очевидна: достаточно зафиксировать какие-либо $s$ элементов $v_1, v_2, \ldots, v_s \in \mathcal{R}_n$ и рассмотреть все $r$-элементные подмножества, которые их содержат. В мировой литературе такую «тривиальную» $s$-пересекающуюся конструкцию принято называть *звездой*.

Ввиду своей исключительной значимости, результат теоремы 1 неоднократно обобщался и уточнялся. В частности, был получен ряд утверждений об устойчивости результата Эрдеша—Ко—Радо. Ярким примером является в первую очередь так называемая граница Франкла, представленная последним в следующей формулировке.

**Теорема 2** (П. Франкл, см. [13]). *Пусть даны натуральные числа $r$ и $s$, $s < r$. Пусть $\mathcal{M}$ — произвольная $s$-пересекающаяся совокупность $r$-элементных подмножеств множества $\mathcal{R}_n$. Тогда найдется такое $n_0(r, s)$, что при всех $n \geqslant n_0(r, s)$ либо $\mathcal{M}$ — это часть некоторой звезды,*

Настоящая работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 16-11-10014).

*либо мощность $\mathcal{M}$ не превосходит величины*

$$(s+2)C_{n-s-2}^{r-s-1} + C_{n-s-2}^{r-s-2} = \Big|\Big\{V:\ |V| = r,\ \big|\{1, \ldots, s+2\} \cap V\big| \geqslant s+1\Big\}B\Big| \quad \text{при } r \leqslant 2s+1,$$

$$\sum_{i=1}^{r-s} C_{r-s+1}^{i} C_{n-r-1}^{r-s-i} + s = \Big|\Big\{V:\ |V| = r,\ \{1, \ldots, s\} \subset V,\ V \cap \{1+s, \ldots, 1+r\} \neq \emptyset\Big\} \cup$$
$$\cup \Big\{\{1, \ldots, s+1\} \setminus \{i\}:\ i \in \{1, \ldots, s\}\Big\}\Big| \quad \text{при } r > 2s+1.$$

Отметим, что наименьшее $n_0(r, s)$ было определено Франклом и Уилсоном для любых $r, s$:

$$n_0(r, s) = (r-s+1)(s+1).$$

О современном состоянии исследований в области см. [15]. Мы же перейдем к версии устойчивости, которая изучалась в серии недавних работ (см. [16]— [14]).

Рассмотрим граф $G(n, r, <s) = (V(n, r), E(n, r, s))$:

$$V(n, r) = \Big\{A \subset \{1, 2, \ldots, n\}:\ |A| = r\Big\}, \quad E(n, r, s) = \Big\{\{A, B\}:\ |A \cap B| < s\Big\}.$$

Напомним, что *числом независимости* $\alpha(G)$ графа $G$ называют размер максимального множества его вершин, попарно не соединенных ребрами (сами такие множества называются *независимыми*). Очевидно, что $\alpha(G(n, r, <s)) = m(n, r, s)$, а любая $s$-пересекающаяся совокупность $r$-элементных множеств взаимно однозначно отвечает некоторому независимому множеству вершин графа $G(n, r, <s)$. Графы такого типа активно изучаются в теории кодирования, в теории Рамсея, в теории гиперграфов, в комбинаторной геометрии (см. [1–4, 7–11, 17]).

Введем понятие случайного подграфа графа $G(n, r, <s)$. Пусть $p \in [0, 1]$. Тогда $G_p(n, r, <s)$ — это случайный элемент со значениями во множестве всех остовных подграфов $G = (V(n, r), E)$ графа $G(n, r, <s)$ и с биномиальным распределением:

$$\mathbb{P}\big(G_p(n, r, <s) = G\big) = p^{|E|}(1-p)^{|E(n,r,s)| - |E|}.$$

М. М. Пядёркин доказал следующую теорему об устойчивости.

**Теорема 3** (см. [5]). *Для любых фиксированных $r$ и $s$ имеем*

$$\mathbb{P}\big(\alpha(G_{1/2}(n, r, <s)) = C_{n-s}^{r-s}\big) \to 1, \quad n \to \infty.$$

Используя технику доказательства теоремы 3 (см. [5]), докажем аналогичное утверждение для непостоянных параметров $r = r(n)$ и $s = s(n)$.

**Теорема 4.** *Утверждение теоремы 3 верно для $r = r(n) \to \infty$, $s = s(n) \to \infty$ при условии, что*

$$r = o\left(\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{1/3}\right), \quad s = o(r).$$

*Доказательство.* Для доказательства достаточно обосновать стремление к нулю вероятности существования в случайном графе $G_{1/2}(n, r, <s)$ независимого множества размера $M+1$, где

$$M = \alpha\big(G(n, r, <s)\big) = C_{n-s}^{r-s} = (1+o(1))\frac{n^{r-s}}{(r-s)!}.$$

Таким образом, нас интересует величина

$$\mathbb{P}\Big[\exists A \subset V(n, r):\ |A| = M+1,\ A \text{ независимо в } G_{1/2}(n, r, <s)\Big].$$

Введем в рассмотрение величину

$$M'(n, r, s) = \frac{1}{4}\frac{n^{r-s}}{(r-s)!r\ln n}.$$

Для каждого из множеств $A$ мы можем определить размер максимального подмножества в множестве $A$, являющегося независимым в графе $G(n, r, <s)$; обозначим этот размер $\alpha(A)$.

Разобьем исследуемое событие на три части:

$$\mathbb{P}\Big[\exists A \subset V(n,r):\ |A| = M+1,\ A \text{ независимо в } G_{1/2}(n,r,{<}s)\Big] =$$
$$= \mathbb{P}\Big[\exists A:\ \ldots,\ \alpha(A) \leqslant M'\Big] + \mathbb{P}\Big[\exists A:\ \ldots,\ M' < \alpha(A) \leqslant M - M'\Big] +$$
$$+ \mathbb{P}\Big[\exists A:\ \ldots,\ M - M' < \alpha(A)\Big]. \quad (1)$$

Докажем, что каждое слагаемое стремится к нулю.

*1. Оценка первого слагаемого в выражении* (1) Прежде всего,

$$\mathbb{P}\Big[\exists A:\ \ldots,\ \alpha(A) \leqslant M'\Big] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{\substack{A:|A|=M+1,\\ \alpha(A)\leqslant M'}} \big\{A \text{ независимо в } G_{1/2}(n,r,{<}s)\big\}\right] \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\substack{A:|A|=M+1,\\ \alpha(A)\leqslant M'}} \mathbb{P}\Big[A \text{ независимо в } G_{1/2}(n,r,{<}s)\Big].$$

Вероятность того, что множество $A$ независимо, равна $2^{-e(A)}$, где $e(A)$ — число ребер графа $G(n,r,{<}s)$, оба конца которых принадлежат множеству $A$. Число ребер внутри множества $A$ можно оценить с помощью теоремы Турана:

$$e(A) \geqslant (1+o(1))\frac{|A|^2}{2\alpha(A)} \geqslant (1+o(1))\frac{(M+1)^2}{2M'} \geqslant$$
$$\geqslant (1+o(1))\frac{\left(\dfrac{n^{r-s}}{(r-s)!}\right)^2}{2\left(\dfrac{1}{4}\dfrac{n^{r-s}}{(r-s)!\,r\ln n}\right)} = (1+o(1))2\frac{n^{r-s}r\ln n}{(r-s)!}.$$

Таким образом,

$$\mathbb{P}\Big[\exists A:\ \ldots,\ \alpha(A) \leqslant M'\Big] \leqslant \sum_{\substack{A:|A|=M+1,\\ \alpha(A)\leqslant M'}} \mathbb{P}\Big[A \text{ независимо в } G_{1/2}(n,r,{<}s)\Big] \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\substack{A:\ |A|=M+1,\\ \alpha(A)\leqslant M'}} 2^{-e(A)} \leqslant \sum_{\substack{A:\ |A|=M+1,\\ \alpha(A)\leqslant M'}} 2^{-(1+o(1))2\frac{n^{r-s}r\ln n}{(r-s)!}} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{A:\ |A|=M+1} 2^{-(1+o(1))2\frac{n^{r-s}r\ln n}{(r-s)!}} = C_{C_n^r}^{M+1} 2^{-(1+o(1))2\frac{n^{r-s}r\ln n}{(r-s)!}} \leqslant n^{r(M+1)}2^{-(1+o(1))2\frac{n^{r-s}r\ln n}{(r-s)!}} =$$
$$= 2^{(1+o(1))\frac{n^{r-s}r\ln n\frac{1}{\ln 2}}{(r-s)!} - (1+o(1))2\frac{n^{r-s}r\ln n}{(r-s)!}} \to 0, \quad n\to\infty,$$

поскольку $1/\ln 2 < 2$.

*2. Оценка второго слагаемого в выражении* (1) Рассмотрим максимальное по мощности независимое в $G(n,r,{<}s)$ подмножество $B$ множества $A$. Докажем от противного, что оно является частью звезды.

Из теоремы 2 известно, что если $B$ не является частью звезды, то

$$|B| < \Big|\Big\{V:\ |V| = r,\ \{1,\ldots,s\}\subset V,\ V\cap\{1+s,\ldots,1+r\}\neq\emptyset\Big\}\cup$$
$$\cup\Big\{\{1,\ldots,s+1\}\setminus\{i\}:\ i\in\{1,\ldots,s\}\Big\}\Big| \leqslant rC_{n-s-1}^{r-s-1}.$$

Последнее неравенство верно, поскольку $\{1,\ldots,s\}$ — центр, еще один элемент выбираем из $\{1+s,\ldots,1+r\}$, чтобы гарантировать пересечение, и остальные $r-s-1$ элементов выбираем из оставшихся $n-s-1$ элементов.

Покажем, что $rC_{n-s-1}^{r-s-1}=o(M')$:

$$\frac{rC_{n-r-1}^{r-s-1}}{\dfrac{1}{4}\dfrac{n^{r-s}}{(r-s)!r\ln n}}=(1+o(1))\frac{4n^{r-s-1}(r-s)!r^2\ln n}{n^{r-s}(r-s-1)!}=(1+o(1))\frac{4r^3\ln n}{n}\to 0,\quad n\to\infty.$$

Таким образом, установлено, что $M'$ асимптотически сильно больше границы Франкла, а поскольку в текущей ситуации $|B|=\alpha(A)\geqslant M'$, $B$ действительно является частью звезды.

Теперь рассмотрим произвольную вершину $x\in A\setminus B$. Обозначим через $a\geqslant 1$ количество элементов центра звезды, которые не принадлежат вершине $x$. Тогда количество вершин из $B$, которые не соединены с $x$ в графе $G(n,r,<s)$, оценивается сверху величиной

$$C_{r-s+a}^{a}C_{n-s-a}^{r-s-a}.$$

Здесь $r-s+a$ — количество элементов в разности между вершиной $x$ и центром звезды. Таким образом, минимально возможное количество вершин множества $B$, которые с вершиной $x$ соединены ребрами, есть

$$M'-C_{r-s+a}^{a}C_{n-r-a}^{r-s-a}.$$

Покажем, что эта величина асимптотически равна $M'$:

$$\frac{C_{r-s+a}^{a}C_{n-r-a}^{r-s-a}}{M'}\leqslant(1+o(1))\frac{\dfrac{r^a n^{r-s-a}}{(r-s-a)!}}{\dfrac{1}{4}\dfrac{n^{r-s}}{(r-s)!r\ln n}}\leqslant(1+o(1))\frac{r^{2a}n^{r-s-a}}{(r-s)!\dfrac{1}{4}\dfrac{n^{r-s}}{(r-s)!r\ln n}}=$$

$$=(1+o(1))4\frac{r^{2a}}{n^a}r\ln n<(1+o(1))4\left(\frac{r^3\ln n}{n}\right)^a\to 0,\quad n\to\infty.$$

Заметим, что

$$|A\setminus B|\geqslant M+1-\alpha(A)\geqslant M+1-(M-M')>M'.$$

Поэтому число ребер внутри множества $A$ оценивается следующим образом:

$$e(A)\geqslant(1+o(1))(M')^2.$$

Имеем:

$$\mathbb{P}\Big[\exists A:\ \ldots,\ M'\leqslant\alpha(A)\leqslant M-M'\Big]\leqslant\sum_{A:M'\leqslant\alpha(A)\leqslant M-M'}\mathbb{P}\Big[A \text{ независимо в } G_{1/2}(n,r,<s)\Big]\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{A:M'\leqslant\alpha(A)\leqslant M-M'}2^{-e(A)}\leqslant C_{C_n^r}^{M+1}2^{-(1+o(1))\left(\frac{1}{4}\frac{n^{r-s}}{(r-s)!r\ln n}\right)^2}\leqslant n^{r(M+1)}2^{-(1+o(1))\left(\frac{1}{4}\frac{n^{r-s}}{(r-s)!r\ln n}\right)^2}=$$

$$=2^{(1+o(1))\frac{n^{r-s}r\ln n\frac{1}{\ln 2}}{(r-s)!}-(1+o(1))\frac{1}{16}\frac{n^{2(r-s)}}{((r-s)!)^2r^2(\ln n)^2}}\to 0,\quad n\to\infty.$$

Стремление последнего выражения к нулю имеет место, поскольку в показателе экспоненты первое слагаемое (**I**) бесконечно мало по сравнению со вторым (**II**) при достаточно больших $n$:

$$\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{II}}=(1+o(1))\frac{16}{\ln 2}\frac{((r-s)!)r^3(\ln n)^3}{n^{r-s}}<(1+o(1))\frac{16}{\ln 2}r^3(\ln n)^3\left(\frac{r-s}{n}\right)^{r-s}<$$

$$<(1+o(1))\frac{16}{\ln 2}(r\ln n)^3\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{r-s}\to 0,\quad n\to\infty.$$

*3.Оценка третьего слагаемого в выражении* (1) Пусть $B$ обозначает любое из максимальных независимых в $G(n,r,<s)$ подмножеств множества $A$. Видно, что существование независимого в $G_{1/2}(n,r,<s)$ множества $A$ влечет существование независимого в $G(n,r,<s)$ множества $B$, $|B| > M - M'$, и вершины $u$, которая в случайном графе $G_{1/2}(n,r,<s)$ не соединена с вершинами из $B$, т.е. имеют место следующие неравенства:

$$\mathbb{P}\Big[\exists A \subset V(n,r):\ |A| = M+1,\ A \text{ независимо в } G_{1/2}(n,r,<s),\ M - M' < \alpha(A)\Big] \leqslant$$

$$\leqslant \mathbb{P}\Big[\exists B \subset V(n,r),\ \exists u \in V(n,r):\ |B| > M - M',\ B \text{ независимо в } G(n,r,<s),$$

$$u \text{ не соединена ни с одной из вершин } B \text{ в } G_{1/2}(n,r,<s)\Big] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{B,\mathbf{u}} \ldots\right] \leqslant \sum_{B,\mathbf{u}} \mathbb{P}\big[\ldots\big].$$

Оценим число слагаемых в сумме при больших $n$:

$$C_n^r C_n^s \sum_{i=0}^{M'-1} C_M^i \leqslant n^{r+s} M' \left(\frac{eM}{M'}\right)^{M'} \leqslant n^{r+s} \frac{1}{4} \frac{n^{r-s}}{(r-s)!r\ln n} \left((1+o(1))4er\ln n\right)^{\frac{1}{4}\frac{n^{r-s}}{(r-s)!r\ln n}} \leqslant$$

$$\leqslant n^{r+s} \frac{1}{4} \frac{n^{r-s}}{(r-s)!r\ln n} (5er\ln n)^{\frac{1}{4}\frac{n^{r-s}}{(r-s)!r\ln n}} \leqslant n^{2r} (5er\ln n)^{\frac{1}{4}\frac{n^{r-s}}{(r-s)!r\ln n}} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{\frac{1}{\ln 2}\left(2r\ln n + (\ln 5 + 1 + \ln r + \ln\ln n)\frac{1}{4}\frac{n^{r-s}}{(r-s)!r\ln n}\right)}.$$

Таким образом, искомая вероятность не превосходит величины

$$\mathbb{P}\Big[\exists A:\ \ldots,\ M - M' \leqslant \alpha(A)\Big] \leqslant \sum_{A: M - M' \leqslant \alpha(A)} \mathbb{P}\Big[A \text{ независимо в } G_{1/2}(n,r,<s)\Big] \leqslant$$

$$\leqslant 2^{(1+o(1))\frac{1}{\ln 2}\left(2r\ln n + (\ln 5 + 1 + \ln r + \ln\ln n)\frac{1}{4}\frac{n^{r-s}}{(r-s)!r\ln n}\right) - (1+o(1))\frac{n^{r-s}}{(r-s)!}} \to 0, \quad n \to \infty,$$

поскольку

$$\frac{\ln r}{r\ln n} \to 0, \quad \frac{\ln\ln n}{r\ln n} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Теорема доказана. □

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Бобу А. В., Куприянов А. Э., Райгородский А. М.* Об одном обобщении кнезеровских графов// Мат. заметки. — 2020. — *107*, № 3. — С. 351–365.
2. *Ипатов М. М., Кошелев М. М., Райгородский А. М.* Модулярность некоторых дистанционных графов// Докл. РАН. — 2020. — *490*. — С. 71–73.
3. *Пушняков Ф. А., Райгородский А. М.* Оценка числа ребер в особых подграфах некоторого дистанционного графа// Мат. заметки. — 2020. — *107*, № 2. — С. 286–298.
4. *Пушняков Ф. А., Райгородский А. М.* Оценка числа ребер в подграфах графов Джонсона// Докл. РАН. — 2021. — *499*, № 1. — С. 40–43.
5. *Пядёркин М. М.* Об устойчивости в теореме Эрдёша—Ко—Радо// Докл. РАН. — 2015. — *462*, № 2. — С. 144–147.
6. *Пядёркин М. М.* О пороговой вероятности для устойчивости независимых множеств в дистанционном графе// Мат. заметки. — 2019. — *106*, № 2. — С. 280–294.
7. *Райгородский А. М., Кошелев М. М.* Новые оценки клико-хроматических чисел графов Джонсона// Докл. РАН. — 2020). — *490*. — С. 78–80.
8. *Райгородский А. М., Черкашин Д. Д.* 75// Усп. мат. наук. — 2020. — № 1. — С. 95–154.
9. *Райгородский А. М., Шишунов Е. Д.* О числах независимости некоторых дистанционных графов с вершинами в $\{-1,0,1\}^n$// Докл. РАН. — 2019. — *485*, № 3. — С. 269–271.
10. *Райгородский А. М., Шишунов Е. Д.* О числах независимости дистанционных графов с вершинами в $\{-1,0,1\}^n$// Докл. РАН. — 2019. — *488*, № 5. — С. 486–487.

11. *Balogh J., Cherkashin D., Kiselev S.* Coloring general Kneser graphs and hypergraphs via high-discrepancy hypergraphs// Eur. J. Combin. — 2019. — *79.* — P. 228–236.
12. *Erdős P., Ko C., Rado R.* Intersection theorems for systems of finite sets// Quart. J. Math. — 1961. — *12*, № 1. — P. 313—320.
13. *Frankl P.* On intersecting families of finite sets// J. Combin. Theory Ser. A — 1978. — *24.* — P. 146–161.
14. *Kiselev S., Kupavskii A.* Sharp bounds for the chromatic number of random Kneser graphs/ `arXiv: 1810.01161 [math.CO]`.
15. *Kupavskii A.* Degree versions of theorems on intersecting families via stability// J. Combin. Theory Ser. A. — 2019. — *168.* — P. 272–287.
16. *Pyaderkin M. M.* On the chromatic number of random subgraphs of a certain distance graph// Discr. Appl. Math. — 2019. — *267.* — P. 209–214.
17. *Raigorodskii A. M., Koshelev M. M.* New bounds on clique-chromatic numbers of Johnson graphs// Discr. Appl. Math. — 2020. — *283.* — P. 724–729.


Райгородский Андрей Михайлович
Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет);
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;
Кавказский математический центр Адыгейского государственного университета, Майкоп;
Бурятский государственный университет, Улан-Удэ
E-mail: `mraigor@ya.ru`