ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 205 (2022). С. 55–94
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-205-55-94

УДК 517, 531.01

СИСТЕМЫ С ЧЕТЫРЬМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ С ДИССИПАЦИЕЙ: АНАЛИЗ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ

© 2022 г. М. В. ШАМОЛИН

Аннотация. Работа является обзором по вопросам интегрируемости систем с четырьмя степенями свободы, фазовые пространства которых — касательные расслоения четырехмерных гладких многообразия. Подробно изложена порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил; затем рассмотрены общие динамические системы на касательном расслоении к четырехмерной сфере; в заключение рассмотрены касательные расслоения к достаточно обширному классу гладких многообразий. Доказаны теоремы о достаточных условиях интегрируемости рассматриваемых динамических систем в классе трансцендентных функций.

Ключевые слова: динамическая система, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

SYSTEMS WITH FOUR DEGREES OF FREEDOM WITH DISSIPATION: ANALYSIS AND INTEGRABILITY

© 2022 M. V. SHAMOLIN

Abstract. This paper is a survey on integrable systems with four degrees of freedom whose phase spaces are tangent bundles of four-dimensional smooth manifolds. First, we discuss in detail the original problem from the dynamics of a multidimensional rigid body in a nonconservative force field; then we consider general dynamical systems on the tangent bundles of a sufficiently large class of smooth manifolds and prove sufficient conditions for the integrability of the dynamical systems considered in the class of transcendental.

Keywords and phrases: dynamical system, integrability, transcendental first integral.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

СОДЕРЖАНИЕ

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00016).

Введение. Данная работа является в некотором смысле обзорной по проблеме интегрируемости неконсервативных систем с четырьмя степенями свободы. Если конфигурационное многообразие системы — гладкое четырехмерное многообразие, то касательное (кокасательное) его расслоение имеет естественную структуру фазового пространства системы, увеличивая вдвое количество фазовых переменных.

Поскольку мы имеем дело с неконсервативными системами, а именно, с системами, в которых в определенном роде присутствует так называемая диссипация переменного знака (в одних областях фазового пространства присутствует «собственно» диссипация — некое рассеяние полной энергии, которая не сохраняется, а в других — подкачка энергии, т.е. формально — «рассеяние» с противоположным знаком), то ни о каком полном списке даже непрерывных (автономных) первых интегралов не может идти речи (см. [41, 67, 68]).

Поэтому данная работа состоит из трех более крупных разделов. Сначала проводится достаточно подробно анализ некоторой естественной порождающей задачи из динамики пятимерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил, при этом в системе присутствует также гладкое управление. При естественных предположениях данная задача редуцируется к динамическим системам на касательном расслоении четырехмерной сферы и обладает полным набором, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечные комбинации элементарных функций. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле теории функций комплексного переменного, когда у функции имеются существенно особые точки (см. также [6, 30, 34]).

Во втором разделе рассмотрены более общие динамические системы на касательном расслоении к четырехмерной сфере. Данные системы обобщают системы, рассмотренные ранее в предыдущем разделе. При этом системы более общего вида включают также и классическую задачу о движении точки по четырехмерной сфере, где при некоторых условиях также получены полные наборы, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов (см. также [54, 56]).

В заключительном разделе рассмотрены касательные расслоения к достаточно обширным классам гладких четырехмерных многообразий и также предъявлены достаточные условия интегрируемости.

1. Порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил

1. Динамическая часть уравнений движения. Рассмотрим движение однородного динамически симметричного пятимерного твердого тела, граница которого является кусочно-гладкой четырехмерной поверхностью. В частности, часть этой поверхности может иметь форму четырехмерного диска, являющегося многомерным «передним торцом», взаимодействующим со средой, заполняющей пятимерное пространство, в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности (см. также [14, 19, 24]).

Пусть $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ — (обобщенные) сферические координаты вектора скорости некоторой характерной точки D твердого тела (в частности, D — центр четырехмерного диска, лежащий на оси динамической симметрии тела), $\Omega \in \mathrm{so}(5)$ — тензор угловой скорости тела. При этом $Dx_1 \ldots x_5$ — такая система координат, связанная с телом, что ось динамической симметрии CD совпадает с осью Dx_1 (C — центр масс), а оси Dx_2, Dx_3, Dx_4, Dx_5 лежат в гиперплоскости диска, I_1, $I_2 = I_3 = I_4 = I_5$, m — главные моменты инерции тела в рассматриваемых осях и масса тела.

Примем следующие разложения в проекциях на оси системы координат $Dx_1 \ldots x_5$:

$$\mathbf{DC} = \{-\sigma, 0, 0, 0, 0\}, \quad \mathbf{v}_D = v\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \tag{1.1}$$

где

$$\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\beta_1 \\ \sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 \\ \sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 \\ \sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

— единичный вектор по оси вектора $\mathbf{v}$.

При этом примем также разложение для обобщенной силы (в частности, силы воздействия среды, при этом касательные силы, действующие на на четырехмерный диск, отсутствуют), действующей на пятимерное тело:

$$\mathbf{S} = \{-S, 0, 0, 0, 0\}, \tag{1.3}$$

т.е. в данном случае внешняя сила $\mathbf{F} = \mathbf{S}$.

Тогда может быть получена *часть динамических уравнений* движения тела (в том числе, и в случае аналитических функций Чаплыгина; см. [29,33]), которая описывает движение центра масс и соответствует пространству $\mathbb{R}^5$. В интересующем нас случае данная система примет вид:

$$\begin{gathered}\dot{v}\cos\alpha - \dot{\alpha}v\sin\alpha - \omega_{10}v\sin\alpha\cos\beta_1 + \omega_9 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 - \\ - \omega_7 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \omega_4 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \\ + \sigma(\omega_{10}^2 + \omega_9^2 + \omega_7^2 + \omega_4^2) = \frac{F_1}{m} = -\frac{S}{m},\end{gathered} \tag{1.4}$$

$$\begin{gathered}\dot{v}\sin\alpha\cos\beta_1 + \dot{\alpha}v\cos\alpha\cos\beta_1 - \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\sin\beta_1 + \\ + \omega_{10}v\cos\alpha - \omega_8 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \omega_6 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 - \\ - \omega_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 - \sigma(\omega_9\omega_8 + \omega_6\omega_7 + \omega_3\omega_4) - \sigma\dot{\omega}_{10} = 0,\end{gathered} \tag{1.5}$$

$$\begin{gathered}\dot{v}\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \dot{\alpha}v\cos\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\cos\beta_2 - \\ - \dot{\beta}_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 - \omega_9 v\cos\alpha + \omega_8 v\sin\alpha\cos\beta_1 - \omega_5 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \\ + \omega_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 - \sigma(\omega_8\omega_{10} - \omega_5\omega_7 - \omega_2\omega_4) + \sigma\dot{\omega}_9 = 0,\end{gathered} \tag{1.6}$$

$$\begin{gathered}\dot{v}\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \dot{\alpha}v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \\ + \dot{\beta}_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\cos\beta_3 - \dot{\beta}_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \omega_7 v\cos\alpha - \omega_6 v\sin\alpha\cos\beta_1 + \\ + \omega_5 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 - \omega_1 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \sigma(\omega_6\omega_{10} + \omega_5\omega_9 - \omega_1\omega_4) - \sigma\dot{\omega}_7 = 0,\end{gathered} \tag{1.7}$$

$$\begin{gathered}\dot{v}\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \dot{\alpha}v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \\ + \dot{\beta}_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\sin\beta_3 + \dot{\beta}_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 - \omega_4 v\cos\alpha + \omega_3 v\sin\alpha\cos\beta_1 - \\ - \omega_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \omega_1 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 - \sigma(\omega_3\omega_{10} + \omega_2\omega_9 + \omega_1\omega_7) + \sigma\dot{\omega}_4 = 0,\end{gathered} \tag{1.8}$$

$\sigma = CD$, где внешнее поле — квадратично по v (при этом можно рассмотреть более общий случай зависимости внешнего поля сил квадратичным образом и от тензора угловой скорости, но это нам пока не потребуется):

$$S = s(\alpha)v^2. \tag{1.9}$$

Вспомогательная матрица для вычисления момента внешней силы (приложенной в точке N) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & x_{3N} & x_{4N} & x_{5N} \\ -S & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.10}$$

тогда может быть получена *часть динамических уравнений* движения тела, которая описывает движение тела вокруг центра масс и соответствуют алгебре Ли so(5). В таком случае данная система примет вид (см. также [9, 11, 13, 15]):

$$(\lambda_4 + \lambda_5)\dot{\omega}_1 + (\lambda_4 - \lambda_5)(\omega_4\omega_7 + \omega_3\omega_6 + \omega_2\omega_5) = 0, \tag{1.11}$$

$$(\lambda_3 + \lambda_5)\dot{\omega}_2 + (\lambda_5 - \lambda_3)(\omega_1\omega_5 - \omega_3\omega_8 - \omega_4\omega_9) = 0, \tag{1.12}$$

$$(\lambda_2 + \lambda_5)\dot{\omega}_3 + (\lambda_2 - \lambda_5)(\omega_4\omega_{10} - \omega_2\omega_8 - \omega_1\omega_6) = 0, \tag{1.13}$$

$$(\lambda_1 + \lambda_5)\dot{\omega}_4 + (\lambda_5 - \lambda_1)(\omega_3\omega_{10} + \omega_2\omega_9 + \omega_1\omega_7) = -x_{5N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha)v^2, \tag{1.14}$$

$$(\lambda_3 + \lambda_4)\dot{\omega}_5 + (\lambda_3 - \lambda_4)(\omega_7\omega_9 + \omega_6\omega_8 + \omega_1\omega_2) = 0, \tag{1.15}$$

$$(\lambda_2+\lambda_4)\dot{\omega}_6+(\lambda_4-\lambda_2)(\omega_5\omega_8-\omega_7\omega_{10}-\omega_1\omega_3)=0, \tag{1.16}$$

$$(\lambda_1+\lambda_4)\dot{\omega}_7+(\lambda_1-\lambda_4)(\omega_1\omega_4-\omega_6\omega_{10}-\omega_5\omega_9)=x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \tag{1.17}$$

$$(\lambda_2+\lambda_3)\dot{\omega}_8+(\lambda_2-\lambda_3)(\omega_9\omega_{10}+\omega_5\omega_6+\omega_2\omega_3)=0, \tag{1.18}$$

$$(\lambda_1+\lambda_3)\dot{\omega}_9+(\lambda_3-\lambda_1)(\omega_8\omega_{10}-\omega_5\omega_7-\omega_2\omega_4)=-x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \tag{1.19}$$

$$(\lambda_1+\lambda_2)\dot{\omega}_{10}+(\lambda_1-\lambda_2)(\omega_8\omega_9+\omega_6\omega_7+\omega_3\omega_4)=x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2. \tag{1.20}$$

Таким образом, фазовым пространством системы (1.4)—(1.8), (1.11)—(1.20) 15-го порядка является прямое произведение 5-мерного многообразия на алгебру Ли so(5): $\mathbb{R}^1\times\mathbf{S}^4\times\mathrm{so}(5)$.

2. Следствия динамической симметрии. Поскольку имеется отмеченная выше динамическая симметрия

$$I_2=I_3=I_4=I_5, \tag{1.21}$$

то система (1.4)—(1.8), (1.11)—(1.20) обладает первыми интегралами

$$\omega_1\equiv\omega_1^0,\quad \omega_2\equiv\omega_2^0,\quad \omega_3\equiv\omega_3^0,\quad \omega_5\equiv\omega_5^0,\quad \omega_6\equiv\omega_6^0,\quad \omega_8\equiv\omega_8^0, \tag{1.22}$$

которые в данной работе будем рассматривать на нулевых уровнях:

$$\omega_1^0=\omega_2^0=\omega_3^0=\omega_5^0=\omega_6^0=\omega_8^0=0. \tag{1.23}$$

Ненулевых же компонент тензора Ω осталось *четыре*: $\omega_{r_1}=\omega_4$, $\omega_{r_2}=\omega_7$, $\omega_{r_3}=\omega_9$, $\omega_{r_4}=\omega_{10}$.

3. Более общая задача и новые квазискорости в системе. Если же рассматривается *более общая задача* о движении тела при наличии некоторой следящей силы $\mathbf{T}$ (имеющей, вообще говоря, пять компонент), лежащей на прямой Dx_1 и обеспечивающей во все время движения выполнение определенного векторного равенства ($\mathbf{V}_C$ — скорость центра масс; см. также [21, 31, 32]), например,

$$\mathbf{V}_C\equiv\mathrm{const}, \tag{1.24}$$

то в системе (1.4)—(1.8), (1.11)—(1.20) вместо F_1 должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил:

$$T-s(\alpha)v^2\equiv 0. \tag{1.25}$$

Очевидно, что для этого нужно выбрать величину следящей силы T в виде

$$T=T_v(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\Omega)=s(\alpha)v^2,\quad \mathbf{T}\equiv-\mathbf{S}. \tag{1.26}$$

Случай (1.26) выбора величины T следящей силы является частным случаем возможности отделения независимой подсистемы меньшего порядка в системе (1.4)—(1.8), (1.11)—(1.20) после некоторого преобразования.

Укажем на *достаточное условие* такого отделения. Пусть выполнено следующее условие на величину T:

$$\begin{gathered}T=T_v(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\Omega)=\sum_{i,j=0,\ i\leqslant j}^{4}\tau_{i,j}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)\omega_{r_i}\omega_{r_j}=T_1\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)v^2,\\ \omega_{r_0}=v.\end{gathered} \tag{1.27}$$

Введем новые квазискорости, для чего преобразуем величины $\omega_{r_1},\ldots,\omega_{r_4}$ посредством композиции трёх поворотов, описываемых углами β_1, β_2, β_3. Тогда (касательно системы (1.4)—(1.8), (1.11)—(1.20)) справедливы следующие соотношения:

$$
\begin{aligned}
&z_1 = \omega_4 \cos\beta_3 + \omega_7 \sin\beta_3,\\
&z_2 = (\omega_7 \cos\beta_3 - \omega_4 \sin\beta_3)\cos\beta_2 + \omega_9 \sin\beta_2,\\
&z_3 = \Big[\big(-\omega_7\cos\beta_3 + \omega_4\sin\beta_3\big)\sin\beta_2 + \omega_9\cos\beta_2\Big]\cos\beta_1 + \omega_{10}\sin\beta_1,\\
&z_4 = \Big[\big(\omega_7\cos\beta_3 - \omega_4\sin\beta_3\big)\sin\beta_2 - \omega_9\cos\beta_2\Big]\sin\beta_1 + \omega_{10}\cos\beta_1.
\end{aligned}
\tag{1.28}
$$

4. Редукции в системе и системы нормального вида. Динамическую часть уравнений движения в случаях (1.21)—(1.23) (а также при наличии следящей силы и условия (1.27)) можно переписать в виде

$$
\dot v + \sigma\left(\sum_{s=1}^{4} z_s^2\right)\cos\alpha - \sigma\frac{v^2}{3I_2}s(\alpha)\sin\alpha\cdot\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right) = \\
= \frac{T_1\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)v^2 - s(\alpha)v^2}{m}\cos\alpha, \tag{1.29}
$$

$$
\dot\alpha v + z_4 v - \sigma\left(\sum_{s=1}^{4} z_s^2\right)\sin\alpha - \sigma\frac{v^2}{3I_2}s(\alpha)\cos\alpha\cdot\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right) = \\
= \frac{s(\alpha)v^2 - T_1\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)v^2}{m}\sin\alpha, \tag{1.30}
$$

$$
\dot\beta_1\sin\alpha - z_3\cos\alpha - \frac{\sigma v}{3I_2}s(\alpha)\cdot\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right) = 0. \tag{1.31}
$$

$$
\dot\beta_2\sin\alpha\sin\beta_1 + z_2\cos\alpha - \frac{\sigma v}{3I_2}s(\alpha)\cdot\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right) = 0, \tag{1.32}
$$

$$
\dot\beta_3\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 - z_1\cos\alpha - \frac{\sigma v}{3I_2}s(\alpha)\cdot\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right) = 0, \tag{1.33}
$$

$$
\dot\omega_4 = -\frac{v^2}{3I_2}x_{5N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha), \quad \dot\omega_7 = \frac{v^2}{3I_2}x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha), \tag{1.34}
$$

$$
\dot\omega_9 = -\frac{v^2}{3I_2}x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha), \quad \dot\omega_{10} = \frac{v^2}{3I_2}x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha). \tag{1.35}
$$

Здесь введены следующие функции:

$$
\begin{aligned}
&\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right) = \left\langle \mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\beta_1+\frac{\pi}{2},\beta_2,\beta_3\right)\right\rangle,\\
&\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right) = \left\langle \mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2},\beta_2+\frac{\pi}{2},\beta_3\right)\right\rangle,\\
&\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right) = \left\langle \mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\beta_3+\frac{\pi}{2}\right)\right\rangle,
\end{aligned}
\tag{1.36}
$$

а $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^5$, а функция $\Gamma_v(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\Omega/v)$ представляется в виде

$$
\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right) = |\mathbf{r}_N| = \langle \mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\rangle = \\
= 0\cdot\cos\frac{\pi}{2} + \sum_{s=2}^{5} x_{sN}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)i_{sN}(\beta_1,\beta_2,\beta_3). \tag{1.37}
$$

Теперь здесь $i_{sN}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, $s=1,\ldots,5$, $(i_{1N}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\equiv 0)$ — компоненты единичного вектора по оси вектора $\mathbf{r}_N=\{0,x_{2N},x_{3N},x_{4N},x_{5N}\}$ на трехмерной сфере $\mathbf{S}^3\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$, заданной равенством $\alpha=\pi/2$, как экваториальном сечении соответствующей четырехмерной сферы $\mathbf{S}^4\{\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$. Таким образом,

$$\mathbf{i}_N(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\mathbf{i}_v\left(\frac{\pi}{2},\beta_1,\beta_2,\beta_3\right), \tag{1.38}$$

а вектор $\mathbf{i}_v(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ определяется в (1.2). Зависимость от групп переменных $(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\Omega/v)$ понимается как сложная зависимость от $(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,z_1/v,z_2/v,z_3/v,z_4/v)$ в силу (1.28).

Вводя далее новые безразмерные фазовые переменные и дифференцирование по формулам

$$z_k=n_1vZ_k,\quad k=1,\ldots,4,\quad \langle\cdot\rangle=n_1v\left\langle'\right\rangle,\quad n_1>0,\quad n_1=\mathrm{const}, \tag{1.39}$$

приведем систему (1.29)—(1.35) к следующему виду:

$$v'=v\Psi(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z), \tag{1.40}$$

$$\begin{aligned}\alpha'=-Z_4+\sigma n_1\bigl(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2\bigr)\sin\alpha+\frac{\sigma}{3I_2n_1}s(\alpha)\cos\alpha\cdot\Gamma_v\bigl(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_2,n_1Z\bigr)-\\-\frac{T_1(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z)-s(\alpha)}{mn_1}\sin\alpha,\end{aligned} \tag{1.41}$$

$$\begin{aligned}Z_4'=\frac{s(\alpha)}{3I_2n_1^2}\cdot\Gamma_v\bigl(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\bigr)-\bigl(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2\bigr)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\\+\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Bigl\{-Z_3\Delta_{v,1}\bigl(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\bigr)+Z_2\Delta_{v,2}\bigl(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\bigr)-\\-Z_1\Delta_{v,3}\bigl(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\bigr)\Bigr\}-Z_4\cdot\Psi\bigl(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z\bigr),\end{aligned} \tag{1.42}$$

$$\begin{aligned}Z_3'=Z_3Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\bigl(Z_1^2+Z_2^2\bigr)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Biggl\{Z_4\Delta_{v,1}\bigl(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\bigr)-\\-Z_2\Delta_{v,2}\bigl(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\bigr)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+Z_1\Delta_{v,3}\bigl(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\bigr)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\Biggr\}-\\-\frac{s(\alpha)}{3I_2n_1^2}\cdot\Delta_{v,1}\bigl(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\bigr)-Z_3\cdot\Psi\bigl(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z\bigr),\end{aligned} \tag{1.43}$$

$$\begin{aligned}Z_2'=Z_2Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}-Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+\\+\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,2}(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z)\left[-Z_4+Z_3\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right]+\\+\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,3}(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z)\left[-Z_1\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\right]+\\+\frac{s(\alpha)}{3I_2n_1^2}\cdot\Delta_{v,2}(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z)-Z_2\cdot\Psi(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z),\end{aligned} \tag{1.44}$$

$$\begin{aligned}Z_1'=Z_1Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+\\+\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,3}(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z)\left\{Z_4-Z_3\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+Z_2\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\right\}-\\-\frac{s(\alpha)}{3I_2n_1^2}\Delta_{v,3}(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z)-Z_1\cdot\Psi(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z),\end{aligned} \tag{1.45}$$

$$\beta_1' = Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,1}(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z), \tag{1.46}$$

$$\beta_2' = -Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1} + \frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1}\Delta_{v,2}(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z), \tag{1.47}$$

$$\beta_3' = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2} + \frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}\Delta_{v,3}(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z), \tag{1.48}$$

где

$$\Psi(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z) = -\sigma n_1(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\cos\alpha + \\ + \frac{\sigma}{3I_2n_1}s(\alpha)\sin\alpha\cdot\Gamma_v(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z) + \frac{T_1(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z)-s(\alpha)}{mn_1}\cos\alpha. \tag{1.49}$$

Видно, что в системе (1.40)—(1.48) девятого порядка может быть выделена независимая подсистема (1.41)—(1.48) восьмого порядка, которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем восьмимерном фазовом пространстве — касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^4\{Z_4,Z_3,Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ четырехмерной сферы $\mathbf{S}^4\{\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$.

В частности, при выполнении условия (1.26) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы восьмого порядка также возможен.

В дальнейшем также зависимость от групп переменных $(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\Omega/v)$ понимается как сложная зависимость от $(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,z_1/v,z_2/v,z3/v,z_4/v)$ (сложная зависимость от $(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z_1,n_1Z_2,n_1Z_3,n_1Z_4)$) в силу (1.28) и (1.39).

5. Замечания о распределении индексов. В правой части системы (1.41)—(1.48) после общего множителя

$$\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}$$

величины $\Delta_{v,s}(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z)$, $s=1,2,3$, входят линейным образом (и всегда ровно 3 штуки). Так, например, в уравнении (1.42) (с левой частью Z_4') функции (1.36) входят со всеми индексами s от 1 до 3 (по одному разу каждый индекс), т.е.

$$1 \quad 2 \quad 3. \tag{1.50}$$

Далее, в уравнения (1.43)—(1.45) появление набора функций (1.36) происходит по-другому. Так, например, в уравнение для Z_3' по-прежнему входит набор функций (1.36) с индексами (1.50). А в уравнение для Z_2' входит уже набор с индексами

$$2 \quad 2 \quad 3, \tag{1.51}$$

т.е. функция $\Delta_{v,2}(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z)$ уже повторяется дважды. Общее распределение индексов дается таблицей 1.

Таблица 1. Общее распределение индексов набора функций (1.36)

Левая часть системы (1.41)—(1.48)	Распределение индексов s набора функций (1.36)		
Z_3'	1	2	3
Z_2'	2	2	3
Z_1'	3	3	3

Так, минор (1) первого порядка в левом верхнем углу таблицы 1 соответствует случаю $n=3$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях функции (1.36) (лишь при $s=1$). Там же минор второго порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

соответствует случаю $n = 4$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях функций (1.36) (лишь при $s = 1, 2$). Там же минор третьего порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

соответствует случаю $n = 5$ (какой мы, собственно, и рассматриваем) и указывает на присутствие в динамических уравнениях (1.41)—(1.48) функций (1.36) (лишь при $s = 1, 2, 3$).

6. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости.

6.1. Приведенная система. Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина (см. [29, 33]), пользуясь (1.2), (1.38), динамические функции s, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N}, x_{5N} примем в следующем виде:

$$s(\alpha) = B\cos\alpha, \quad \mathbf{r}_N = R(\alpha)\mathbf{i}_N, \quad R(\alpha) = A\sin\alpha, \quad A, B > 0, \tag{1.52}$$

убеждающем нас о том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента неконсервативных сил от тензора угловой скорости (имеется лишь зависимость от углов α, β_1, β_2, β_3).

При этом функции $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z)$, $\Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z)$, $s = 1, 2, 3$, входящие в систему (1.40)—(1.48), примут следующий вид:

$$\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) = R(\alpha) = A\sin\alpha, \quad \Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) \equiv 0, \quad s = 1, 2, 3. \tag{1.53}$$

Выбирая безразмерный параметр b и постоянную n_1 следующим образом:

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{3I_2}, \quad n_1 = n_0, \tag{1.54}$$

будем рассматривать следующую систему девятого порядка:

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z), \tag{1.55}$$

$$\alpha' = -Z_4 + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha, \tag{1.56}$$

$$Z_4' = \sin\alpha\cos\alpha - (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_4(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha - bZ_4\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{1.57}$$

$$Z_3' = Z_3 Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (Z_1^2 + Z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + bZ_3(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha - bZ_3\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{1.58}$$

$$\begin{aligned} Z_2' = Z_2 Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_2 Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\ + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha - bZ_2\sin^2\alpha\cos\alpha, \end{aligned} \tag{1.59}$$

$$\begin{aligned} Z_1' = Z_1 Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1 Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_1 Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\ + bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha - bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha, \end{aligned} \tag{1.60}$$

$$\beta_1' = Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{1.61}$$

$$\beta_2' = -Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{1.62}$$

$$\beta_3' = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}, \tag{1.63}$$

где

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z) = -b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha + b\sin^2\alpha\cos\alpha.$$

Итак, система (1.55)—(1.63) может быть рассмотрена на своем фазовом девятимерном многообразии $W_1 = \mathbb{R}_+^1\{v\} \times T_*\mathbf{S}^4\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, т.е. на прямом произведении числового луча на касательное расслоение к четырехмерной сфере.

Видно, что в системе (1.55)—(1.63) девятого порядка образовалась независимая система (1.56)—(1.63) восьмого порядка на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^4\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ четырехмерной сферы $\mathbf{S}^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$. При этом в независимой системе (1.56)—(1.63) восьмого порядка образовалась еще одна независимая система (1.56)—(1.62) седьмого порядка на своем семимерном многообразии.

В общем случае справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1. *У системы* (1.4)—(1.8) *при условиях* (1.21), (1.22)—(1.24) *выделяется динамическая система* (1.41)—(1.48) *на касательном расслоении* $T_*\mathbf{S}^4\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ *четырехмерной сферы* $\mathbf{S}^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$. *В частности, при условии* (1.52) — *выделяется система* (1.56)—(1.63).

6.2. Об аналитическом первом интеграле. В силу (1.24) значение скорости центра масс является первым интегралом системы (1.29)—(1.35) (при условии (1.26)), а именно, функция фазовых переменных

$$\Psi_0(v, \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, z_1, z_2, z_3, z_4) = v^2 + \sigma^2(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2) - 2\sigma z_4 v \sin\alpha = V_C^2 \tag{1.64}$$

постоянна на ее фазовых траекториях (при этом величины z_1, z_2, z_3, z_4 выбираются в силу (1.28)).

В силу невырожденной замены независимого переменного (при $v \neq 0$) у системы (1.40)—(1.48) также существует аналитический интеграл, а именно, функция фазовых переменных

$$\Psi_1(v, \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) = v^2(1 + b^2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) - 2bZ_4 \sin\alpha) = V_C^2 \tag{1.65}$$

постоянна на ее фазовых траекториях.

В частности, равенство (1.65) позволяет, не решая системы (1.55)—(1.63), найти зависимость скорости характерной точки твердого тела (точки D четырехмерного диска) от других фазовых переменных, а именно, при $V_C \neq 0$ выполнено равенство

$$v^2 = \frac{V_C^2}{1 + b^2(Z_1^2 + \ldots + Z_4^2) - 2bZ_4 \sin\alpha}. \tag{1.66}$$

Поскольку в фазовом пространстве системы (1.55)—(1.63) существуют асимптотические предельные множества, то, как будет видно, равенство (1.65) задает единственный аналитический (даже непрерывный) первый интеграл системы (1.55)—(1.63) во всем фазовом пространстве (ср. с [34, 35, 39]).

6.3. Общие замечания об интегрируемости системы. Для полного интегрирования системы восьмого порядка (1.56)—(1.63) необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Но рассматриваемые системы имеют такие симметрии, которые позволяют снизить достаточное количество первых интегралов до пяти для интегрирования системы.

6.4. Система при отсутствии внешнего силового поля. Для начала рассмотрим систему (1.56)—(1.63) на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^4\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ четырехмерной сферы $\mathbf{S}^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ так, что получим из нее систему консервативную. Более того, будем считать, что функция (1.37) тождественно равна нулю. В частности, коэффициент $\sin\alpha\cos\alpha$ в уравнении (1.57) отсутствует, а также $b = 0$, за исключением слагаемых, содержащих

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2.$$

Рассматриваемая система примет вид

$$\alpha' = -Z_4 + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\sin\alpha, \tag{1.67}$$

$$Z_4' = -(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_4(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha, \tag{1.68}$$

$$Z_3' = Z_3 Z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (Z_1^2 + Z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + bZ_3(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha, \tag{1.69}$$

$$Z_2' = Z_2 Z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_2 Z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - Z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha, \tag{1.70}$$

$$Z_1' = Z_1 Z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1 Z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_1 Z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha, \tag{1.71}$$

$$\beta_1' = Z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{1.72}$$

$$\beta_2' = -Z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{1.73}$$

$$\beta_3' = Z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}, \tag{1.74}$$

при этом во вспомогательном уравнении (1.55) на величину v функцию $\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z)$ следует выбрать в виде

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z) = -b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha.$$

Система (1.67)—(1.74) описывает движение твердого тела при отсутствии *внешнего* поля сил, хотя, как показано в [61–64], некое внутреннее поле сил в системе присутствует, и отвечает за это как раз параметр b.

Теорема 1.2. *Система* (1.67)—(1.74) *обладает пятью независимыми аналитическими первыми интегралами следующего вида:*

$$\Phi_1(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = v^2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) = C_1 = \text{const}, \tag{1.75}$$

$$\Phi_2(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}\sin\alpha = C_2 = \text{const}, \tag{1.76}$$

$$\Phi_3(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\alpha\sin\beta_1 = C_3 = \text{const}, \tag{1.77}$$

$$\Phi_4(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = v^2 Z_1 \sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 = C_4 = \text{const}, \tag{1.78}$$

$$\Phi_5(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5 = \text{const}. \tag{1.79}$$

Замечание 1.1. Поскольку в первые интегралы (1.75)—(1.79), вообще говоря, входит величина v, то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (1.66), либо вместе с системой (1.67)—(1.74) использовать вспомогательное уравнение (1.55).

Первые четыре первых интеграла (1.75)—(1.78) констатируют тот факт, что поскольку внешнего поля сил нет, то сохраняются четыре (вообще говоря, ненулевые) компоненты тензора угловой скорости пятимерного твердого тела, а именно:

$$\omega_4 \equiv \omega_4^0 = \text{const}, \quad \omega_7 \equiv \omega_7^0 = \text{const}, \quad \omega_9 \equiv \omega_9^0 = \text{const}, \quad \omega_{10} \equiv \omega_{10}^0 = \text{const}. \tag{1.80}$$

В частности, наличие первого интеграла (1.75) объясняется равенством

$$n_0^2 v^2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) = \omega_4^2 + \omega_7^2 + \omega_9^2 + \omega_{10}^2 \equiv n_0^2 C_1 = \text{const}. \tag{1.81}$$

Пятый первый интеграл (1.79) имеет кинематический смысл, «привязывает» уравнение на β_3 и может быть найден из следующей квадратуры:

$$\frac{d\beta_3}{d\beta_2} = -\frac{Z_1}{Z_2}\frac{1}{\sin\beta_2}, \tag{1.82}$$

при этом если воспользоваться уровнями первых интегралов (1.77), (1.78) и получить равенство

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \pm\sqrt{\frac{C_3^2}{C_4^2}\sin^2\beta_2 - 1}, \tag{1.83}$$

то квадратура (1.82) примет вид

$$\beta_3 = \pm\int \frac{du}{(1-u^2)\sqrt{\left(\frac{C_3^2}{C_4^2} - 1\right) - \frac{C_3^2}{C_4^2}u^2}}, \quad u = \cos\beta_2. \tag{1.84}$$

Ее вычисление приводит к следующему виду:

$$\beta_3 + C_5 = \pm \operatorname{arctg} \frac{\cos\beta_2}{\sqrt{\frac{C_3^2}{C_4^2}\sin^2\beta_2 - 1}}, \quad C_5 = \mathrm{const}, \tag{1.85}$$

позволяющему получить первый интеграл (1.79). Преобразуя последнее равенство, имеем следующее инвариантное соотношение:

$$\operatorname{tg}^2(\beta_3 + C_5) = \frac{C_4^2}{(C_3^2 - C_4^2)\operatorname{tg}^2\beta_2 - C_4^2}. \tag{1.86}$$

Теперь перефразируем теорему 1.2.

Теорема 1.3. *Система* (1.67)—(1.74) *обладает пятью независимыми первыми интегралами следующего вида:*

$$\Psi_1(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}\sin\alpha} = C_1' = \mathrm{const}, \tag{1.87}$$

$$\Psi_2(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_2' = \mathrm{const}, \tag{1.88}$$

$$\Psi_3(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\Phi_3}{\Phi_4} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}{Z_1\sin\beta_2} = C_3' = \mathrm{const}, \tag{1.89}$$

$$\Psi_4(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\Phi_2}{\Phi_3} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\beta_1} = C_4' = \mathrm{const}, \tag{1.90}$$

$$\Psi_5(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5' = \mathrm{const}. \tag{1.91}$$

Замечание 1.2. Поскольку в первые интегралы (1.87)—(1.91), вообще говоря, входит величина v, то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (1.66), либо вместе с системой (1.67)—(1.74) использовать вспомогательное уравнение (1.55).

Пятый первый интеграл (1.91) также имеет кинематический смысл и «привязывает» уравнение на β_3, а функции Ψ_2, Ψ_5 можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_5.

В формулировке теоремы 1.3 (в отличие от теоремы 1.2) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (1.87)—(1.91) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 1.3 преобразованный набор первых интегралов (1.87)—(1.91) системы (1.67)—(1.74) (системы при отсутствии силового поля) по-прежнему остается набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (1.67)—(1.74) восьмого порядка необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных:

$$\begin{pmatrix} Z_4 \\ Z_3 \\ Z_2 \\ Z_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} w_4 \\ w_3 \\ w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}, \quad w_4 = Z_4, \quad w_3 = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}, \quad w_2 = \frac{Z_2}{Z_1}, \quad w_1 = \frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}, \tag{1.92}$$

система (1.67)—(1.74) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_4 + b(w_3^2 + w_4^2)\sin\alpha, \tag{1.93}$$

$$w_4' = -w_3^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_4(w_3^2 + w_4^2)\cos\alpha, \tag{1.94}$$

$$w_3' = w_3w_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_3(w_3^2 + w_4^2)\cos\alpha, \tag{1.95}$$

$$
\begin{aligned}
w_2' &= d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\frac{1+w_2^2}{w_2}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2},\\
\beta_2' &= d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3),
\end{aligned} \tag{1.96}
$$

$$
\begin{aligned}
w_1' &= d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\frac{1+w_1^2}{w_1}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1},\\
\beta_1' &= d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3),
\end{aligned} \tag{1.97}
$$

$$
\beta_3' = d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \tag{1.98}
$$

где

$$
\begin{aligned}
d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) &= \mathcal{Z}_3(w_4, w_3, w_2, w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\\
d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) &= -\mathcal{Z}_2(w_4, w_3, w_2, w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1},\\
d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) &= \mathcal{Z}_1(w_4, w_3, w_2, w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2},
\end{aligned} \tag{1.99}
$$

при этом

$$
Z_k = \mathcal{Z}_k(w_4, w_3, w_2, w_1), \quad k = 1, 2, 3, \tag{1.100}
$$

— функции в силу замены (1.92).

Видно, что система восьмого порядка (1.93)—(1.98) распадается на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (1.93)—(1.95) — третьего, а системы (1.96), (1.97) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (1.93)—(1.98) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.93)—(1.95), по одному — для систем (1.96), (1.97), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (1.98) (*т.е. всего пять*).

Замечание 1.3. Выпишем первые интегралы (1.87)—(1.91) в переменных w_1, w_2, w_3, w_4 в силу (1.92). Получим:

$$
\Theta_1(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{w_3^2 + w_4^2}{w_3 \sin\alpha} = C_1'' = \text{const}, \tag{1.101}
$$

$$
\Theta_2(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = v^2 w_3 \sin\alpha = C_2'' = \text{const}, \tag{1.102}
$$

$$
\Theta_3(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\sqrt{1+w_2^2}}{\sin\beta_2} = C_3'' = \text{const}, \tag{1.103}
$$

$$
\Theta_4(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\sqrt{1+w_1^2}}{\sin\beta_1} = C_4'' = \text{const}, \tag{1.104}
$$

$$
\Theta_5(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5'' = \text{const}. \tag{1.105}
$$

Замечание 1.4. Поскольку в первые интегралы (1.101)—(1.105), вообще говоря, входит величина v, то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (1.66), либо вместе с системой (1.93)—(1.98) использовать вспомогательное уравнение (1.55).

Таким образом, два независимых первых интеграла (1.101), (1.102) достаточны для интегрирования системы (1.93)—(1.95), первые интегралы (1.103), (1.104) достаточны для интегрирования двух независимых уравнений первого порядка

$$
\frac{dw_s}{d\beta_s} = \frac{1+w_s^2}{w_s}\frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \quad s = 1, 2, \tag{1.106}
$$

после замены независимого переменного эквивалентных соответственно системам (1.96), (1.97), и, наконец, первый интеграл (1.105) достаточен для «привязывания» уравнения (1.98). Доказана следующая теорема.

Теорема 1.4. *Система* (1.67) — (1.74) *восьмого порядка обладает достаточным количеством* (*пятью*) *независимых первых интегралов.*

6.5. Частичное введение внешнего силового поля. Теперь рассмотрим систему (1.56)—(1.63) при условии $b = 0$ за исключением слагаемых, содержащих

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2.$$

При этом частично добавим внешнее силовое поле. А именно, его наличие характеризует коэффициент $\sin\alpha\cos\alpha$ в уравнении (1.57) (в отличие от системы (1.67)—(1.74)). Рассматриваемая система примет вид

$$\alpha' = -Z_4 + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\sin\alpha, \tag{1.107}$$

$$Z_4' = \sin\alpha\cos\alpha - (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_4(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha, \tag{1.108}$$

$$Z_3' = Z_3Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (Z_1^2 + Z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + bZ_3(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha, \tag{1.109}$$

$$Z_2' = Z_2Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + {} \\ {} + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha, \tag{1.110}$$

$$Z_1' = Z_1Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + {} \\ {} + bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha, \tag{1.111}$$

$$\beta_1' = Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{1.112}$$

$$\beta_2' = -Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{1.113}$$

$$\beta_3' = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}; \tag{1.114}$$

при этом во вспомогательном уравнении (1.55) на величину v функцию $\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z)$ следует выбрать в виде

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z) = -b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha.$$

Теорема 1.5. *Система* (1.107)—(1.114) *обладает пятью независимыми первыми интегралами следующего вида:*

$$\Phi_1(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = v^2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + \sin^2\alpha) = C_1 = \mathrm{const}, \tag{1.115}$$

$$\Phi_2(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}\sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}, \tag{1.116}$$

$$\Phi_3(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\alpha\sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const}, \tag{1.117}$$

$$\Phi_4(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = v^2Z_1\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 = C_4 = \mathrm{const}, \tag{1.118}$$

$$\Phi_5(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5 = \mathrm{const}. \tag{1.119}$$

Замечание 1.5. Поскольку в первые интегралы (1.115)—(1.119), вообще говоря, входит величина v, то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (1.66), либо вместе с системой (1.107)—(1.114) использовать вспомогательное уравнение (1.55).

Первый интеграл (1.115) по своей структуре похож на интеграл полной энергии. Пятый первый интеграл (1.119) имеет кинематический смысл, «привязывает» уравнение на β_3 и найден выше.

Переформулируем теорему 1.5 следующим образом.

Теорема 1.6. *Система* (1.107)—(1.114) *обладает пятью независимыми первыми интегралами следующего вида*:

$$\Psi_1(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + \sin^2\alpha}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}\sin\alpha} = C_1' = \mathrm{const}, \tag{1.120}$$

$$\Psi_2(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_2' = \text{const}, \tag{1.121}$$

$$\Psi_3(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\Phi_3}{\Phi_4} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}{Z_1 \sin\beta_2} = C_3' = \text{const}, \tag{1.122}$$

$$\Psi_4(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\Phi_2}{\Phi_3} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\beta_1} = C_4' = \text{const}, \tag{1.123}$$

$$\Psi_5(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5' = \text{const}. \tag{1.124}$$

Замечание 1.6. Поскольку в первые интегралы (1.120)—(1.124), вообще говоря, входит величина v, то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (1.66), либо вместе с системой (1.107)—(1.114) использовать вспомогательное уравнение (1.55).

Функции Ψ_2, Ψ_5 можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_5.

В формулировке теоремы 1.6 (в отличие от теоремы 1.5) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (1.120)—(1.124) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 1.6 преобразованный набор первых интегралов (1.120)—(1.124) системы (1.107)—(1.114) по-прежнему остается набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (1.107)—(1.114) восьмого порядка необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (1.92) система (1.107)—(1.114) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_4 + b(w_3^2 + w_4^2)\sin\alpha, \tag{1.125}$$

$$w_4' = \sin\alpha\cos\alpha - w_3^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_4(w_3^2 + w_4^2)\cos\alpha, \tag{1.126}$$

$$w_3' = w_3 w_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_3(w_3^2 + w_4^2)\cos\alpha, \tag{1.127}$$

$$\begin{cases} w_2' = d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\dfrac{1 + w_2^2}{w_2}\dfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \\ \beta_2' = d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{cases} \tag{1.128}$$

$$\begin{cases} w_1' = d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\dfrac{1 + w_1^2}{w_1}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \\ \beta_1' = d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{cases} \tag{1.129}$$

$$\beta_3' = d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \tag{1.130}$$

где выполнены условия (1.99).

Видно, что система восьмого порядка (1.125)—(1.130) распадается на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (1.125)—(1.127) — третьего, а системы (1.128), (1.129) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (1.125)—(1.130) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.125)—(1.127), по одному — для систем (1.128), (1.129), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (1.130) (*т.е. всего пять*).

Замечание 1.7. Выпишем первые интегралы (1.120)—(1.124) в переменных w_1, w_2, w_3, w_4 в силу (1.92). Получим:

$$\Theta_1(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{w_3^2 + w_4^2 + \sin^2\alpha}{w_3 \sin\alpha} = C_1'' = \text{const}, \tag{1.131}$$

$$\Theta_2(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = v^2 w_3 \sin\alpha = C_2'' = \text{const}, \tag{1.132}$$

$$\Theta_3(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\sqrt{1 + w_2^2}}{\sin\beta_2} = C_3'' = \text{const}, \tag{1.133}$$

$$\Theta_4(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\sqrt{1+w_1^2}}{\sin\beta_1} = C_4'' = \mathrm{const}, \tag{1.134}$$

$$\Theta_5(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5'' = \mathrm{const}. \tag{1.135}$$

Замечание 1.8. Поскольку в первые интегралы (1.131)—(1.135), вообще говоря, входит величина v, то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (1.66), либо вместе с системой (1.125)—(1.130) использовать вспомогательное уравнение (1.55).

Таким образом, два независимых первых интеграла (1.131), (1.132) достаточны для интегрирования системы (1.125)—(1.127), первые интегралы (1.133), (1.134) достаточны для интегрирования двух независимых уравнений первого порядка

$$\frac{dw_s}{d\beta_s} = \frac{1+w_s^2}{w_s}\frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \quad s = 1, 2, \tag{1.136}$$

после замены независимого переменного эквивалентных соответственно системам (1.128), (1.129), и, наконец, первый интеграл (1.135) достаточен для «привязывания» уравнения (1.130). Доказана следующая теорема.

Теорема 1.7. *Система* (1.107)—(1.114) *восьмого порядка обладает достаточным количеством* (*пятью*) *независимых первых интегралов.*

6.6. Полный список первых интегралов. Перейдем теперь к интегрированию искомой системы восьмого порядка (1.56)—(1.63) (без всяких упрощений — при наличии всех коэффициентов).

Аналогичным образом, для полного интегрирования системы (1.56)—(1.63) восьмого порядка необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (1.92) система (1.56)—(1.63) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_4 + b(w_3^2 + w_4^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha, \tag{1.137}$$

$$w_4' = \sin\alpha\cos\alpha - w_3^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_4(w_3^2 + w_4^2)\cos\alpha - bw_4\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{1.138}$$

$$w_3' = w_3 w_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_3(w_3^2 + w_4^2)\cos\alpha - bw_3\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{1.139}$$

$$\begin{cases} w_2' = d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\dfrac{1+w_2^2}{w_2}\dfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \\ \beta_2' = d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{cases} \tag{1.140}$$

$$\begin{cases} w_1' = d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\dfrac{1+w_1^2}{w_1}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \\ \beta_1' = d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{cases} \tag{1.141}$$

$$\beta_3' = d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \tag{1.142}$$

где выполнены условия (1.99).

Видно, что система восьмого порядка (1.137)—(1.142) распадается на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (1.137)—(1.139) — третьего, а системы (1.140), (1.141) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (1.137)—(1.142) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.137)—(1.139), по одному — для систем (1.140), (1.141), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (1.142) (*т.е. всего пять*).

Для начала поставим в соответствие независимой подсистеме третьего порядка (1.137)—(1.139) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dw_4}{d\alpha} = \dfrac{\sin\alpha\cos\alpha + bw_4(w_3^2 + w_4^2)\cos\alpha - bw_4\sin^2\alpha\cos\alpha - w_3^2\cos\alpha/\sin\alpha}{-w_4 + b(w_3^2 + w_4^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha}, \\ \dfrac{dw_3}{d\alpha} = \dfrac{bw_3(w_3^2 + w_4^2)\cos\alpha - bw_3\sin^2\alpha\cos\alpha + w_3 w_4\cos\alpha/\sin\alpha}{-w_4 + b(w_3^2 + w_4^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha}. \end{cases} \tag{1.143}$$

Используя замену $\tau = \sin\alpha$, перепишем систему (1.143) в алгебраическом виде

$$\begin{cases} \dfrac{dw_4}{d\tau} = \dfrac{\tau + bw_4(w_3^2 + w_4^2) - bw_4\tau^2 - w_3^2/\tau}{-w_4 + b\tau(1-\tau^2) + b\tau(w_3^2 + w_4^2)}, \\ \dfrac{dw_3}{d\tau} = \dfrac{bw_3(w_3^2 + w_4^2) - bw_3\tau^2 + w_3w_4/\tau}{-w_4 + b\tau(1-\tau^2) + b\tau(w_3^2 + w_4^2)}. \end{cases} \tag{1.144}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_3 = u_1\tau, \quad w_4 = u_2\tau, \tag{1.145}$$

приводим систему (1.144) к следующему виду:

$$\begin{cases} \tau\dfrac{du_2}{d\tau} + u_2 = \dfrac{1 - bu_2\tau^2 + bu_2(u_1^2 + u_2^2)\tau^2 - u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1-\tau^2)}, \\ \tau\dfrac{du_1}{d\tau} + u_1 = \dfrac{bu_1(u_1^2 + u_2^2)\tau^2 - bu_1\tau^2 + u_1u_2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1-\tau^2)} \end{cases} \tag{1.146}$$

или, эквивалентно,

$$\begin{cases} \tau\dfrac{du_2}{d\tau} = \dfrac{1 - bu_2 + u_2^2 - u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1-\tau^2)}, \\ \tau\dfrac{du_1}{d\tau} = \dfrac{2u_1u_2 - bu_1}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1-\tau^2)}. \end{cases} \tag{1.147}$$

Поставим в соответствие системе второго порядка (1.147) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - u_1^2}{2u_1u_2 - bu_1}, \tag{1.148}$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{u_2^2 + u_1^2 - bu_2 + 1}{u_1}\right) = 0. \tag{1.149}$$

Итак, уравнение (1.148) имеет первый интеграл

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 - bu_2 + 1}{u_1} = C_1 = \text{const}, \tag{1.150}$$

который в прежних переменных выглядит следующим образом:

$$\Theta_1(w_4, w_3; \alpha) = \frac{w_4^2 + w_3^2 - bw_4\sin\alpha + \sin^2\alpha}{w_3\sin\alpha} = C_1 = \text{const}. \tag{1.151}$$

Замечание 1.9. При $b = 0$ первый интеграл (1.151) системы (1.137)—(1.139) совпадает с первым интегралом (1.131) системы (1.125)—(1.127), но при $b \neq 0$ ни числитель выражения (1.151), ни его знаменатель не являются первыми интегралами системы (1.137)—(1.139) по отдельности (хотя при $b = 0$ и числитель и знаменатель выражения (1.151) являются первыми интегралами системы (1.125)—(1.127)).

Далее, произведем поиск дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (1.137)—(1.139). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (1.150) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - 1. \tag{1.152}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2 + C_1^2 - 4 \geqslant 0, \tag{1.153}$$

и фазовое пространство системы (1.137)—(1.139) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (1.152).

Таким образом, в силу соотношения (1.150) первое уравнение системы (1.147) примет вид

$$\tau\frac{du_2}{d\tau} = \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}{-u_2 + b(1-\tau^2) + b\tau^2(U_1^2(C_1, u_2) + u_2^2)}, \tag{1.154}$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + 1)}\}, \tag{1.155}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (1.153), или вид уравнения Бернулли:

$$\frac{d\tau}{du_2} = \frac{(b-u_2)\tau - b\tau^3(1 - U_1^2(C_1, u_2) - u_2^2)}{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}. \tag{1.156}$$

Уравнение (1.156)(при учете (1.155)) легко приводится к линейному неоднородному уравнению:

$$\frac{dp}{du_2} = \frac{2(u_2 - b)p + 2b(1 - U_1^2(C_1, u_2) - u_2^2)}{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}, \quad p = \frac{1}{\tau^2}. \tag{1.157}$$

Последний факт означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде (т.е. через конечную комбинацию квадратур). При этом общее решение уравнения (1.157) зависит от произвольной постоянной C_2. Полные выкладки в данном месте приводить не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (1.157), даже в частном случае $b = C_1 = 2$ имеет следующее решение:

$$p = p_0(u_2) = C[\sqrt{1-(u_2-1)^2} \pm 1] \exp\left[\sqrt{\frac{1 \mp \sqrt{1-(u_2-1)^2}}{1 \pm \sqrt{1-(u_2-1)^2}}}\right], \quad C = \mathrm{const}. \tag{1.158}$$

Замечание 1.10. В выражение найденного первого интеграла формально можно вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (1.151). Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующую структуру:

$$\Theta_2(w_4, w_3; \alpha) = \ln|\sin\alpha| + G_2\left(\sin\alpha, \frac{w_4}{\sin\alpha}, \frac{w_3}{\sin\alpha}\right) = C_2 = \mathrm{const}. \tag{1.159}$$

Итак, найдены два первых интеграла (1.151), (1.159) независимой системы третьего порядка (1.137)—(1.139). Осталось указать по одному первому интегралу: для систем (1.140), (1.141), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (1.142). Действительно, искомые первые интегралы совпадают с первыми интегралами (1.133)—(1.135), а именно:

$$\Theta_3(w_2; \beta_2) = \frac{\sqrt{1+w_2^2}}{\sin\beta_2} = C_3 = \mathrm{const}, \tag{1.160}$$

$$\Theta_4(w_1; \beta_1) = \frac{\sqrt{1+w_1^2}}{\sin\beta_1} = C_4 = \mathrm{const}, \tag{1.161}$$

$$\Theta_5(w_2, w_1; \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \beta_3 \pm \mathrm{arctg}\,\frac{C_4\cos\beta_2}{\sqrt{C_3^2\sin^2\beta_2 - C_4^2}} = C_5 = \mathrm{const}, \tag{1.162}$$

при этом в левую часть равенства (1.162) вместо C_3, C_4 можно подставить интегралы (1.160), (1.161).

Теорема 1.8. *Система* (1.137)—(1.142) *восьмого порядка обладает достаточным количеством* (пятью) *независимых первых интегралов* (1.151), (1.159), (1.160)—(1.162).

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (1.4)—(1.8), (1.11)—(1.20) при условии (1.52) имеет 12 инвариантных соотношений: имеются аналитическая неинтегрируемая связь вида (1.24), соответствующая аналитическому первому интегралу (1.64), циклические первые интегралы вида (1.22), (1.23), первый интеграл вида (1.151), также имеется первый интеграл (1.159), который может быть найден из уравнения (1.157), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и, наконец, трансцендентные первые интегралы вида (1.160)—(1.162).

Теорема 1.9. *Система* (1.4)—(1.8), (1.11)—(1.20) *при условиях* (1.24), (1.52), (1.22), (1.23) *обладает 12 инвариантными соотношениями (полным набором), пять из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа.*

7. Случай зависимости момента неконсервативных сил от тензора угловой скорости.

7.1. Введение зависимости от тензора угловой скорости и приведенная система. Продолжаем изучать динамику пятимерного твердого тела в евклидовом пространстве $\mathbf{E}^5$. Но, поскольку данный раздел посвящен исследованию случая движения при наличии зависимости момента действующих сил от тензора угловой скорости, введем такую зависимость с более общих позиций.

Пусть $x = (x_{1N}, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N}, x_{5N})$ — координаты точки N приложения внешней силы на тело (в частности, на четырехмерный диск, задаваемый равенством $x_{1N} = 0$), $Q = (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5)$ — компоненты, не зависящие от тензора угловой скорости. Будем вводить зависимость функций $x = (x_{1N}, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N}, x_{5N})$ от тензора угловой скорости лишь линейным образом, поскольку даже само данное введение априори не очевидно (см. [25, 29, 37]).

Итак, примем следующую зависимость:

$$x = Q + R, \tag{1.163}$$

где $R = (R_1, R_2, R_3, R_4, R_5)$ — вектор-функция, содержащая компоненты тензора угловой скорости. При этом зависимость функции R от компонент тензора угловой скорости — гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{v}\Omega h, \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{10} & \omega_9 & -\omega_7 & \omega_4 \\ \omega_{10} & 0 & -\omega_8 & \omega_6 & -\omega_3 \\ -\omega_9 & \omega_8 & 0 & -\omega_5 & \omega_2 \\ \omega_7 & -\omega_6 & \omega_5 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_4 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.164}$$

Здесь $\Omega \in \mathrm{so}(5)$ — тензор угловой скорости, $(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5)$ — некоторые положительные параметры (ср. с [41, 51, 55]). Теперь, применительно к нашей задаче, можно считать, что $x_{1N} \equiv 0$, при этом

$$x_{2N} = Q_2 - h_1\frac{\omega_{10}}{v}, \quad x_{3N} = Q_3 + h_1\frac{\omega_9}{v}, \quad x_{4N} = Q_4 - h_1\frac{\omega_7}{v}, \quad x_{5N} = Q_5 + h_1\frac{\omega_4}{v}, \tag{1.165}$$

где $h_2 = h_3 = h_4 = h_5$, в силу динамической симметрии (что, в принципе, нам в данном месте не потребуется). Здесь ω_4, ω_7, ω_7, ω_{10} — оставшиеся, вообще говоря, ненулевые компоненты тензора угловой скорости Ω.

7.2. Приведенная система. Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина (см. [29, 33]), пользуясь (1.38), имеем

$$Q = R(\alpha)\mathbf{i}_N, \tag{1.166}$$

а динамические функции s, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N}, x_{5N} примем в виде

$$s(\alpha) = B\cos\alpha, \quad \mathbf{r}_N = Q - \frac{1}{v}\Omega h, \quad R(\alpha) = A\sin\alpha, \quad A, B > 0, \tag{1.167}$$

убеждающем нас о том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т.е. присутствует зависимость момента от компонент тензора угловой скорости). При этом функции $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \Omega/v)$, $\Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \Omega/v)$, $s = 1, 2, 3$, входящие в систему (1.41)—(1.48), примут следующий вид:

$$\begin{gathered} \Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) = A\sin\alpha - \frac{h_1}{v}z_{n-1}, \qquad \Delta_{v,1}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) = \frac{h_1}{v}z_3, \\ \Delta_{v,2}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) = -\frac{h_1}{v}z_2, \qquad \Delta_{v,3}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) = \frac{h_1}{v}z_1. \end{gathered} \tag{1.168}$$

Тогда, благодаря условиям (1.24), (1.167), преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (1.40)—(1.48)) примет вид аналитической системы

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z), \tag{1.169}$$

$$\alpha' = -Z_4 + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha - bH_1Z_4\cos^2\alpha, \tag{1.170}$$

$$Z_4' = \sin\alpha\cos\alpha - (1 + bH_1)(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_4(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha - \\ - bZ_4\sin^2\alpha\cos\alpha + bH_1Z_4^2\sin\alpha\cos\alpha - H_1Z_4\cos\alpha, \tag{1.171}$$

$$Z_3' = (1 + bH_1)Z_3Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (1 + bH_1)(Z_1^2 + Z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + bZ_3(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha - \\ - bZ_3\sin^2\alpha\cos\alpha + bH_1Z_3Z_4\sin\alpha\cos\alpha - H_1Z_3\cos\alpha, \tag{1.172}$$

$$Z_2' = (1 + bH_1)Z_2Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - (1 + bH_1)Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - (1 + bH_1)Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\ + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha - bZ_2\sin^2\alpha\cos\alpha + bH_1Z_2Z_4\sin\alpha\cos\alpha - H_1Z_2\cos\alpha, \tag{1.173}$$

$$Z_1' = (1 + bH_1)Z_1Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - (1 + bH_1)Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + (1 + bH_1)Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\ + bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha - bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha + bH_1Z_1Z_4\sin\alpha\cos\alpha - H_1Z_1\cos\alpha, \tag{1.174}$$

$$\beta_1' = (1 + bH_1)Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{1.175}$$

$$\beta_2' = -(1 + bH_1)Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{1.176}$$

$$\beta_3' = (1 + bH_1)Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3}, \tag{1.177}$$

где

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z) = -b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha + b\sin^2\alpha\cos\alpha - bH_1Z_4\sin\alpha\cos\alpha;$$

при этом выберем, как и выше, безразмерные параметры b, H_1 и постоянную n_1 следующим образом:

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{3I_2}, \quad H_1 = \frac{Bh_1}{3I_2n_0}, \quad n_1 = n_0. \tag{1.178}$$

Итак, систему (1.169)—(1.177) можно рассматривать на фазовом девятимерном многообразии

$$W_1 = \mathbb{R}_+^1\{v\} \times T_*\mathbf{S}^4\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}, \tag{1.179}$$

т.е. на прямом произведении числового луча на касательное расслоение к четырехмерной сфере.

Видно, что в системе (1.169)—(1.177) девятого порядка образовалась независимая система (1.170)—(1.177) восьмого порядка на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^4\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ четырехмерной сферы $\mathbf{S}^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$. При этом в независимой системе (1.170)—(1.177) восьмого порядка образовалась еще одна независимая система (1.170)—(1.176) седьмого порядка на своем семимерном многообразии.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.10. *У динамической части уравнений движения при условиях* (1.21), (1.22)—(1.24) *выделяется динамическая система* (1.41)—(1.48) *на касательном расслоении*

$$T_*\mathbf{S}^4\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$$

четырехмерной сферы $\mathbf{S}^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$. *В частности, при условии* (1.167) *выделяется система* (1.170)—(1.177).

7.3. Об аналитическом первом интеграле. В силу (1.24) значение скорости центра масс является первым интегралом системы (1.29)—(1.35) (при условии (1.26)), а именно, функция фазовых переменных

$$\Psi_0(v,\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,z_1,z_2,z_3,z_4)=v^2+\sigma^2(z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2)-2\sigma z_4 v\sin\alpha=V_C^2 \tag{1.180}$$

постоянна на ее фазовых траекториях (при этом величины z_1, z_2, z_3, z_4 выбираются в силу (1.28)).

В силу невырожденной замены независимого переменного (при $v\neq 0$) у системы (1.169)—(1.177) также существует аналитический интеграл, а именно, функция фазовых переменных

$$\Psi_1(v,\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4)=v^2(1+b^2(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)-2bZ_4\sin\alpha)=V_C^2 \tag{1.181}$$

постоянна на ее фазовых траекториях.

Равенство (1.181) позволяет, не решая системы (1.169)—(1.177), найти зависимость скорости характерной точки твердого тела (центра D диска) от других фазовых переменных, а именно, при $V_C\neq 0$ выполнено равенство

$$v^2=\frac{V_C^2}{1+b^2(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)-2bZ_4\sin\alpha}. \tag{1.182}$$

Поскольку в фазовом пространстве системы (1.169)—(1.177) существуют асимптотические предельные множества, то равенство (1.181) задает, как будет показано, единственный аналитический (даже непрерывный) первый интеграл системы (1.169)—(1.177) во всем фазовом пространстве (ср. с [67, 68, 70]).

Таким образом, в силу отделения уравнения на величину v, а также наличия аналитического первого интеграла (1.181) система (1.170)—(1.177) может быть рассмотрена самостоятельно на своем фазовом пространстве.

7.4. Полный список первых интегралов. Для полного интегрирования системы (1.170)—(1.177) восьмого порядка необходимо знать, вообще говоря, *семь* независимых первых интегралов. Но рассматриваемые системы имеют такие симметрии, которые позволяют снизить достаточное количество первых интегралов до *пяти* для интегрирования систем.

Действительно, после замены переменных

$$\begin{pmatrix}Z_4\\Z_3\\Z_2\\Z_1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}w_4\\w_3\\w_2\\w_1\end{pmatrix},\quad w_4=Z_4,\quad w_3=\sqrt{Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2},\quad w_2=\frac{Z_2}{Z_1},\quad w_1=\frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2+Z_2^2}}, \tag{1.183}$$

система (1.170)—(1.177) распадается следующим образом:

$$\alpha'=-(1+bH_1)w_4+b\left(w_3^2+w_4^2\right)\sin\alpha+b\sin\alpha\cos^2\alpha-bH_1w_4\cos^2\alpha, \tag{1.184}$$

$$\begin{aligned}w_4'=\sin\alpha\cos\alpha-(1+bH_1)w_3^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+bw_4\left(w_3^2+w_4^2\right)\cos\alpha-\\-bw_4\sin^2\alpha\cos\alpha+bH_1w_4^2\sin\alpha\cos\alpha-H_1w_4\cos\alpha,\end{aligned} \tag{1.185}$$

$$\begin{aligned}w_3'=(1+bH_1)w_3w_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+bw_3\left(w_3^2+w_4^2\right)\cos\alpha-\\-bw_3\sin^2\alpha\cos\alpha+bH_1w_3w_4\sin\alpha\cos\alpha-H_1w_3\cos\alpha,\end{aligned} \tag{1.186}$$

$$\begin{cases}w_2'=d_2(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3)\dfrac{1+w_2^2}{w_2}\dfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2},\\ \beta_2'=d_2(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3),\end{cases} \tag{1.187}$$

$$\begin{cases} w_1' = d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \dfrac{1 + w_1^2}{w_1} \dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \\ \beta_2' = d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{cases} \tag{1.188}$$

$$\beta_3' = d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \tag{1.189}$$

где выполнены условия

$$\begin{gathered} d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = (1 + bH_1) Z_3(w_4, w_3, w_2, w_1) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = -(1 + bH_1) Z_2(w_4, w_3, w_2, w_1) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha \sin\beta_1}, \\ d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = (1 + bH_1) Z_1(w_4, w_3, w_2, w_1) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha \sin\beta_1 \sin\beta_2}, \end{gathered} \tag{1.190}$$

при этом

$$z_k = Z_k(w_4, w_3, w_2, w_1), \quad k = 1, \ldots, n-2, \tag{1.191}$$

— функции в силу замены (1.183).

Видно, что система (1.184)—(1.189) восьмого порядка распадается на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (1.184)—(1.186) — третьего, а системы (1.187), (1.188) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (1.184)—(1.189) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.184)—(1.186), по одному — для систем (1.187), (1.188), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (1.189) (*т.е. всего пять*).

Для начала поставим в соответствие независимой подсистеме третьего порядка (1.184)—(1.186) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dw_4}{d\alpha} = \dfrac{R_2(\alpha, w_4, w_3)}{-w_4 + b(w_3^2 + w_4^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha - bH_1 w_4 \cos^2\alpha}, \\ \dfrac{dw_3}{d\alpha} = \dfrac{R_1(\alpha, w_3, w_4)}{-w_4 + b(w_3^2 + w_4^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha - bH_1 w_4 \cos^2\alpha}, \end{cases} \tag{1.192}$$

$$\begin{aligned} R_2(\alpha, w_3, w_4) = \sin\alpha\cos\alpha + b w_4 (w_3^2 + w_4^2)\cos\alpha - b w_4 \sin^2\alpha\cos\alpha - \\ - (1 + bH_1) w_3^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bH_1 w_4^2 \sin\alpha\cos\alpha - H_1 w_4 \cos\alpha, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1(\alpha, w_3, w_4) = b w_3 (w_3^2 + w_4^2)\cos\alpha - b w_3 \sin^2\alpha\cos\alpha + \\ + (1 + bH_1) w_3 w_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bH_1 w_3 w_4 \sin\alpha\cos\alpha - H_1 w_3 \cos\alpha. \end{aligned}$$

Используя замену $\tau = \sin\alpha$, перепишем систему (1.192) в алгебраическом виде

$$\begin{cases} \dfrac{dw_4}{d\tau} = \dfrac{\tau + b w_4 (w_3^2 + w_4^2) - b w_4 \tau^2 - (1 + bH_1) w_3^2/\tau + bH_1 w_4^2 \tau - H_1 w_4}{-w_4 + b\tau(1 - \tau^2) + b\tau(w_3^2 + w_4^2) - bH_1 w_4 (1 - \tau^2)}, \\ \dfrac{dw_3}{d\tau} = \dfrac{b w_3 (w_3^2 + w_4^2) - b w_3 \tau^2 + (1 + bH_1) w_3 w_4/\tau + bH_1 w_3 w_4 \tau - H_1 w_3}{-w_4 + b\tau(1 - \tau^2) + b\tau(w_3^2 + w_4^2) - bH_1 w_4 (1 - \tau^2)}. \end{cases} \tag{1.193}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_3 = u_1 \tau, \quad w_4 = u_2 \tau, \tag{1.194}$$

приводим систему (1.193) к следующему виду:

$$\begin{cases} \tau \dfrac{du_2}{d\tau} + u_2 = \dfrac{1 - b u_2 \tau^2 + b u_2 (u_1^2 + u_2^2)\tau^2 - (1 + bH_1) u_1^2 - H_1 u_2 + bH_1 u_2^2 \tau^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2) - bH_1 u_2 (1 - \tau^2)}, \\ \tau \dfrac{du_1}{d\tau} + u_1 = \dfrac{b u_1 (u_1^2 + u_2^2)\tau^2 - b u_1 \tau^2 + (1 + bH_1) u_1 u_2 - H_1 u_1 + bH_1 u_1 u_2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2) - bH_1 u_2 (1 - \tau^2)}, \end{cases} \tag{1.195}$$

что эквивалентно

$$\begin{cases} \tau\dfrac{du_2}{d\tau} = \dfrac{1-(b+H_1)u_2+(1+bH_1)u_2^2-(1+bH_1)u_1^2}{-u_2+b\tau^2(u_1^2+u_2^2)+b(1-\tau^2)-bH_1u_2(1-\tau^2)}, \\ \tau\dfrac{du_1}{d\tau} = \dfrac{2(1+bH_1)u_1u_2-(b+H_1)u_1}{-u_2+b\tau^2(u_1^2+u_2^2)+b(1-\tau^2)-bH_1u_2(1-\tau^2)}. \end{cases} \tag{1.196}$$

Поставим в соответствие системе второго порядка (1.196) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1-(b+H_1)u_2+(1+bH_1)u_2^2-(1+bH_1)u_1^2}{2(1+bH_1)u_1u_2-(b+H_1)u_1}, \tag{1.197}$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{(1+bH_1)u_2^2+(1+bH_1)u_1^2-(b+H_1)u_2+1}{u_1}\right) = 0. \tag{1.198}$$

Итак, уравнение (1.197) имеет первый интеграл

$$\frac{(1+bH_1)u_2^2+(1+bH_1)u_1^2-(b+H_1)u_2+1}{u_1} = C_1 = \text{const}, \tag{1.199}$$

который в прежних переменных выглядит следующим образом:

$$\Theta_1(w_4, w_3; \alpha) = \frac{(1+bH_1)(w_4^2+w_3^2)-(b+H_1)w_4\sin\alpha+\sin^2\alpha}{w_3\sin\alpha} = C_1 = \text{const}. \tag{1.200}$$

Замечание 1.11. Рассмотрим систему (1.184)—(1.186) с переменной диссипацией с нулевым средним (см. [56, 58, 60]), становящейся консервативной при $b = H_1$:

$$\begin{cases} \alpha' = -(1+b^2)w_4 + b\left(w_3^2+w_4^2\right)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha - b^2w_4\cos^2\alpha, \\ w'_{n-1} = \sin\alpha\cos\alpha - (1+b^2)w_3^2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_4\left(w_3^2+w_4^2\right)\cos\alpha - \\ \qquad\qquad - bw_4\sin^2\alpha\cos\alpha + b^2w_4^2\sin\alpha\cos\alpha - bw_4\cos\alpha, \\ w'_3 = (1+b^2)w_3w_4\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_3\left(w_3^2+w_4^2\right)\cos\alpha - \\ \qquad\qquad - bw_3\sin^2\alpha\cos\alpha + b^2w_3w_4\sin\alpha\cos\alpha - bw_3\cos\alpha. \end{cases} \tag{1.201}$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$(1+b^2)(w_4^2+w_3^2) - 2bw_4\sin\alpha + \sin^2\alpha = C_1^* = \text{const}, \tag{1.202}$$

$$w_3\sin\alpha = C_2^* = \text{const}. \tag{1.203}$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (1.202), (1.203) также является первым интегралом системы (1.201). Но при $b \neq H_1$ каждая из функций

$$(1+bH_1)(w_4^2+w_3^2) - (b+H_1)w_4\sin\alpha + \sin^2\alpha \tag{1.204}$$

и (1.203) по отдельности не является первым интегралом системы (1.184)—(1.186). Однако отношение функций (1.204), (1.203) является первым интегралом системы (1.184)—(1.186) при любых b, H_1.

Далее, найдем дополнительный первый интеграл системы третьего порядка (1.184)—(1.186). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (1.199) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 - \frac{b+H_1}{2(1+bH_1)}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2(1+bH_1)}\right)^2 = \frac{(b-H_1)^2+C_1^2-4}{4(1+bH_1)^2}. \tag{1.205}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(b-H_1)^2 + C_1^2 - 4 \geqslant 0, \tag{1.206}$$

и фазовое пространство системы (1.184)—(1.186) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (1.205).

Таким образом, в силу соотношения (1.199) первое уравнение системы (1.196) примет вид

$$\tau\frac{du_2}{d\tau}=\frac{1-(b+H_1)u_2+(1+bH_1)u_2^2-(1+bH_1)U_1^2(C_1,u_2)}{-u_2+b(1-\tau^2)+b\tau^2(U_1^2(C_1,u_2)+u_2^2)-bH_1u_2(1-\tau^2)},\tag{1.207}$$

где

$$U_1(C_1,u_2)=\frac{1}{2}\{C_1\pm\sqrt{C_1^2-4(1+bH_1)(1-(b+H_1)u_2+(1+bH_1)u_2^2)}\},\tag{1.208}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (1.206), или вид уравнения Бернулли:

$$\frac{d\tau}{du_2}=\frac{(b-(1+bH_1)u_2)\tau-b\tau^3(1-U_1^2(C_1,u_2)-u_2^2-H_1u_2)}{1-(b+H_1)u_2+(1+bH_1)u_2^2-(1+bH_1)U_1^2(C_1,u_2)}.\tag{1.209}$$

Уравнение (1.209) (при учете (1.208)) легко приводится к линейному неоднородному уравнению

$$\frac{dp}{du_2}=\frac{2((1+bH_1)u_2-b)p+2b(1-H_1u_2-u_2^2-U_1^2(C_1,u_2))}{1-(b+H_1)u_2+(1+bH_1)u_2^2-(1+bH_1)U_1^2(C_1,u_2)},\quad p=\frac{1}{\tau^2}.\tag{1.210}$$

Последний факт означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде (т.е. через конечную комбинацию квадратур). При этом общее решение уравнения (1.210) зависит от произвольной постоянной C_2. Полные выкладки в данном месте приводить не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (1.210), даже в частном случае

$$|b-H_1|=2,\quad C_1=\frac{1-A_1^4}{1+A_1^4},\quad A_1=\frac{1}{2}(b+H_1)$$

имеет следующее достаточно громоздкое решение:

$$p=p_0(u_2)=C[1-A_1u_2]^{2/(1+A_1^4)}\left|\frac{\sqrt{C_1^2-4A_1^2(1-A_1u_2)^2}\pm C_1}{\sqrt{C_1^2-4A_1^2(1-A_1u_2)^2}\mp C_1}\right|^{\pm A_1^4/(1+A_1^4)}\times$$
$$\times\exp\frac{2(A_1-b)}{(1+A_1^4)A_1(A_1u_2-1)},\quad C=\text{const}.\tag{1.211}$$

Замечание 1.12. В выражение найденного первого интеграла формально можно вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (1.200). Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_4,w_3;\alpha)=\ln|\sin\alpha|+G_2\left(\sin\alpha,\frac{w_4}{\sin\alpha},\frac{w_3}{\sin\alpha}\right)=C_2=\text{const}.\tag{1.212}$$

Итак, найдены два первых интеграла (1.200), (1.212) независимой системы третьего порядка (1.184)—(1.186). Осталось указать по одному первому интегралу — для систем (1.187), (1.188) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (1.189).

Искомые первые интегралы имеют следующий вид:

$$\Theta_{s+2}(w_s;\beta_s)=\frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\sin\beta_s}=C''_{s+2}=\text{const},\quad s=1,2,\tag{1.213}$$

$$\Theta_5(w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=C''_5=\text{const},\tag{1.214}$$

при этом в левую часть равенства (1.214) вместо C_3, C_4 можно формально подставить интегралы (1.213) при $s=1,2$.

Теорема 1.11. *Система* (1.184)—(1.189) *восьмого порядка обладает достаточным количеством* (*пятью*) *независимых первых интегралов* (1.200)*,* (1.212)*,* (1.213)*,* (1.214)*.*

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений общего случая при условии (1.167) имеет 12 инвариантных соотношений: имеются аналитическая неинтегрируемая связь вида (1.24), соответствующая аналитическому первому интегралу (1.64), циклические первые интегралы вида (1.22), первый интеграл вида (1.200), также имеется первый интеграл (1.212), который может быть найден из уравнения (1.210), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и, наконец, трансцендентные первые интегралы вида (1.213), (1.214).

7.5. Топологические аналогии. Имеют место следующие топологические и механические аналогии.

1. Движение свободного пятимерного твердого тела в неконсервативном поле сил со следящей силой (при наличии неинтегрируемой связи) при учете дополнительной зависимости от тензора угловой скорости (см. также [65, 67]).
2. Движение закрепленного пятимерного физического маятника в потоке набегающей среды (неконсервативное поле сил) при учете дополнительной зависимости от тензора угловой скорости (см. также [68]).
3. Вращение пятимерного твердого тела вокруг центра масс, движущегося прямолинейно и равномерно, и находящегося в неконсервативном поле сил при учете дополнительной зависимости от тензора угловой скорости (см. также [52, 53]).

О более общих топологических аналогиях см. также [1, 4, 6, 18].

2. Более общий класс динамических систем на касательном расслоении четырехмерной сферы

Как мы знаем, в динамике систем со многими степенями свободы часто возникают системы с пространствами положений — конечномерными сферами. Таким образом, фазовыми пространствами таких систем становятся касательные расслоения к данным сферам. Так, например, изучение пятимерного маятника на обобщенном сферическом шарнире приводит к динамической системе на касательном расслоении к четырехмерной сфере. При этом динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций (см. [22, 23, 28]).

Рассматриваемые ранее автором задачи из динамики свободного пятимерного твердого тела в неконсервативном силовом поле также породили системы на касательном расслоении к четырехмерной сфере. При этом исследование проводилось, начиная от систем при отсутствии силового поля, и продолжалось системами при наличии неконсервативных силовых полей с дополнительными группами симметрий (см. [16, 17, 42, 43]).

Построение неконсервативного силового поля, действующего на пятимерное твердое тело, опирается на результаты из динамики реальных твердых тел, находящихся в поле силы воздействия среды. Становится возможным изучение уравнений движения для пятимерного тела в аналогично построенном поле сил и получение полного набора, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного силового поля (ср. с [65, 66]).

Естественным образом в рассматриваемый класс задач помещается классическая задача о движении материальной точки по поверхности четырехмерной сферы, вообще говоря, в неконсервативном поле сил.

В данном разделе 2 показана интегрируемость некоторых классов динамических систем, возникающих в динамике пятимерного твердого тела, а также в динамике точки, на касательном расслоении к четырехмерной сфере. При этом рассматриваемые силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией с нулевым средним (см. [44, 46, 48]) и обобщают ранее рассмотренные (см. также [57, 59]).

1. Уравнения геодезических на касательном расслоении к четырехмерному многообразию. Рассмотрим гладкое четырехмерное риманово многообразие M^4 с метрикой g_{ij}, которая в заданных локальных координатах $x = (x^1, \ldots, x^4)$ на многообразии порождает аффинную связность $\Gamma^i_{jk}(x)$. Рассмотрим касательное расслоение

$$T_*M^4\{z_4,\ldots,z_1;x^1,\ldots,x^4\},$$

где $z=(z_4,\ldots,z_1)$ — координаты в касательном пространстве. Если $z_i=\dot x^i$, $i=1,\ldots,4$, то уравнения геодезических линий на нем примут вид

$$\ddot x^i+\sum_{j,k=1}^{4}\Gamma^i_{jk}(x)\dot x^j\dot x^k=0,\quad i=1,\ldots,4. \tag{2.1}$$

2. Системы на касательном расслоении к четырехмерной сфере. На касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^4\{z_4,z_3,z_2,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ к четырехмерной сфере $\mathbf{S}^4\{\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3 : 0\leqslant\alpha,\ \beta_1,\beta_2\leqslant\pi,\ \beta_3 \bmod 2\pi\}$ рассмотрим следующую систему восьмого порядка:

$$\begin{cases}\dot\alpha=-z_4+bg(\alpha),\\ \dot z_4=F(\alpha)-(z_1^2+z_2^2+z_3^2)f(\alpha),\\ \dot z_3=z_3z_4f(\alpha)+(z_1^2+z_2^2)f(\alpha),\\ \dot z_2=z_2z_4f(\alpha)-z_2z_3f(\alpha)\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}-z_1^2f(\alpha)\dfrac{1}{\sin\beta_1}\dfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2},\\ \dot z_1=z_1z_4f(\alpha)-z_1z_3f(\alpha)\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+z_1z_2f(\alpha)\dfrac{1}{\sin\beta_1}\dfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2},\end{cases} \tag{2.2}$$

$$\begin{cases}\dot\beta_1=z_3f(\alpha),\\ \dot\beta_2=-z_2f(\alpha)\dfrac{1}{\sin\beta_1},\\ \dot\beta_3=z_1f(\alpha)\dfrac{1}{\sin\beta_1\sin\beta_2}.\end{cases} \tag{2.3}$$

Функции $F(\alpha)$, $f(\alpha)$ и $g(\alpha)$ — 2π-периодические, достаточно гладкие, за исключением, быть может, точек $\alpha=0 \bmod \pi/2$, $b\geqslant 0$. Функция $f(\alpha)$ определяет метрику на сфере, а функции $F(\alpha)$ и $g(\alpha)$ — (внешнее) силовое поле. О задачах как с внешним, так и внутренним полями см. также в [8, 10, 12].

Первое уравнение системы (2.2) и система (2.3) задают координаты $z_4,\ldots,z_1$ в касательном пространстве к сфере (являются обобщенными кинематическими соотношениями). При этом система (2.2), (2.3) без последнего уравнения является независимой подсистемой седьмого порядка (ввиду цикличности переменной β_3) (см. также [26, 27]).

Систему (2.2), (2.3) можно представить в маятниковом виде

$$\begin{cases}\ddot\alpha-b\dot\alpha\tilde g(\alpha)+F(\alpha)-[\dot\beta_1^2+\dot\beta_2^2\sin^2\beta_1+\dot\beta_3^2\sin^2\beta_1\sin^2\beta_2]\dfrac{1}{f(\alpha)}=0,\\ \ddot\beta_1-b\dot\beta_1g(\alpha)f(\alpha)+\dot\alpha\dot\beta_1\left[\dfrac{f^2(\alpha)-f'(\alpha)}{f(\alpha)}\right]-\left[\dot\beta_2^2+\dot\beta_3^2\sin^2\beta_2\right]\sin\beta_1\cos\beta_1=0,\\ \ddot\beta_2-b\dot\beta_2g(\alpha)f(\alpha)+\dot\alpha\dot\beta_2\left[\dfrac{f^2(\alpha)-f'(\alpha)}{f(\alpha)}\right]+2\dot\beta_1\dot\beta_2\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}-\dot\beta_3^2\sin\beta_2\cos\beta_2=0,\\ \ddot\beta_3-b\dot\beta_3g(\alpha)f(\alpha)+\dot\alpha\dot\beta_3\left[\dfrac{f^2(\alpha)-f'(\alpha)}{f(\alpha)}\right]+2\dot\beta_1\dot\beta_3\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+2\dot\beta_2\dot\beta_3\dfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}=0,\end{cases} \tag{2.4}$$

где $\tilde g(\alpha)=dg(\alpha)/d\alpha$.

3. Первые интегралы, метрики и силовые поля. При $b=0$ система (2.2), (2.3) является консервативной и обладает полным набором (пятью) первых интегралов (см. [49, 50, 54]):

$$F_1(z_4,z_3,z_2,z_1;\alpha)=z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2+2\int_{\alpha_0}^{\alpha}F(\xi)d\xi=C_1=\mathrm{const}, \tag{2.5}$$

$$F_2(z_3, z_2, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2} \exp \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi) d\xi = C_2 = \text{const}, \tag{2.6}$$

$$F_3(z_2, z_1; \alpha, \beta_1) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \exp \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi) d\xi \cdot \sin \beta_1 = C_3 = \text{const}, \tag{2.7}$$

$$F_4(z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) = z_1 \exp \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi) d\xi \cdot \sin \beta_1 \sin \beta_2 = C_4 = \text{const}, \tag{2.8}$$

$$F_5(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5 = \text{const}. \tag{2.9}$$

При $b > 0$ система (2.2), (2.3) перестает быть консервативной и является динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним (см. также [36, 38, 45]).

Выделим два существенных случая для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на сфере:

$$f(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \tag{2.10}$$

а также

$$f(\alpha) = \frac{1}{\cos \alpha \sin \alpha}. \tag{2.11}$$

Случай (2.10) формирует класс систем, соответствующих пространственному движению динамически симметричного пятимерного твердого тела на нулевых уровнях первых интегралов (т.е. при наличии дополнительных групп симметрий), вообще говоря, в неконсервативном поле сил (см. [47, 69] и предыдущий раздел 1 данной работы).

Случай (2.11) формирует класс систем, соответствующих движению материальной точки на четырехмерной сфере также, вообще говоря, в неконсервативном поле сил. При этом в последнем случае метрика на сфере индуцируется евклидовой метрикой всеобъемлющего пятимерного пространства. В частности, при $g(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ система (2.2), (2.3) описывает геодезический поток на четырехмерной сфере (см. также [2, 3]).

Замечание 2.1. В случае (2.10), если

$$g(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{\cos \alpha}, \tag{2.12}$$

то система (2.2), (2.3) описывает движение свободного пятимерного твердого тела в силовом поле под действием следящей силы (см. [41]). В частности, если

$$F(\alpha) = \sin \alpha \cos \alpha, \quad g(\alpha) = \sin \alpha, \tag{2.13}$$

то система (2.2), (2.3) описывает также закрепленный пятимерный маятник на обобщенном сферическом шарнире, помещенный в поток набегающей среды, заполняющей пятимерное пространство (см. [67, 68]), и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций (см. [30, 40]). Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда функция имеет существенно особые точки, соответствующие имеющимся притягивающим или отталкивающим предельным множествам системы (2.2), (2.3) (см. [67, 68]).

Для полного интегрирования системы (2.2), (2.3) необходимо знать, вообще говоря, *семь* независимых первых интегралов. Однако после замены переменных в касательном пространстве

$$w_1 = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, \quad w_2 = \frac{z_2}{z_1}, \quad w_3 = w = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}, \quad w_4 = z_4 \tag{2.14}$$

система (2.2), (2.3) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -w_4 + g(\alpha), \\ \dot{w}_4 = F(\alpha) - w_3^2 f(\alpha), \\ \dot{w}_3 = w_3 w_4 f(\alpha), \end{cases} \tag{2.15}$$

$$\begin{cases} \dot{w}_k = d_k \dfrac{1+w_k^2}{w_k} \dfrac{\cos\beta_k}{\sin\beta_k}, \\ \dot{\beta}_k = d_k, \quad k = 1,2, \end{cases} \tag{2.16}$$

$$\dot{\beta}_3 = \mathcal{Z}_1(w_1, w_2, w_3, w_4) f(\alpha) \frac{1}{\sin\beta_1 \sin\beta_2}, \tag{2.17}$$

где $\mathcal{Z}_1(w_1, w_2, w_3, w_4) = z_1$ в силу замены (2.14), d_k, $k = 1, 2,$ — некоторые гладкие функции на своей области определения.

Видно, что для полной интегрируемости системы (2.15)—(2.17) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (2.15), по одному — для систем (2.16), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (2.17) (*т.е. всего пять*).

4. Случай (2.10)**.** Пусть выполнены следующие условия на силовое поле:

$$F(\alpha) = \sin^m \alpha \cos\alpha, \quad g(\alpha) = \sin^a \alpha, \quad m = 2a - 1, \quad m, a \in \mathbb{R}. \tag{2.18}$$

В частности, при $m = a = 1$ получаем случай (2.13).

Теорема 2.1. *В случаях* (2.10), (2.18) *система* (2.2), (2.3) *обладает полным набором* (*пятью*)*, вообще говоря, трансцендентных независимых первых интегралов.*

Следствие 2.1. *Система* (2.4) *при условиях* (2.10), (2.18) *обладает пятью, вообще говоря, трансцендентными независимыми первыми интегралами.*

Действительно, если сделать замены переменных

$$\tau = \sin\alpha, \quad z_i = u_i \tau^a, \quad i = 1, 2,$$

то поиск одного из первых интегралов

$$\Phi_1(w_4, w_3; \alpha) = C_1$$

системы (2.15) приведет к уравнению Абеля (см. [6])

$$[(a+1)u_2 - ab]u_1 du_2 = [1 - u_1^2 + au_2^2 - abu_2]du_1, \tag{2.19}$$

общее решение которого $u_1 = U_1(u_2)$ если и интегрируется через конечную комбинацию элементарных функций, то выписывается, вообще говоря, громоздко. Несмотря на это, дополнительный первый интеграл

$$\Phi_2(w_4, w_3; \alpha) = C_2$$

системы (2.15) находится из квадратуры

$$\frac{d\tau}{\tau} = \frac{(b - u_2)du_2}{1 - U_1^2(u_2) + au_2^2 - abu_2}. \tag{2.20}$$

Первые интегралы для систем (2.16) имеют вид

$$\Phi_{k+2}(w_k; \beta_k) = \frac{\sqrt{1 + w_k^2}}{\sin\beta_k} = C_{k+2} = \mathrm{const}, \quad k = 1, 2, \tag{2.21}$$

а дополнительный первый интеграл

$$\Phi_5(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5,$$

«привязывающий» уравнение (2.17), найдется из равенства

$$\frac{d\beta_3}{d\beta_2} = -\frac{z_1}{z_2 \sin\beta_2}, \tag{2.22}$$

при этом, используя первый интеграл (2.21) при $k = 1, 2$, окончательно получим его вид:

$$\Phi_5(\beta_2, \beta_3) = \beta_3 \pm \operatorname{arctg} \frac{C_4 \cos\beta_2}{\sqrt{C_3^2 \sin^2\beta_2 - C_4^2}} = C_5 = \mathrm{const}. \tag{2.23}$$

В частности, при $a = 1$ равенство (2.19) влечет существование первого интеграла

$$\Phi_1\left(\frac{w_4}{\sin\alpha}, \frac{w_3}{\sin\alpha}\right) = \frac{w_4^2 + w_3^2 - bw_4\sin\alpha + \sin^2\alpha}{w_3\sin\alpha} = C_1 = \text{const}.$$

5. Случай (2.11)**.** Пусть выполнены следующие условия на силовое поле:

$$F(\alpha) = \frac{\sin^{2k-1}\alpha}{\cos^{2k+1}\alpha}, \quad g(\alpha) = \frac{\sin^k\alpha}{\cos^k\alpha}, \quad k \in \mathbb{R}. \tag{2.24}$$

Теорема 2.2. *В случаях* (2.11), (2.24) *система* (2.2), (2.3) *обладает полным набором* (*пятью*)*, вообще говоря, трансцендентных независимых первых интегралов.*

Следствие 2.2. *Система* (2.4) *при условиях* (2.11), (2.24) *обладает пятью, вообще говоря, трансцендентными независимыми первыми интегралами.*

Действительно, если сделать замены переменных

$$\tau = \sin\alpha, \quad z_i = u_i\left(\frac{\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\right)^k, \quad i = 1, 2,$$

то поиск одного из первых интегралов

$$\Phi_1(w_4, w_3; \alpha) = C_1$$

системы (2.15) приведет к уравнению Абеля (2.19) (только с подстановкой $a \leftrightarrow k$), общее решение которого $u_1 = U_1(u_2)$ выписывается, вообще говоря, громоздко. Несмотря на это, дополнительный первый интеграл

$$\Phi_2(w_4, w_3; \alpha) = C_2$$

системы (2.15) находится из квадратуры

$$\frac{d\tau}{\tau(1-\tau^2)} = \frac{(b-u_2)du_2}{1 - U_1^2(u_2) + ku_2^2 - kbu_2}.$$

Первые интегралы для систем (2.16) имеют вид (2.20). А дополнительный первый интеграл

$$\Phi_5(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5,$$

«привязывающий» уравнение (2.17), найдется из равенства (2.22), при этом, используя первый интеграл (2.21) при $k = 1, 2$, окончательно получим его в виде (2.23).

В частности, при $k = 1$ равенство (2.19) ($a \leftrightarrow k$) влечет существование первого интеграла

$$\Phi_1\left(\frac{w_4\cos\alpha}{\sin\alpha}, \frac{w_3\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = \frac{(w_4^2 + w_3^2)\cos^2\alpha - bw_4\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha}{w_3\sin\alpha\cos\alpha} = C_1 = \text{const}.$$

В предыдущих работах автора [67, 68] уже рассматривались задачи о движении свободного пятимерного твердого тела в неконсервативном поле сил при наличии следящей силы, сводящиеся к динамическим системам на касательных расслоениях к четырехмерной сфере. Данная работа присоединяет к данной задаче динамики многомерного твердого тела задачу о движении точки по четырехмерной сфере в неконсервативных силовых полях.

3. Системы на касательных расслоениях к гладкому четырехмерному многообразию

Выше было показано, что изучение пятимерного обобщенного сферического маятника в неконсервативном поле сил приводит к динамической системе на касательном расслоении к четырехмерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий. В данном случае динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают диссипацией переменного знака, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Выше был также введен класс задач о движении точки по гладкой четырехмерной поверхности, при этом метрика на ней индуцирована евклидовой метрикой всеобъемлющего пространства.

В ряде случаев в системах с силовым полем с диссипацией также удается найти полный список первых интегралов, состоящий из трансцендентных функций. Необходимо отметить, что полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил (ср. с [5, 7, 20]).

В данном же разделе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательном расслоении к гладкому четырехмерному многообразию (об аналогичных исследованиях на касательных расслоениях к многообразиям размерностей 2 и 3 см. [55, 57]). При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией и обобщают ранее рассмотренные.

1. Уравнения геодезических при замене координат и их первые интегралы. Как известно, в случае четырехмерного гладкого риманова многообразия M^4 с координатами (α, β), $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, и аффинной связностью $\Gamma^i_{jk}(x)$ уравнения геодезических линий на касательном расслоении $T_*M^4\{\dot\alpha, \dot\beta_1, \dot\beta_2, \dot\beta_3; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, $\alpha = x^1$, $\beta_1 = x^2$, $\beta_2 = x^3$, $\beta_3 = x^4$, $x = (x^1, x^2, x^3, x^4)$, имеют следующий вид (дифференцирование берется по натуральному параметру):

$$\ddot x^i + \sum_{j,k=1}^{4} \Gamma^i_{jk}(x)\dot x^j \dot x^k = 0, \quad i = 1, \dots, 4. \tag{3.1}$$

Изучим структуру уравнений (3.1) при изменении координат на касательном расслоении T_*M^4. Рассмотрим замену координат касательного пространства, зависящую от точки x многообразия:

$$\dot x^i = \sum_{j=1}^{4} R^{ij}(x) z_j, \tag{3.2}$$

которую почти всюду можно обратить:

$$z_j = \sum_{i=1}^{4} T_{ji}(x)\dot x^i,$$

при этом R^{ij}, T_{ji}, $i, j = 1, \dots, 4$, — функции от x^1, x^2, x^3, x^4, а также $RT = E$, где $R = (R^{ij})$, $T = (T_{ji})$. Назовем также уравнения (3.2) *новыми кинематическими соотношениями*, т.е. соотношениями на касательном расслоении T_*M^4.

Справедливы следующие тождества:

$$\dot z_j = \sum_{i=1}^{4} \dot T_{ji}\dot x^i + \sum_{i=1}^{4} T_{ji}\ddot x^i, \quad \dot T_{ji} = \sum_{k=1}^{4} T_{ji,k}\dot x^k, \tag{3.3}$$

где

$$T_{ji,k} = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x^k}, \quad j, i, k = 1, \dots, 4.$$

Подставляя в (3.3) уравнения (3.1), имеем:

$$\dot z_i = \sum_{j,k=1}^{4} T_{ij,k}\dot x^j \dot x^k - \sum_{j,p,q=1}^{4} T_{ij}\Gamma^j_{pq}\dot x^p \dot x^q, \tag{3.4}$$

при этом в последней системе вместо $\dot x^i$, $i = 1, \dots, 4$, надо подставить формулы (3.2), в результате чего в правой части последнего равенства будет стоять квадратичная форма по переменнымЁz_j. Другими словами, равенство (3.4) можно переписать в виде

$$\dot z_i + \sum_{j,k=1}^{4} Q_{ijk}\dot x^j \dot x^k|_{(3.2)} = 0, \tag{3.5}$$

где

$$Q_{ijk}(x) = \sum_{s=1}^{4} T_{is}(x)\Gamma^s_{jk}(x) - T_{ij,k}(x). \tag{3.6}$$

Предложение 3.1. *Система* (3.1) *в той области, где* $\det R(x) \neq 0$, *эквивалентна составной системе* (3.2), (3.4).

Таким образом, результат перехода от уравнений геодезических (3.1) к эквивалентной системе уравнений (3.2), (3.4) зависит как от замены переменных (3.2) касательного пространства (т.е. вводимых новых кинематических соотношений), так и от аффинной связности $\Gamma^i_{jk}(x)$.

2. Достаточно общий случай. Рассмотрим далее достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде:

$$\dot\alpha = -z_4, \quad \dot\beta_1 = z_3 f_1(\alpha), \quad \dot\beta_2 = z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \quad \dot\beta_3 = z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2), \tag{3.7}$$

где $f_k(\alpha)$, $k = 1, 2, 3$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2$, $h(\beta_2)$ — гладкие функции на своей области определения. Такие координаты z_1, z_2, z_3, z_4 в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются следующие классы уравнений геодезических, в частности, на сфере, более общих поверхностях вращения и др. (см. [6, 27]):

$$\begin{cases} \ddot\alpha + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0, \\ \ddot\beta_1 + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0, \\ \ddot\beta_2 + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2 + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0, \\ \ddot\beta_3 + 2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_3 + 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_3 + 2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)\dot\beta_2\dot\beta_3 = 0, \end{cases} \tag{3.8}$$

т.е. остальные коэффициенты связности равны нулю. В случае (3.7) уравнения (3.4) примут вид

$$\dot z_1 = \left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_4 - \left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1(\alpha) z_1 z_3 - \\ - \left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] f_2(\alpha) g_1(\beta_1) z_1 z_2, \tag{3.9a}$$

$$\dot z_2 = \left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_4 - \left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1(\alpha) z_2 z_3 - \\ - \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2) z_1^2, \tag{3.9b}$$

$$\dot z_3 = \left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_3 z_4 - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) z_2^2 - \\ - \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) z_1^2, \tag{3.9c}$$

$$\dot z_4 = \Gamma^\alpha_{11} f_1^2(\alpha) z_3^2 + \Gamma^\alpha_{22} f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) z_2^2 + \Gamma^\alpha_{33} f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) z_1^2, \tag{3.9d}$$

и уравнения (3.8) почти всюду эквивалентны составной системе (3.7), (3.9) на касательном расслоении $T_*M^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ гладкого четырехмерного многообразия $M^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$.

Для полного интегрирования системы (3.7), (3.9) необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. В нашем случае их нужно будет меньше, что будет показано далее при изучении систем с диссипацией.

Предложение 3.2. *Если всюду на своей области определения справедлива система равенств*

$$\begin{cases} 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)f_1^2(\alpha) \equiv 0, \\ 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1) \equiv 0, \\ \left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1^2(\alpha) + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1) \equiv 0, \\ 2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2) \equiv 0, \\ \left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1^2(\alpha) + \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2) \equiv 0, \\ \left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1) + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2) \equiv 0, \end{cases} \tag{3.10}$$

то система (3.7), (3.9) *имеет аналитический первый интеграл вида*

$$\Phi_1(z_4,\ldots,z_1) = z_1^2 + \ldots + z_4^2 = C_1^2 = \text{const}. \tag{3.11}$$

На первый взгляд, вопрос наличия первого интеграла достаточно простого вида (3.11) не «заслуживает» решения такой достаточно сложной системы квазилинейных уравнений (3.10) (которая содержит, вообще говоря, уравнения в частных производных, вырождающиеся в обыкновенные). В работе будет применен подход, позволяющий с помощью решения системы (3.10) успешно находить полные наборы первых интегралов систем с диссипацией.

Можно доказать отдельную теорему существования решения $f_k(\alpha)$, $k=1,2,3$, $g_l(\beta_1)$, $l=1,2$, $h(\beta_2)$ системы (3.10) квазилинейных уравнений для наличия аналитического первого интеграла (3.11) для системы (3.7), (3.9) уравнений геодезических (3.8). Но в дальнейшем при изучении динамических систем с диссипацией полная группа условий (3.10) нам не потребуется. Тем не менее, в дальнейшем будем предполагать в уравнениях (3.7) выполнение условий

$$f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = f_3(\alpha) = f(\alpha), \tag{3.12}$$

при этом функции $g_l(\beta_1)$, $l=1,2$, $h(\beta_2)$ должны удовлетворять преобразованным уравнениям из (3.10):

$$\begin{cases} 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1} + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)g_1^2(\beta_1) \equiv 0, \\ 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1} + \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2) \equiv 0, \\ 2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2} + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)h^2(\beta_2) \equiv 0. \end{cases} \tag{3.13}$$

Таким образом, функции $g_l(\beta_1)$, $l=1,2$, $h(\beta_2)$ зависят от коэффициентов связности через систему (3.13), а ограничения на функцию $f(\alpha)$ будут даны ниже.

Предложение 3.3. *Если выполнены свойства* (3.12), (3.13), *при этом справедливы равенства*

$$\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) = \Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) = \Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) = \Gamma_1(\alpha), \tag{3.14}$$

то система (3.7), (3.9) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида:*

$$\Phi_2(z_3,z_2,z_1;\alpha) = \sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2}\;\Phi_0(\alpha) = C_2 = \text{const}, \tag{3.15}$$

$$\Phi_0(\alpha) = f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\}.$$

Предложение 3.4. *Если выполнены условия предложения* 3.3, *а также*

$$g_1(\beta_1) = g_2(\beta_1) = g(\beta_1), \tag{3.16}$$

при этом справедливы равенства

$$\Gamma^2_{12}(\alpha, \beta) = \Gamma^3_{13}(\alpha, \beta) = \Gamma_2(\beta_1), \tag{3.17}$$

то система (3.7), (3.9) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_3(z_2, z_1; \alpha, \beta_1) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1) = C_3 = \mathrm{const}, \tag{3.18}$$

$$\Psi_1(\beta_1) = g(\beta_1) \exp\left\{2\int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1} \Gamma_2(b)db\right\}.$$

Предложение 3.5. *Если выполнены условия предложений* 3.3, 3.4 *и при этом справедливо равенство*

$$\Gamma^3_{23}(\alpha, \beta) = \Gamma_3(\beta_2), \tag{3.19}$$

то система (3.7), (3.9) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_4(z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) = z_1\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\Psi_2(\beta_2) = C_4 = \mathrm{const}, \tag{3.20}$$

$$\Psi_2(\beta_2) = h(\beta_2) \exp\left\{2\int\limits_{\beta_{20}}^{\beta_2} \Gamma_3(b)db\right\}.$$

Предложение 3.6. *Если выполнены условия предложений* 3.3, 3.4, 3.5, *то система* (3.7), (3.9) *имеет первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_5(z_2, z_1; \alpha, \beta) = \beta_3 \pm \int\limits_{\beta_{20}}^{\beta_2} \frac{C_4 h(b)}{\sqrt{C_3^2\Phi_2^2(b) - C_4^2}}\, db = C_5 = \mathrm{const}, \tag{3.21}$$

куда после взятия интеграла (3.21) *вместо постоянных* C_3, C_4 *нужно подставить левые части равенств* (3.18), (3.20), *соответственно.*

Набор первых интегралов (3.11), (3.15), (3.18), (3.20), (3.21) является полным набором независимых первых интегралов системы (3.7), (3.9) при вышеперечисленных условиях (то, что полный набор состоит из пяти, а не из семи, первых интегралов, будет показано ниже).

Как и выше, необходимо отметить, что вопрос о гладкости первого интеграла (3.21) не так прост. В принципе, он может выражаться через конечную комбинацию элементарных функций и даже являться функцией рациональной. Но поскольку в рассматриваемой динамической системе отсутствуют асимптотические предельные множества, то функция (3.21) не может быть трансцендентной с точки зрения комплексного анализа. Действительно, у нее отсутствуют существенно особые точки. Но с точки зрения теории элементарных функций она может быть трансцендентной (см. также (см. [30])).

3. Уравнения движения в потенциальном силовом поле и их первые интегралы. Несколько модифицируя систему (3.7), (3.9) при условиях (3.12)—(3.14), (3.16), (3.17), (3.19), получим систему консервативную. А именно, наличие силового поля характеризует достаточно гладкий коэффициент $F(\alpha)$ во втором уравнении системы (3.22). Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ гладкого четырехмерного многообразия

$M^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ примет вид

$$
\begin{cases}
\dot\alpha = -z_4,\\
\dot z_4 = F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11} f_1^2(\alpha) z_3^2 + \Gamma^\alpha_{22} f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) z_2^2 + \Gamma^\alpha_{33} f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) z_1^2,\\
\dot z_3 = \left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_3 z_4 - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) z_2^2 -\\
\qquad\qquad - \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) z_1^2,\\
\dot z_2 = \left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_4 - \left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1(\alpha) z_2 z_3 -\\
\qquad\qquad - \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\dfrac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2) z_1^2,\\
\dot z_1 = \left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_4 - \left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1(\alpha) z_1 z_3 -\\
\qquad\qquad - \left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] f_2(\alpha) g_1(\beta_1) z_1 z_2,\\
\dot\beta_1 = z_3 f(\alpha),\\
\dot\beta_2 = z_2 f(\alpha) g(\beta_1),\\
\dot\beta_3 = z_1 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2),
\end{cases}
\tag{3.22}
$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$
\begin{cases}
\ddot\alpha + F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0,\\
\ddot\beta_1 + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0,\\
\ddot\beta_2 + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_2 + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0,\\
\ddot\beta_3 + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_3 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_3 + 2\Gamma_3(\beta_2)\dot\beta_2\dot\beta_3 = 0.
\end{cases}
$$

Предложение 3.7. *Если выполнены условия предложения* 3.2, *то система* (3.22) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$
\Phi_1(z_4, \ldots, z_1; \alpha) = z_1^2 + \ldots + z_4^2 + F_1(\alpha) = C_1 = \text{const}, \quad F_1(\alpha) = 2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F(a)\,da. \tag{3.23}
$$

Предложение 3.8. *Если выполнены условия предложений 3.3, 3.4, 3.5, то система* (3.22) *имеет три гладких первых интеграла вида* (3.15), (3.18), (3.20).

Предложение 3.9. *Если выполнены условия предложения 3.6, то система* (3.22) *имеет первый интеграл вида* (3.21).

Набор первых интегралов (3.23), (3.15), (3.18), (3.20), (3.21) является полным набором независимых первых интегралов системы (3.22) при вышеперечисленных условиях (то, что полный набор состоит из пяти, а не из семи, первых интегралов, будет показано ниже).

Аналогично подчеркнем, что вопрос о гладкости первого интеграла (3.21) по-прежнему не так прост. Поскольку в рассматриваемой динамической системе даже при наличии гладкого консервативного силового поля отсутствуют асимптотические предельные множества, то функция (3.21) не может быть трансцендентной с точки зрения комплексного анализа (у нее отсутствуют существенно особые точки). Но с точки зрения теории элементарных функций она может быть трансцендентной (см. также [30]).

4. Уравнения движения в силовом поле с диссипацией и их первые интегралы. Теперь усложним систему (3.22) и получим систему с диссипацией. А именно, наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует достаточно гладкий коэффициент $b\delta(\alpha)$ в первом уравнении следующей системы:

$$\begin{cases} \dot\alpha = -z_4 + b\delta(\alpha), \\ \dot z_4 = F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11} f_1^2(\alpha) z_3^2 + \Gamma^\alpha_{22} f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) z_2^2 + \Gamma^\alpha_{33} f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) z_1^2, \\ \dot z_3 = \left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_3 z_4 - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) z_2^2 - \\ \qquad\qquad - \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) z_1^2, \\ \dot z_2 = \left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_4 - \left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1(\alpha) z_2 z_3 - \\ \qquad\qquad - \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\dfrac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2) z_1^2, \\ \dot z_1 = \left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_4 - \left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1(\alpha) z_1 z_3 - \\ \qquad\qquad - \left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] f_2(\alpha) g_1(\beta_1) z_1 z_2, \\ \dot\beta_1 = z_3 f(\alpha), \\ \dot\beta_2 = z_2 f(\alpha) g(\beta_1), \\ \dot\beta_3 = z_1 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2), \end{cases} \tag{3.24}$$

которая почти всюду эквивалентна системе

$$\begin{cases} \ddot\alpha - b\dot\alpha\tilde\delta(\alpha) + F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0, \\ \ddot\beta_1 - b\dot\beta_1\delta(\alpha) f(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0, \\ \ddot\beta_2 - b\dot\beta_2\delta(\alpha) f(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_2 + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0, \\ \ddot\beta_3 - b\dot\beta_3\delta(\alpha) f(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_3 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_3 + 2\Gamma_3(\beta_2)\dot\beta_2\dot\beta_3 = 0, \end{cases}$$

где $\tilde\delta(\alpha) = dg(\alpha)/d\alpha$.

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы восьмого порядка (3.24) при условиях (3.12), (3.13), (3.16), а также при выполнении равенств

$$\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) = \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) g^2(\beta_1) = \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) = \Gamma_4(\alpha). \tag{3.25}$$

Введем также (по аналогии с (3.13)) ограничение и на функцию $f(\alpha)$: она должна удовлетворять преобразованному первому равенству из (3.10):

$$2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_4(\alpha) f^2(\alpha) \equiv 0. \tag{3.26}$$

Для полного интегрирования системы (3.24) необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$w_4 = z_4, \quad w_3 = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}, \quad w_2 = \frac{z_2}{z_1}, \quad w_1 = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}},$$

система (3.24) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot\alpha = -w_4 + b\delta(\alpha), \\ \dot w_4 = F(\alpha) + \Gamma_4(\alpha) f^2(\alpha) w_3^2, \\ \dot w_3 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] w_3 w_4, \end{cases} \tag{3.27}$$

$$\begin{cases} \dot w_2 = \pm w_3\sqrt{1+w_2^2}f(\alpha)g(\beta_1)\left[2\Gamma_3(\beta_2)+\dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right], \\ \dot\beta_2 = \pm\dfrac{w_2w_3}{\sqrt{1+w_2^2}}f(\alpha)g(\beta_1), \end{cases} \tag{3.28}$$

$$\begin{cases} \dot w_1 = \pm w_3\sqrt{1+w_1^2}f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right], \\ \dot\beta_1 = \pm\dfrac{w_1w_3}{\sqrt{1+w_1^2}}f(\alpha), \end{cases} \tag{3.29}$$

$$\dot\beta_3 = \pm\frac{w_3}{\sqrt{1+w_2^2}}f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2). \tag{3.30}$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (3.27)—(3.30) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (3.27), по одному — для систем (3.28) и (3.29) (меняя в них независимые переменные), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.30) (т.е. всего *пять*).

Теорема 3.1. *Пусть для некоторых* $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ *выполняются равенства*

$$\Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha) = \kappa\frac{d}{d\alpha}\ln|\delta(\alpha)|, \quad F(\alpha) = \lambda\frac{d}{d\alpha}\frac{\delta^2(\alpha)}{2}. \tag{3.31}$$

Тогда система (3.24) *при выполнении условий* (3.12), (3.13), (3.16), (3.25), (3.26) *обладает полным набором* (*пятью*) *независимых, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.*

Действительно, для начала в соответствие системе третьего порядка (3.27) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dw_4}{d\alpha} = \dfrac{F(\alpha)+\Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha)w_3^2}{-w_4+b\delta(\alpha)}, \\ \dfrac{dw_3}{d\alpha} = \dfrac{\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]w_3w_4}{-w_3+b\delta(\alpha)}. \end{cases} \tag{3.32}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_4 = u_4\delta(\alpha), \quad w_3 = u_3\delta(\alpha), \tag{3.33}$$

приводим систему (3.32) к следующему виду:

$$\begin{cases} \delta(\alpha)\dfrac{du_4}{d\alpha}+\delta'(\alpha)u_4 = \dfrac{F(\alpha)+\Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha)\delta^2(\alpha)u_3^2}{-u_4\delta(\alpha)+b\delta(\alpha)}, \\ \delta(\alpha)\dfrac{du_3}{d\alpha}+\delta'(\alpha)u_3 = \dfrac{\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\delta^2(\alpha)u_3u_4}{-u_4\delta(\alpha)+b\delta(\alpha)}, \end{cases} \tag{3.34}$$

что почти всюду эквивалентно системе

$$\begin{cases} \delta(\alpha)\dfrac{du_4}{d\alpha} = \dfrac{F_3(\alpha)+\Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha)\delta(\alpha)u_3^2+\delta'(\alpha)u_4^2-b\delta'(\alpha)u_4}{-u_4+b}, \\ \delta(\alpha)\dfrac{du_3}{d\alpha} = \dfrac{-\Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha)\delta(\alpha)u_3u_4+\delta'(\alpha)u_3u_4-b\delta'(\alpha)u}{-u_4+b}, \end{cases} \tag{3.35}$$

где $F_3(\alpha)=\frac{F(\alpha)}{\delta(\alpha)}$. После выполнения условий (3.31) система (3.35) приводится к уравнению первого порядка

$$\frac{du_4}{du_3} = \frac{\lambda+\kappa u_3^2+u_4^2-bu_4}{(1-\kappa)u_3u_4-bu_3}. \tag{3.36}$$

Уравнение (3.36) имеет вид уравнения Абеля (см. [6]). В частности, при $\kappa=-1$ оно имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_4^2+u_3^2-bu_4+\lambda}{u_3} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{3.37}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(w_4, w_3; \alpha) = G_1\left(\frac{w_4}{\delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\delta(\alpha)}\right) = \frac{w_4^2 + w_3^2 - bw_4\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha)}{w_3\delta(\alpha)} = C_1 = \mathrm{const}. \tag{3.38}$$

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (3.27) при $\kappa = -1$. Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (3.37) при $u_3 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_4 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(u_3 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - \lambda. \tag{3.39}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2 + C_1^2 - 4\lambda \geqslant 0, \tag{3.40}$$

и фазовое пространство системы (3.23) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (3.39). Таким образом, в силу соотношения (3.37) первое уравнение системы (3.35) при $\kappa = -1$ примет вид

$$\frac{\delta(\alpha)}{\delta'(\alpha)}\frac{du_4}{d\alpha} = \frac{2(\lambda - bu_4 + u_4^2) - C_1U_1(C_1, u_4)}{-u_4 + b}, \tag{3.41}$$

где

$$U_1(C_1, u_4) = \frac{1}{2}\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_4^2 - bu_4 + \lambda)}\right\}, \tag{3.42}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (3.40). Тогда дополнительный первый интеграл для системы (3.27) имеет структурный вид

$$\Theta_2(w_4, w_3; \alpha) = G_2\left(\delta(\alpha), \frac{w_4}{\delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\delta(\alpha)}\right) = C_2 = \mathrm{const}, \tag{3.43}$$

и при $\kappa = -1$ он определяется из квадратуры

$$\ln|g(\alpha)| = \int \frac{(b - u_4)du_4}{2(\lambda - bu_4 + u_4^2) - C_1\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_4^2 - bu_4 + \lambda)}\}/2},$$

где $u_4 = w_4/\delta(\alpha)$. При этом после взятия этого интеграла вместо C_1 можно формально подставить левую часть равенства (3.38). Правая часть данного равенства выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая — в зависимости от функции $\delta(\alpha)$. Поэтому выражение первых интегралов (3.38), (3.43) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\delta(\alpha)$.

Первые интегралы для систем (3.28) и (3.29) будут иметь вид

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} = \mathrm{const}, \quad s = 1, 2, \tag{3.44}$$

о функциях $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1, 2$, см. (3.18), (3.20). Дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.30), находится по аналогии с (3.21):

$$\Theta_5(\beta_2, \beta_3) = \beta_3 \pm \int\limits_{\beta_{20}}^{\beta_2} \frac{C_4h(b)}{\sqrt{C_3^2\Psi_2^2(b) - C_4^2}}\, db = C_5 = \mathrm{const},$$

при этом после взятия этого интеграла вместо постоянных C_3, C_4 можно формально подставить соответствующие левые части равенства (3.44).

5. Замечание о структуре первых интегралов систем с диссипацией. Если α — периодическая координата периода 2π, то система (3.27) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним (см. [41]). При этом при $b = 0$ она превращается в систему консервативную, которая обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (3.23), (3.15). В силу (3.31)

$$\Phi_1(z_4, \ldots, z_1; \alpha) = z_1^2 + \ldots + z_4^2 + 2\int_{\alpha_0}^{\alpha} F(a)da \cong w_4^2 + w_3^2 + \lambda\delta^2(\alpha), \tag{3.45}$$

где $\cong$ означает равенство с точностью до аддитивной постоянной. При этом, в силу (3.26) и (3.31)

$$\Phi_2(z_3, z_2, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}\; f(\alpha) \exp\left\{2\int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b)db\right\} \cong w_3\delta(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}, \tag{3.46}$$

где $\cong$ означает равенство с точностью уже до мультипликативной постоянной.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (3.45), (3.46) (или (3.23), (3.15)) также является первым интегралом системы (3.27) при $b = 0$. Но при $b \neq 0$ каждая из функций

$$w_4^2 + w_3^2 - bw_4\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha) \tag{3.47}$$

и (3.46) по отдельности не является первым интегралом системы (3.27). Однако отношение функций (3.47), (3.46) является первым интегралом системы (3.27) (при $\kappa = -1$) при любом b.

Вообще же, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств (см. [6, 30]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В.* Архимедовы равномерные структуры// Совр. мат. Фундам. напр. — 2007. — *23.* — С. 46–51.
2. *Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В.* Многообразия непрерывных структур// Совр. мат. Фундам. напр. — 2007. — *23.* — С. 71–86.
3. *Бендиксон И.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями// Усп. мат. наук. — 1941. — *9.* — С. 119–211.
4. *Богоявленский О. И.* Динамика твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью// Докл. АН СССР. — 1983. — *272*, № 6. — С. 1364–1367.
5. *Богоявленский О. И.* Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера// Докл. АН СССР. — 1986. — *287*, № 5. — С. 1105–1108.
6. *Бурбаки Н.* Интегрирование. — М.: Наука, 1970.
7. *Веселов А. П.* Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на $so(4)$// Докл. АН СССР. — 1983. — *270*, № 6. — С. 1298–1300.
8. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2001. — *380*, № 1. — С. 47–50.
9. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2002. — *383*, № 5. — С. 635–637.
10. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — *5.* — С. 37–41.
11. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Символы Леви-Чивиты, обобщенные векторные произведения и новые случаи интегрируемости в механике многомерного тела// Совр. мат. прилож. — 2012. — *76.* — С. 22–39.
12. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. — М.-Л.: Гостехиздат, 1953.
13. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
14. *Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Извю РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.

15. *Иванова Т. А.* Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — *52*, № 2. — С. 43–51.
16. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — *38*, № 1. — С. 3–67.
17. *Козлов В. В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — *79*, № 3. — С. 307–316.
18. *Козлов В. В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 2019. — *74*, № 1 (445). — С. 117–148.
19. *Локшин Б. Я., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Маятниковые системы с динамической симметрией// Совр. мат. прилож. — 2016. — *100*. — С. 76–133.
20. *Манаков С. В.* Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела// Функц. анал. прилож. — 1976. — *10*, № 4. — С. 93–94.
21. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — *9*, № 100. — С. 136–150.
22. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — *9/1*, № 110. — С. 35–41.
23. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — *7*, № 118. — С. 60–69.
24. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
25. *Тихонов А. А.* Метод управления для угловой стабилизации электродинамической тросовой системы// Автомат. телемех. — 2020. — № 2. — С. 91–114.
26. *Трофимов В. В.* Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — *44*, № 5. — С. 1191–1199.
27. *Трофимов В. В., Фоменко А. Т.* Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем// Докл. АН СССР. — 1980. — *254*, № 6. — С. 1349–1353.
28. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — *16*, № 4. — С. 3–229.
29. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости// в кн.: Полн. собр. соч.. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133–135.
30. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
31. *Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в среде с сопротивлением// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1992. — *1*. — С. 52–58.
32. *Шамолин М. В.* Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента// Прикл. мат. мех. — 1993. — *57*, № 4. — С. 40–49.
33. *Шамолин М. В.* Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1996. — *4*. — С. 57–69.
34. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 3. — С. 209–210.
35. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — *364*, № 5. — С. 627–629.
36. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — *375*, № 3. — С. 343–346.
37. *Шамолин М. В.* Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 1. — С. 169–170.
38. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $so(4)\times\mathbb{R}^4$// Усп. мат. наук. — 2005. — *60*, № 6. — С. 233–234.
39. *Шамолин М. В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — *69*, № 6. — С. 1003–1010.
40. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — *62*, № 5. — С. 169–170.

41. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. прикл. мат. — 2008. — *14*, № 3. — С. 3–237.
42. *Шамолин М. В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — *425*, № 3. — С. 338–342.
43. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — *65*, № 1. — С. 189–190.
44. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — *437*, № 2. — С. 190–193.
45. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — *440*, № 2. — С. 187–190.
46. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *444*, № 5. — С. 506–509.
47. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — *453*, № 1. — С. 46–49.
48. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — *68*, № 5 (413). — С. 185–186.
49. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — *449*, № 4. — С. 416–419.
50. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — *457*, № 5. — С. 542–545.
51. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — *20*, № 4. — С. 3–231.
52. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — *461*, № 5. — С. 533–536.
53. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — *464*, № 6. — С. 688–692.
54. *Шамолин М. В.* Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 6. — С. 743–759.
55. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *475*, № 5. — С. 519–523.
56. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — *474*, № 2. — С. 177–181.
57. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *477*, № 2. — С. 168–172.
58. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией// Пробл. мат. анал. — 2018. — № 95. — С. 79–101.
59. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *482*, № 5. — С. 527–533.
60. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *479*, № 3. — С. 270–276.
61. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *489*, № 6. — С. 592–598.
62. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *485*, № 5. — С. 583–587.
63. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *487*, № 4. — С. 381–386.
64. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *491*, № 1. — С. 95–101.
65. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *494*, № 1. — С. 105–111.

66. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *495*, № 1. — С. 84–90.
67. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 1. Твердое тело в неконсервативном поле. — М.: ЛЕНАНД, 2019.
68. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 2: Закрепленные маятники разной размерности. — М.: ЛЕНАНД, 2021.
69. *Aleksandrov A. Y., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A.* On the monoaxial stabilization of a rigid body under vanishing restoring torque// AIP Conf. Proc. — 2018. — *1959*. — 080001.
70. *Tikhonov A. A., Yakovlev A. B.* On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters// Int. J. Plasma Env. Sci. Techn.. — *13*, № 1. — С. 49–52.

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: `shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru`