ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 218 (2022). С. 3–66
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-218-3-66

УДК 519.21

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО РЕШЕТЧАТЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

© 2022 г. **Н. Г. ГАМКРЕЛИДЗЕ**

Памяти моей матери Т. Ф. Гогичайшвили
и моего учителя академика Ю. В. Прохорова

Аннотация. Работа посвящена предельным теоремам, описывающим локальное поведение решетчатых распределений, и содержит результаты, относящиеся к области интегральных предельных теорем.

Ключевые слова: случайная величина, дискретное распределение, решетчатое распределение, предельная теорема.

STUDIES ON LATTICE DISTRIBUTIONS OF PROBABILITY THEORY

© 2022 **N. G. GAMKRELIDZE**

Abstract. This paper is devoted to limit theorems that describe the local behavior of lattice distributions and also contains results related to integral limit theorems.

Keywords and phrases: random variable, discrete distribution, lattice distribution, limit theorem.

AMS Subject Classification: 60Exx, 60Fxx

СОДЕРЖАНИЕ

Автор выражает благодарность научному редактору проф. А. В. Овчинникову за замечания, способствующие улучшению текста.

1. Введение

Как хорошо известно, первые результаты по локальной аппроксимации распределений касались биномиальных вероятностей: А. Муавр (1733 г., [141]), П. Лаплас (1812 г., [137]), С. Пуассон (1837 г., [143]), а также Николай (1713 г.) и Даниил (1770 г.) Бернулли (см. [3]).

Ниже будем говорить только о локальных теоремах для схемы суммирования целочисленных *независимых* случайных величин или векторов (оставляя в стороне глубокие результаты по локальным теоремам для цепей Маркова и т. п).

Довольно общие локальные теоремы были доказаны Р. Мизесом (1934 г., [139,140]), Г. М. Бавли (1937 г., [2]) и К.-Г. Эссееном (1945 г., [127]. При дополнительном предположении, что слагаемые одинаково распределены, позже были получены необходимые и достаточные условия: Б. В. Гнеденко (1948 г., [38]) — одномерный случай; Д. Г. Мейзлер, О. С. Парасюк, Е. Л. Рвачёва (1949 г., [64,65]) — многомерный). А. Я. Хинчин применил эти и аналогичные результаты в своих работах по статистической физике (см. [119]). Позже были даны другие интересные применения локальных теорем, например в теории случайных отображений в монографии В. Ф. Колчина [52].

Для различно распределенных слагаемых необходимые и достаточные условия локальной предельной теоремы для равномерно ограниченных слагаемых были получены Ю. В. Прохоровым (1954 г., [86]), а вслед за ним Ю. А. Розановым (1957 г., [95]); предположение равномерной ограниченности слагаемых, встречающееся в работе Ю. В. Прохорова, Ю. А. Розанов заменил более слабым; как будет показано ниже это последнее условие, в известном смысле, неулучшаемо.

Дальнейшее развитие тематика локальных теорем получила у В. А. Статулявичуса, А. Г. Постникова, С. Х. Сираждинова, их учеников и последователей. Были приведены глубокие теоретико-числовые методы и соображения. Кроме перечисленных авторов вопросами локальной теоремы занимался целый ряд исследователей, среди которых следует назвать В. В. Петрова (см. [79], Ч. Стоуна (см. [147], В. Феллера (см. [112,113]).

Цель работы — исследование ряда важных особенностей локальной (и отчасти интегральной) аппроксимации распределений сумм независимых случайных величин и векторов нормальным распределением.

Следующие результаты можно считать основными.

1. Получены неулучшаемые оценки максимальной вероятности значений сумм случайных величии при заданной максимальной вероятности значений слагаемых для определенного класса случайных величин. Тем самым дано частичное подтверждение гипотезы Ю. В. Прохорова о форме асимптотически правильной оценки функции концентрации.
2. Построены примеры, которые показывают, что необходимые условия применимости локальной теоремы к суммам независимых целочисленных случайных величин: применимость интегральной теоремы, асимптотическая равномерная распределенность сумм по любому модулю, равномерная бесконечная малость слагаемых — не являются достаточными для локальной теоремы.
3. Дано новое (аналитическое) необходимое условие применимости локальной теоремы в форме так называемого «третьего интеграла» и предложен способ оценки снизу скорости сходимости в локальной теореме.
4. Введена количественная характеристика гладкости распределений целочисленных случайных величин или векторов — функция гладкости и изучены ее свойства.
5. Предложены способы оценки остаточного члена в локальной теореме, основанные на приеме «предварительного сглаживания» распределений с использованием функции гладкости.

Всюду в дальнейшем

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots \tag{1.1}$$

означает (если явно не оговорено противное) последовательность независимых целочисленных случайных величин и

$$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n.$$

В разделе 2 даны оценки для $\max\limits_x P(S_n = x)$.

Назовем распределение целочисленной случайной величины *унимодальным*, если существует такое целое m_0, что при целых $m \leqslant m_0$ вероятность $P(\xi = m)$ не убывает, а при целых $m \geqslant m_0$ — не возрастает.

Теорема 1.1. *Если случайные величины* (1.1) *имеют унимодальные распределения и*

$$\max_x P(\xi_j = x) = p_j,$$

то справедливо неравенство

$$\max_x P(S_n = x) \leqslant \sqrt{\frac{6}{\pi}}\ \left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{p_j^2} - 1\right)\right]^{-1/2}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right).$$

Неравенство по существу неулучшаемо. Действительно, пусть ξ_j принимает все целые значения от $-N$ до N с вероятностью $1/(2N+1)$ и $\sigma^2 = D\xi_j$. По локальной теореме получаем, что

$$\max_x P(S_n = x) \sim P(S_n = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\,\sigma} = \sqrt{\frac{6}{\pi}}\ \frac{p_0}{\sqrt{n(1-p_0^2)}},$$

где $p_0 = \max_x P(\xi_j = x)$.

Это неравенство было первым, хотя и частным подтверждением одной гипотезы Ю. В. Прохорова (см. [83]).

При отказе от унимодальности со свойством симметричности и одинаковой распределенности слагаемых справедливо следующее неравенство:

$$\max_x P(S_n = x) \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \left(\frac{1}{\sqrt{(n+1)q_0}} + \frac{1}{(n+1)q_0}\right),$$

где $q_0 = 1 - p_0$, $P(\xi_j - 0) = p_0$.

Следующая часть работы посвящена анализу необходимых условий применимости локальной теоремы с целью получить ответ насколько они близки к достаточным. Предварительно введем обозначения и определения. Предположим, что случайные величины (1.1) имеют конечные вторые моменты и пусть $A_n = ES_n$, $B_n^2 = DS_n$, $P_n(m) = P(S_n = m)$.

Последовательность (1.1) удовлетворяет по определению локальной предельной теореме, если равномерно по m, $-\infty < m < \infty$, при $n \to \infty$

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}B_n}\exp\left\{-\frac{(m - A_n)^2}{2B_n^2}\right\} + \mathrm{o}(B_n^{-1}).$$

Как известно, из локальной предельной теоремы вытекает, что распределения нормированных сумм $(S_n - A_n)/B_n$ сходятся к стандартному нормальному распределению, т.е. применимость центральной предельной теоремы (в интегральной форме) является необходимым условием локальной предельной теоремы Ю. В. Прохоровым было отмечено, что необходимым условием локальной предельной теоремы является также и асимптотическая равномерная распределенность сумм S_n по любому фиксированному модулю $l > 0$, т.е. соотношение

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n \equiv j \bmod l) = \frac{1}{l}, \quad j = 0, 1, \ldots, l-1, \quad l = 2, 3, \ldots.$$

К этим известным необходимым условиям автором было добавлено необходимое условие аналитического характера. В упрощенной форме это условие состоит в следующем: для применимости локальной предельной теоремы необходимо существование такой последовательности $\varepsilon_n \to 0$, что при $n \to \infty$

$$J_n = B_n \int\limits_{\varepsilon_n \leqslant t \leqslant 2\pi - \varepsilon_n} \prod_{j=1}^{n} \bigl|f(t, \xi_j)\bigr|^2\, dt \to 0. \tag{1.2}$$

Здесь $f(t, \xi_j)$ — характеристическая функция случайной величины ξ_j.

Результаты цитированных выше работ Ю. В. Прохорова и Ю. А. Розанова позволяют поставить вопрос, не является ли условие ц.п.т. и асимптотическая равномерная распределенность без всяких дополнительных условий достаточным для локальной теоремы. Ответ отрицательный. Контрпример построить сравнительно просто, если не требовать бесконечной малости слагаемых в нормированной сумме.

Пример 1.1 (см. [15]). Пусть случайные величины с нечетными индексами $n = 2k - 1$ распределены по симметризованному закону Пуассона с характеристической функцией

$$f(t, \xi_{2k-1}) = \exp\{\Lambda_k(\cos th_k - 1)\}.$$

Параметр Λ_k и шаг распределения h_k равны $k^{1/2}$, $2[e^{k^2}k^{-1/4}]$ соответственно. Случайные величины с четными индексами ξ_{2k} принимают значения $-k, \dots, -1, 1, \dots, k$ с вероятностью $1/2k$ каждая.

Проверка требуемых свойств распределений сумм S_n (применимость интегральной теоремы и асимптотической равномерной распределенности и отсутствие локальной предельной теоремы) оказывается не очень трудной (по сравнению со следующим примером) и мы на ней здесь останавливаться не будем.

При дополнительном условии бесконечной малости слагаемых в нормированной сумме гипотеза также неверна, т.е. удается построить довольно сложный пример, в котором слагаемые в нормированной сумме бесконечно малы, суммы S_n асимптотически равномерно распределены и удовлетворяют ц.п.т., но тем не менее для S_n не имеет места локальная предельная теорема.

Пример 1.2 (см. [18]). Построение последовательности происходит следующим образом. Пусть $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$. Запишем α в виде цепной дроби $[\![1; 1, \dots, 1]\!]$. Числители p_j и знаменатели q_j соответствующих подходящих дробей представим в виде следующей таблицы:

j	1	2	3	4	5	
p_j	3	5	8	13	21	…
q_j	2	3	5	8	13	…

(1.3)

Числители образуют ряд Фибоначчи: $p_j = p_{j-1} + p_{j-2}$, $j \geqslant 3$, причем $q_j = p_{j-1}$ $(1 \geqslant 2)$.

Рассмотрим последовательность независимых величин, которую удобнее выписать в виде следующей таблицы:

$$\begin{aligned} &\xi_1, \dots, \xi_{n_1} \\ &\xi_{n_1+1}, \dots, \xi_{n_1+n_2} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\xi_{n_1+\ldots+n_{j-1}+1}, \dots, \xi_{n_1+\ldots+n_{j-1}+n_j}; \end{aligned} \tag{1.4}$$

величины j-й строки распределены одинаково и принимают значения 0, q_j, p_j с вероятностями $(p_j-2)/p_j$, $1/p_j$, $1/p_j$ соответственно, а количество случайных величин в строке выбирается по формуле $n_j = \left[p_j^{3/2}\right] + 1$ (здесь $[a]$ означает целую часть числа a).

Характер рассуждений, принимаемых при анализе этого примера, можно в сжатой форме описать следующим образом.

Условие бесконечной малости слагаемых и ц.п.т. проверяется следующим способом. Для произвольного n существует такое k, что $N_{k-1} \leqslant n < N_k$, где $N_k = n_1 + \ldots + n_k$, и тогда

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} \left|\xi_j - E\xi_j\right| \leqslant 2p_k, \quad B_n^2 > \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{k} \frac{p_j^2 + q_j^2}{p_j};$$

следовательно,

$$\max_x \frac{\left|\xi_j - E\xi_j\right|}{B_n} \leqslant \frac{c}{p_k^{1/2}} \quad \text{при } n \to \infty,$$

где c — абсолютная константа. Из этого условия вытекает, как условие Ляпунова, так и условие бесконечной малости слагаемых в нормированной сумме.

Для проверки условия асимптотической равномерной распределенности достаточно показать, что во всех рациональных точках вида $2\pi r/h$ характеристическая функция суммы S_n стремится к нулю (критерий Дворецкого—Вольфовица). Имеем

$$\left|f\left(2\pi\frac{r}{h},\xi_{N_j}\right)\right| \leqslant 1-\frac{\eta}{p_j}, \quad \text{где } \eta=\eta(h)>0,$$

$$\prod_{j=1}^{k}\left|f\left(2\pi\frac{r}{h},\xi_{N_j}\right)\right|^{2n_j} \leqslant e^{-k\eta}\to 0 \quad \text{при } k\to\infty.$$

Наконец, остается показать, что необходимое аналитическое условие (1.2) не выполняется. Действительно, взяв разложение Тейлора при $|t-2\pi/\alpha|<B_{N_k}^{-1}$ и оценки производных, получим

$$|f(t,\xi_j)|^2 \geqslant 1-\frac{c}{p_j^3}-\frac{c}{B_{N_k}p_j}-\frac{c\,p_j}{B_{N_k}^2}$$

(здесь и далее c означает различные положительные абсолютные постоянные). Следовательно,

$$\prod_{j=1}^{k}|f(t,\xi_j)|^{2n_j} \geqslant \exp\left\{-c\sum_{j=1}^{k}\frac{n_j}{p_j^3}-\frac{c}{B_{N_k}}\sum_{j=1}^{k}\frac{n_j}{p_j}-\frac{c}{B_{N_k}^2}\sum_{j=1}^{k}n_jp_j\right\} \geqslant e^{-c}.$$

Тем самым при всех достаточно больших k справедливо неравенство

$$J_{N_k}=B_{N_k}\int\limits_{\varepsilon_n\leqslant t\leqslant 2\pi-\varepsilon_n}\prod_{j=1}^{k}|f(t,\xi_j)|^{2n_j}\,dt > B_{N_k}\int\limits_{|t-2\pi/\alpha|<B_{N_k}^{-1}} e^{-c}\,dt.$$

Так как в построенном примере $J_{N_k}>c$, то тем самым не выполняется необходимое условие (1.2) локальной предельной теоремы, и для построенной последовательности (1.4) локальная предельная теорема не имеет места. Заметим, что для построенного примера условие Ю. А. Розанова не выполняется; заключаем, что это условие по существу неулучшаемо. Напомним, что это условие Ю. А. Розанова состоит в следующем:

$$R_{k,n}=\frac{1}{D\xi_k}\sum_{|j-E\xi_k|\leqslant n}(j-E\xi_k)^2\;P(\xi_k=j)\to 1 \quad \text{при } n\to\infty \text{ равномерно по } k.$$

Следующая часть работы посвящена исследованию свойства гладкости распределения. С этой целью вводится функция $\delta(P_\xi)$ и исследуются ее свойства. Используя прием «предварительного сглаживания», получаем легко проверяемое достаточное условие локальной предельной теоремы и в терминах функции гладкости $\delta(P_\xi)$ получаем способ оценки остаточного члена в локальной теореме. Далее предлагается способ, позволяющий аппроксимировать решетчатое распределение при небольшом количестве слагаемых.

Перейдем к более подробному изложению. Определим «степень гладкости» распределения P_ξ целочисленной случайной величины ξ следующим образом:

$$\delta(P_\xi)=\sum_{m\in z}\Big|P(\xi=m)-P(\xi=m-1)\Big|,$$

где z — множество всех целых чисел.

Изучаются различные свойства $\delta(P_\xi)$. Наиболее интересны те из них, которые имеют место в предположении, что ξ есть сумма большого числа случайных величин. Для суммы S_n независимых одинаково распределенных целочисленных случайных величин ξ_k с максимальным шагом распределения, равным 1, всегда $\delta(P_{S_n})\to 0$ при $n\to\infty$.

Более того, если (1.1) — последовательность независимых, ограниченных, одинаково распределенных целочисленных случайных величин с максимальным шагом, равным 1, то

$$\delta(P_{S_n})=\frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi n}}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{при } n\to\infty.$$

Далее изучается возможная скорость стремления $\delta(P_{S_n})$ к нулю при разных ограничениях на распределения случайной величины (1.1).

Для многомерного случая мы вводим аналогичную характеристику:

$$\delta(P_\xi) = \sum_{k=1}^{s} \sum_m \Big| P(\xi = m) - P(\xi = m - e_k) \Big|,$$

где внутренняя сумма берется по всем целочисленным векторам, а $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, ..., $e_s = (0, \dots, 0, 1)$. Для нее имеет место, в частности, следующее утверждение.

Утверждение 1.1. *Пусть ξ — целочисленный вектор в $\mathbb{R}^s$. Если $\delta(P_\xi) < 2$, то максимальный шаг распределения P_ξ равен 1.*

Следующее свойство относится к суммам S_n назависимых одинаково распределенных целочисленных случайных векторов $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$. Обозначим

$$a^{(k)} = E\xi_1^{(k)}, \quad \lambda_{jk} = E\Big(\xi_1^{(j)} - a^{(j)},\ \xi_1^{(k)} - a^{(k)}\Big), \quad a = \big(a^{(1)}, \dots, a^{(s)}\big),$$

Λ_{jk} — алгебраическое дополнение элемента λ_{jk} и $\Lambda = \det\{\lambda_{jk}\}$.

Если $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ — последовательность одинаково распределенных целочисленных случайных векторов, имеющих максимальный шаг распределения, равный единице, и $|\xi_k| < L$, то

$$\delta(P_{S_n}) = \sqrt{\frac{2}{\pi n \Lambda}} \Big(\sqrt{\Lambda_{11}} + \dots + \sqrt{\Lambda_{ss}}\Big) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{при } n \to \infty.$$

Заметим, что условия этого утверждения обеспечивают невырожденность матрицы ковариаций.

Применение характеристики $\delta(P_\xi)$ в локальной предельной теореме основано на неравенствах типа

$$|f(t, \xi)| \leqslant \frac{\delta(P_\xi)}{2|\sin t/2|}, \quad t \neq 2\pi k.$$

Простейшим, но типичным результатом, получаемым на этом пути, может служить следующее утверждение.

Утверждение 1.2. *Пусть* (1.1) *— последовательность независимых (не обязательно одинаково распределенных) случайных величин. Если существуют такие натуральное положительное число n_0 и $\lambda < \sqrt{2}$, что при всех k выполняется неравенство*

$$\delta(P_{\xi_k}^{*n_0}) \leqslant \lambda,$$

и если к этой последовательности применима центральная предельная теорема, причем $B_n^2 = \mathrm{O}(n)$ при $n \to \infty$, то к этой последовательности применима и локальная предельная теорема в усиленной форме.

Здесь и далее P_η^{*m} означает m-кратную свертку распределения случайной величины η. Присутствующие в формулировке теоремы параметры n_0 и λ обеспечивают существование таких случайных величин $\zeta_1^{(k)}, \dots, \zeta_{n_0}^{(k)}$, которые распределены так же, как ξ_k для каждого k $(k = 1, \dots, n)$ и для которых обеспечивается «достаточная» гладкость $\delta(P_{\zeta_1^{(k)}}^{*n_0}) \leqslant \lambda < \sqrt{2}$.

В третьей части работы изучаются несколько задач, связанных с центральной предельной теоремой. Работа [25] посвящена доказательству ц.п.т. способом, отличным от хорошо известного подхода Эссеена. Суть работы заключается в следующем: если в качестве сглаживающего распределения взять финитные распределения, плотность которых бесконечно дифференцируема, а характеристическая функция убывает достаточно быстро, то можно получить правильную скорость сходимости в ц.п.т., но при наличии одной леммы, принадлежащей Эссеену. Заметка [25] примыкает к работе А. Журавского и интересна еще и тем, что, учитывая вышеуказанное обстоятельство, можно было еще в 1933 г. иметь истинную картину сходимости ц.п.т. Следует добавить, что целый ряд утверждений этой заметки переносится и на конечномерный случай. Далее следует неравенство, обобщающее неравенство Эссеена, оценивающее сверху равномерное отклонение функции распределений $F(x)$ от $G(x)$ в терминах, соответствующих характеристических функций $f(t)$ и $g(t)$ на случай размерности, большей или равной двум (см. [22]). Буквальный перенос доказательства неравенства Эссеена на случай R^s дает интеграл

$$\int_{-T}^{T} \cdots \int_{-T}^{T} \frac{\left|f(t_1,\ldots,t_s) - g(t_1,\ldots,t_s)\right|}{t_1 \cdots t_s}\, dt_1 \ldots dt_s,$$

который может быть и бесконечным из-за поведения подынтегральной функции вблизи нуля. Обойти эту трудность удается введением вспомогательных функций $\hat{f}(t)$ и $\hat{g}(t)$. Способ доказательства, предложенный в этой работе, в дальнейшем применяется для оценки близости по вариации (см. [23]).

Пример 1.3. Рассмотрим случайные величины ξ, принимающие значения 0, 3, 10 с вероятностью 1/3 каждое. Поведение вероятностей $P_n(k)$ для $n = 4$, 8, 16, 30, 70 и k, лежащих в пределах одного стандартного отклонения B_n от $A_n = ES_n$, показано на графиках (см. рис. 1). Для сравнения на рис. 1 показаны значения $P_n(k)$ для $n = 4$, если возможные значения случайной величины η являются 0, 3, 9 и соответствующие вероятности равны 1/3 каждая. В этом случае поведение вероятностей $P_n(m)$ «правильное» (как в случае схемы Бернулли), в то время как при значениях 0, 3, 10, оставив вероятности прежними, вероятности $P_n(m)$ ведут себя весьма нерегулярно. Причина состоит в том, что внутри интеграла $0 < t < \pi B_n$ модуль характеристической функции слагаемых в отдельных точках очень близко подходит к единице и наличие подобных точек может сильно ухудшить точность действия локальных теорем. В частности при $t' = 0,594\pi$ имеем $|f(t',\xi)|^2 = 0,918$. График характеристической функции $|f(t,\xi)|^2$ имеет вид, указанный на рис. 2. Для сравнения на рис. 3 приведен график характеристической функции $f(t,\xi)$.

Таким образом точность действия локальной теоремы при умеренных, и тем более при небольших значениях n, может быть малой даже в простых примерах.

Комментарий. В [83] со ссылкой на П. Леви (см. [138]) приведен любопытный пример экстремальной задачи с фиксированной концентрацией.

Теорема 1.2. *Пусть $l\sigma(\alpha)$ — минимальное стандартное отклонение, совместимое с гипотезой, что функция концентрации $Q_\xi(l)$ удовлетворяет условию*

$$Q_\xi(l-0) \leqslant \alpha. \tag{1.5}$$

Тогда

$$\sigma^2(\alpha) = \frac{p^2-1}{12} \quad \text{для} \quad \alpha = \frac{1}{p},$$

где p — целое, а $\sigma^2(\alpha)$ изменяется линейно в промежутке $\frac{1}{p+1} \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{p}$. Более того, если $\alpha = \frac{\lambda}{p} + \frac{\mu}{p+1}$, $0 < \lambda \leqslant 1$, $\lambda + \mu = 1$, то указанное минимальное значение достигается на решетчатом распределении, сосредоточенном в $(2p+1)$-й точке $kl/2$, k — целое, $|k| \leqslant p$. В этих точках помещаются поочередно, считая слева направо, массы $\mu/p+1$ и λ/p.

В той же работе [83], как весьма правдоподобная, была сформулирована гипотеза, что при условии (1.5)

$$Q_{S_n}(l-0) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\,\sigma(\alpha)}\bigl(1 + \varepsilon(n,\alpha)\bigr), \tag{1.6}$$

где $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, а $\varepsilon(n,\alpha) \to 0$ при $n \to \infty$.

Для слагаемых ξ_j, удовлетворяющих условию $D\xi_j = l^2\sigma^2(\alpha)$, это утверждение следует из локальной теоремы. Казалось бы, что поскольку для всех величин, удовлетворяющих (1) $D\xi_j \geqslant l^2\sigma^2(\alpha)$, то(1.6) для них тем более должно иметь место. Однако доказательства подобных утверждений, представляющихся интуитивно ясными, оказываются порой очень трудными. Это обстоятельство было отмечено П. Леви (см. [138, § 48]). Теорема 1.2 дает частичное подтверждение упомянутой гипотезы.

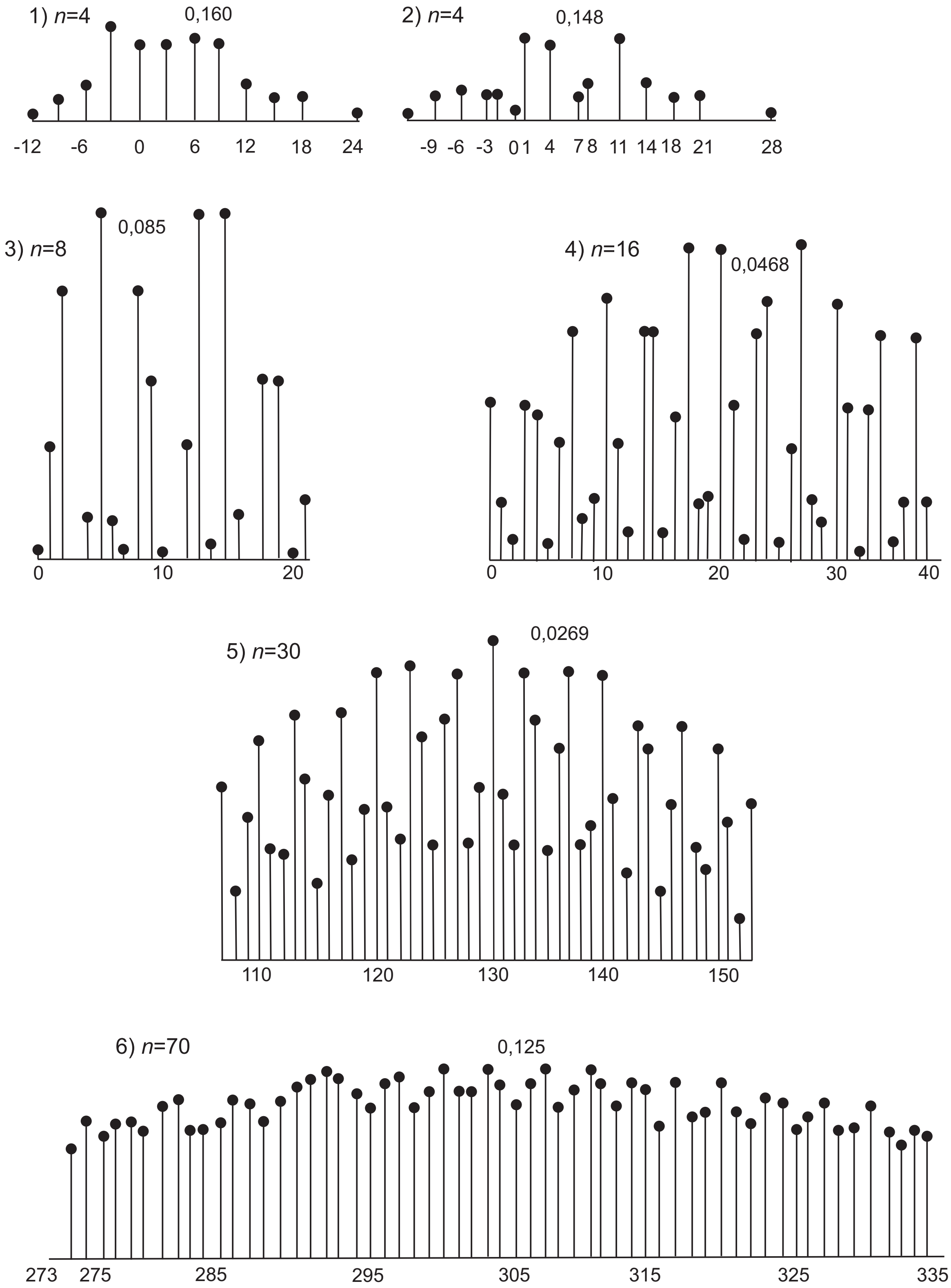
1) n=4
0,160
-12 -6 0 6 12 18 24
2) n=4
0,148
-9 -6 -3 0 1 4 7 8 11 14 18 21 28
3) n=8
0,085
0 10 20
4) n=16
0,0468
0 10 20 30 40
5) n=30
0,0269
110 120 130 140 150
6) n=70
0,125
273 275 285 295 305 315 325 335

Рис. 1

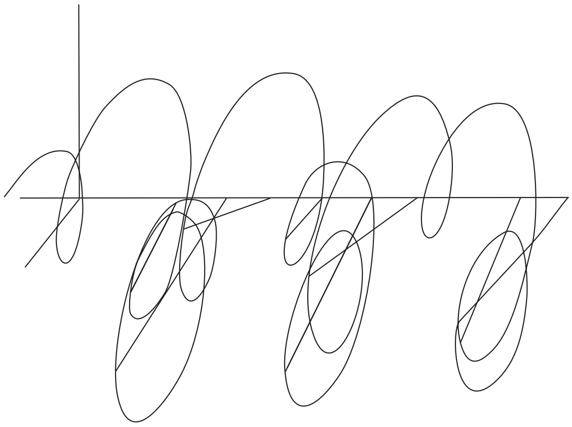

Рис. 2

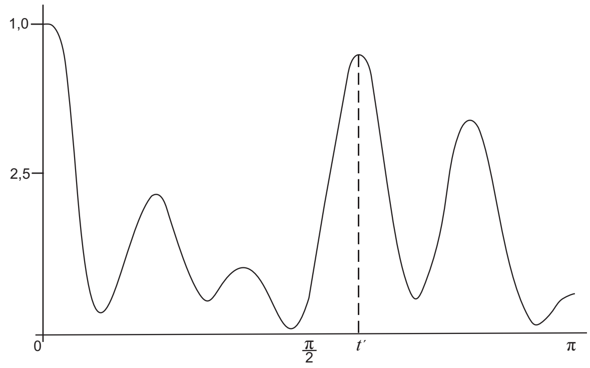

Рис. 3

2. О максимальной вероятности сумм целочисленных случайных величин

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин с невырожденной функцией распределения без моментных ограничений. Для таких последовательностей одним из естественных свойств является факт убывания концентрации. Задаче оценки функции концентрации посвящено большое число работ. По этому вопросу сошлемся на специальную монографию В. Хенгартнера и Р. Теодореску [116], а также на более поздние исследования Б. А. Рогозина [91–94]. Следует заметить, что с функцией концентрации тесно связана задача максимальной вероятности.

В этом разделе ставится задача получить неулучшаемую оценку максимальной вероятности, но для сравнительно неширокого класса распределения. Ниже доказаны две теоремы. Первая дает оценку максимальной вероятности для унимодально распределенных целочисленных величин. Приведенный после теоремы 2.1 пример показывает, что полученное неравенство «правильное». Теорема 2.2 также посвящена поведению $\sup\limits_x P(S_n = x)$ при менее ограниченных условиях — без предположения об унимодальности, но при независимых и симметрично распределенных случайных величинах.

Теорема 2.1. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — последовательность независимых унимодальных целочисленных случайных величин и $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Тогда*

$$\sup_x P(S_n = x) \leqslant \sqrt{\frac{6}{\pi}} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{p_j^2} - 1 \right) \right)^{-1/2} \cdot \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \right),$$

где $\sup\limits_x P(\xi_j = x) = p_j$.

Напомним, что решетчатое распределение, сосредоточенное в точках вида $a + kh$, называют *унимодальным*, если существует такое k_0, что вероятности попадания в узлы решетки монотонно не возрастают при $k \geqslant k_0$ и монотонно не убывают при $k \leqslant k_0$.

Доказательство. Воспользуемся результатами работ [73, 83], утверждающими, что если унимодальная плотность $P_\psi(x)$ удовлетворяет условию $p_\psi(x) \leqslant A$, то

$$\bigl| f(t, \psi) \bigr| \leqslant \frac{\sin \frac{t}{2A}}{\frac{t}{2A}} \quad \text{для } t \leqslant \pi A.$$

Рассмотрим сумму $\xi_j+\eta$, где η — равномерно распределенная случайная величина, а ξ_j — решетчатая унимодальная случайная величина. Имеем

$$\bigl|f(t,\xi_j+\eta)\bigr| = \left|f(t,\xi_j)\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\right| \leqslant \frac{\sin\frac{t}{2p_j}}{\frac{t}{2p_j}} \quad \text{при } 0<|t|\leqslant \pi p_j.$$

Отсюда следует, что

$$\bigl|f(t,\xi_j)\bigr| \leqslant p_j\frac{\sin\frac{t}{2p_j}}{\sin\frac{t}{2}}, \quad 0<|t|\leqslant \pi p_j.$$

Для t, удовлетворяющих условию $\pi p_j<|t|<\pi$, используем оценку

$$\bigl|f(t,\xi_j)\bigr| \leqslant \frac{p_j}{\sin\frac{t}{2}}.$$

Действительно,

$$\bigl|f(t,\xi_j)(1-e^{it})\bigr| = \left|\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{itm}(p_m-p_{m-1})\right| = \left|\sum_{m=j+1}^{\infty}+\sum_{m=-\infty}^{j}\right|.$$

По условию теоремы

$$\left|\sum_{m=j+1}^{\infty} e^{itm}(p_m-p_{m-1})\right| \leqslant \sum_{m=j+1}^{\infty}\bigl|p_m-p_{m-1}\bigr| = p_j.$$

Аналогично,

$$\left|\sum_{m=-\infty}^{j} e^{itm}(p_m-p_{m-1})\right| \leqslant \sum_{m=-\infty}^{j}\bigl|p_m-p_{m-1}\bigr| = p_j.$$

Следовательно, для $t\neq 2k\pi$ имеем

$$\bigl|f(t,\xi_j)\bigr| \leqslant \frac{2p_j}{|1-e^{it}|} = \frac{p_j}{\bigl|\sin\frac{t}{2}\bigr|}, \quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots.$$

Тогда можно записать

$$\sup_x P(S_n=x) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\prod_{j=1}^{n}\bigl|f(t,\xi_j)\bigr|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|\leqslant\pi p_k}\frac{1}{\sin^n\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{n}p_j\sin\frac{t}{2p_j}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\pi p_k\leqslant|t|\leqslant\pi}\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}p_j}{\sin^n\frac{t}{2}}\,dt = J_1+J_2,$$

где $p_k=\max\limits_j p_j$. Оценим эти интегралы в отдельности.

Для оценки J_1 разложим в ряды функции $\ln\left(p_j\sin\frac{t}{2p_j}\right)$ и $\ln\sin\frac{t}{2}$ (см., например, [39, с. 60]):

$$\ln p_j\sin\frac{t}{2p_j} = \ln\frac{t}{2} - \sum_{m=2k}^{\infty}\left(\frac{t}{2p_j}\right)^m\frac{2^{m-1}|B_m|}{m!m/2}, \quad |t|\leqslant 2p_j\pi,$$

$$\ln\sin\frac{t}{2} = \ln\frac{t}{2} - \sum_{m=2k}^{\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^m\frac{2^{m-1}|B_m|}{m!m/2}, \quad |t|<2\pi,$$

где B_m — числа Бернулли. Пользуясь таким представлением, нетрудно получить, что при $|t|<2p_k\pi$ и тем более для $|t|\leqslant 2p_j\pi$ имеем

$$\ln\frac{p_j\sin\frac{t}{2p_j}}{\sin\frac{t}{2}} = \ln\frac{t}{2} - \frac{t^2}{24p_j^2} - \frac{t^4}{180p_j^4} - \cdots - \left(\ln\frac{t}{2} - \frac{t^2}{24} - \frac{t^4}{180} - \cdots\right) < -\frac{t^2}{24}\left(\frac{1}{p_j^2}-1\right),$$

что дает возможность оценить интеграл следующим образом:

$$J_1 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|\leqslant \pi p_k} \frac{1}{\sin^n \frac{t}{2}} \prod_{j=1}^{n} p_j \sin\frac{t}{2p_j}\,dt < \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|\leqslant \pi p_k} \exp\left\{-\frac{t^2}{24}\sum_{j=1}^{n}\frac{1-p_j^2}{p_j^2}\right\} dt =$$

$$= \frac{\sqrt{12}}{\pi\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1-p_j^2}{p_j^2}\right)^{1/2}} \int\limits_0^{\frac{\pi p_k}{\sqrt{12}}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1-p_j^2}{p_j^2}\right)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du \leqslant \sqrt{\frac{6}{\pi}}\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{p_j^2}-1\right)\right)^{-1/2}.$$

Оценим J_2. Рассмотрим в отдельности три случая: $p_k \leqslant 1/4$, $1/4 \leqslant p_k \leqslant 3/4$ и $3/4 \leqslant p_k < 1$.

Пусть $0 < p_k \leqslant 1/4$. Разобьем область интегрирования на следующие части: $[\pi p_k, 2\pi p_k]$, $[2\pi p_k, 3\pi p_k]$, …, $[[\pi/p_k]p_k, \pi]$. Тогда для $l \geqslant 2$ имеем

$$\int\limits_{l\pi p_k}^{(l+1)\pi p_k} \frac{dt}{\sin^n \frac{t}{2}} \leqslant \pi p_k \frac{1}{\left(\sin\frac{l\pi p_k}{2}\right)^n} \leqslant \pi p_k \frac{1}{l^n p_k^n} = \frac{\pi}{l^n p_k^{n-1}},$$

$$\sum_{l=2}^{\infty} \int\limits_{l\pi p_k}^{(l+1)\pi} \frac{dt}{\sin^n \frac{t}{2}} \leqslant \frac{\pi}{p_k^{n-1}} \sum_{l=2}^{\infty}\frac{1}{l^n} \leqslant \frac{\pi}{p_k^{n-1}2^n}\left[1+\sum_{l=3}^{\infty}\frac{2^n}{l^n}\right] <$$

$$< \frac{\pi}{p_k^{n-1}2^n}\left(1+\sum_{l=3}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\right)^2\right) = \frac{\pi 4}{p_k^{n-1}2^n}\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right);$$

$$\frac{4\pi}{2^n p_k^{n-1}}\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right) = \sqrt{\frac{6}{\pi}}\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{p_j^2}-1\right)\right)^{-1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\pi}{6}} \frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{p_j^2}-1\right)\right)^{1/2}\cdot\sqrt{n}}{2^n p_k^{n-1}} \frac{4\pi(\pi^2-6)}{6} =$$

$$= \sqrt{\frac{6}{\pi}}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{p_j^2}-1\right)\right)^{-1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{p_j^2}-1\right)\right)^{1/2}\cdot\sqrt{n}}{2^n} \frac{1}{p_k^{n-1}}\frac{4\pi(\pi^2-6)}{6}.$$

Осталось оценить интеграл в интервале $[\pi p_k, 2\pi p_k]$. Для этого воспользуемся теоремой о среднем для функции $1/\sin\frac{t}{2}$:

$$\frac{1}{\sin\frac{t}{2}} \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\pi p_k}{2}} - (t-\pi p_k)\frac{\cos\pi p_k}{2\sin^2\pi p_k} = \frac{1}{\sin\frac{\pi p_k}{2}}\left[1-(t-\pi p_k)\frac{\cos\pi p_k}{8\sin\frac{\pi p_k}{2}\cos^2\frac{\pi p_k}{2}}\right] \leqslant \frac{e^{-\alpha\tau}}{\sin\frac{\pi p_k}{2}},$$

где

$$\tau = t-\pi p_k, \quad \alpha = \frac{\cos\pi p_k}{4\sin\frac{\pi p_k}{2}(1+\cos\pi p_k)}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\pi p_k}^{2\pi p_k}\frac{dt}{\sin^n\frac{t}{2}} \leqslant \frac{1}{\sin^n\frac{\pi p_k}{2}}\int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha n\tau}\,dt = \frac{1}{\sin^n\frac{\pi p_k}{2}}\frac{4\sin\frac{\pi p_k}{2}(1+\cos\pi p_k)}{n\cos\pi p_k} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sin^n\frac{\pi p_k}{2}}\frac{2\pi p_k(1+\cos\pi p_k)}{n\cos\pi p_k} \leqslant \frac{1}{\sin^n\frac{\pi p_k}{2}}\frac{p_k}{n}\left[2\pi\left(1+\frac{1}{\cos\pi p_k}\right)\right] \leqslant \frac{1}{\sin^n\frac{\pi p_k}{2}}\frac{p_k}{n}\left[2\pi(\sqrt{2}+1)\right].$$

Следовательно,

$$\frac{\prod\limits_{j=1}^{n} p_j}{\pi} \int\limits_{\pi p_k}^{2\pi p_k} \frac{dt}{\sin^n t} \leqslant \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} p_j}{\pi} \frac{p_k}{n} \frac{2\pi(\sqrt{2}+1)}{\sin^n \frac{\pi p_k}{2}} \leqslant \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} p_j \cdot p_k}{n} \frac{2(\sqrt{2}+1)}{p_k^n} =$$

$$= \sqrt{\frac{6}{\pi}} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{p_j^2} - 1 \right) \right)^{-1/2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{6}} \left[\left(\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{p_j^2} - 1 \right) \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{n}} \right] \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} p_j \cdot 2(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{n} p_k^{n-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{6}{\pi}} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{p_j^2} - 1 \right) \right)^{-1/2} \cdot \frac{c}{\sqrt{n}}.$$

Рассмотрим случай $1/4 \leqslant p_k < 3/4$:

$$J_2 = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} p_j}{\pi} \int\limits_{\pi p_k}^{\pi} \frac{dt}{\sin^n \frac{t}{2}} \leqslant \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} p_j (1-p_k)}{\sin^n \frac{\pi p_k}{2}} < (1-p_k) \left(\frac{3/4}{\sin \frac{3\pi}{8}} \right)^n < \frac{3}{4} \left(\frac{4}{5} \right)^n =$$

$$= \sqrt{\frac{6}{\pi}} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{p_j^2} - 1 \right) \right)^{-1/2} \sqrt{\frac{\pi}{6}} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{p_j^2} - 1 \right) \right)^{1/2} \frac{3}{4} \left(\frac{4}{5} \right)^n =$$

$$= \sqrt{\frac{6}{\pi}} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{p_j^2} - 1 \right) \right)^{-1/2} \sqrt{\frac{6}{\pi}} \, \frac{3}{4} \left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{p_j^2} - 1 \right)}{n} \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{n}} n \left(\frac{4}{5} \right)^n \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{6}{\pi}} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{p_j^2} - 1 \right) \right)^{-1/2} \cdot \frac{c}{\sqrt{n}}.$$

Наконец, пусть $3/4 \leqslant p_k < 1$. Имеем

$$J_2 = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} p_j}{\pi} \int\limits_{\pi p_k}^{\pi} \frac{dt}{\sin^n \frac{t}{2}} = \frac{2 \prod\limits_{j=1}^{n} p_j}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi(1-p_k)/2} \frac{d\tau}{\cos^n \tau}.$$

Воспользуемся разложением (при $|t| \leqslant \pi/2$)

$$-\ln \cos t = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sin^2 t)^k}{k} = \frac{sin^2 t}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sin^2 t)^{k-1}}{k} \leqslant \frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} = t^2.$$

Следовательно, тем более для $|t| \leqslant \pi/8$ имеем $1/\cos t \leqslant e^{t^2}$. Нетрудно показать, что для

$$\int\limits_0^A e^{t^2} \, dt \leqslant e^{A^2}, \qquad A \leqslant 1,$$

$$\int\limits_0^A e^{t^2} \, dt \leqslant e + \frac{1}{2} \big(e^{A^2} - e \big) = \frac{1}{2} \big(e^{A^2} + e \big) < e^{A^2}, \quad A > 1.$$

Используя последнее неравенство и учитывая, что $1 - p_k \leqslant 1/4$, получим:

$$J_2 = \frac{2}{\pi}\prod_{j=1}^{n} p_j \int\limits_0^{\pi(1-p_k)/2} \frac{dt}{\cos^n \tau} < \frac{2}{\pi}\prod_{j=1}^{n} p_j \int\limits_0^{\pi(1-p_k)/2} e^{n\tau^2} d\tau = \frac{2}{\pi\sqrt{n}}\prod_{j=1}^{n} p_j \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}(1-p_k)\sqrt{n}} e^{u^2}\,du \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{\pi\sqrt{n}}\prod_{j=1}^{n} p_j \exp\left\{\frac{n\pi^2(1-p_k)^2}{4}\right\} \leqslant \frac{2p_k^n}{\pi\sqrt{n}} \exp\left\{\frac{n\pi^2(1-p_k)^2}{4}\right\}.$$

Пусть $\varepsilon = 1 - p_k$, тогда $\varepsilon \leqslant 1/4$ и

$$\ln p_k \exp\left\{\frac{\pi^2}{4}(1-p_k)^2\right\} = \ln(1-\varepsilon) + \frac{\pi^2\varepsilon^2}{4} < -\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\pi^2\varepsilon^2}{4} < -\frac{\varepsilon}{2},$$

т.е.

$$p_k \exp\left\{\frac{1}{4}\pi^2(1-p_k)^2\right\} \leqslant \exp\left\{-\frac{1}{2}(1-p_k)\right\}.$$

Поэтому

$$J_2 \leqslant \frac{2}{\pi\sqrt{n}} \exp\left\{-\frac{n}{2}(1-p_k)\right\} =$$
$$= \sqrt{\frac{6}{\pi}}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{p_j^2}-1\right)\right)^{-1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\pi}{6}}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{p_j^2}-1\right)\right)^{1/2} \cdot \sqrt{n}\exp\left\{-\frac{n}{2}(1-p_k)\right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} =$$
$$= \sqrt{\frac{6}{\pi}}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{p_j^2}-1\right)\right)^{-1/2} \cdot \frac{c}{\sqrt{n}}.$$

Следовательно,

$$\sup_x P(S_n = x) \leqslant \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{p_j^2}-1\right)\right)^{-1/2}\left(1 + \frac{c}{\sqrt{n}}\right),$$

где c — абсолютная константа (можно взять $c = 2$). □

Пример 2.1. Пусть ξ_j принимает целые значения от $-N$ до N с вероятностью $p_0 = 1/(2N+1)$,

$$D\xi_j = \frac{2}{2N+1}\sum_{j=1}^{N} j^2 = \frac{2}{2N+1}\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} = \frac{4N^2+4N+1-1}{12} = \frac{1-p_0^2}{12p_0^2}.$$

Согласно локальной теореме

$$\sup_x P(S_n = x) = P(S_n = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma} = \frac{\sqrt{12}\,p_0}{\sqrt{2\pi n(1-p_0^2)}} = \sqrt{\frac{6}{\pi}}\frac{p_0}{\sqrt{n(1-p_0^2)}}.$$

Таким образом, оценка, полученная в теореме, не может быть существенно улучшена.

Теорема 2.2. *Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ — независимые, одинаково и симметрично распределенные случайные величины, принимающие целочисленные значения. Тогда*

$$\max_x P(S_n = x) < \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sqrt{1-p_0^{n+1}}}{\sqrt{(n+1)q_0}} + \frac{1-p_0^{n+1}}{(n+1)q_0}\right),$$

где $P(\xi_j = 0) = p_0$, $0 \leqslant p_0 < 1$, $q_0 = 1 - p_0$.

Доказательство. Допустим сначала, что

$$P(\xi_j = 0) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.1}$$

Представим функцию распределения $H(z) = P(\xi_j < z)$ в виде линейной комбинации

$$H(z) = \sum_{j=1}^{w} \Lambda_j H_j(x), \quad \Lambda_j \geqslant 0, \quad \sum_j \Lambda_j = 1,$$

где $H_j(x)$ — функция распределения случайной величины $z^{(j)}$, принимающей два симметричных относительно нуля значения с вероятностью $1/2$ каждое.

Возьмем систему $n = n_1 + \ldots + n_w$ независимых случайных величин, из которых n_ν распределены как $z^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2, \ldots, w$. Обозначим через $z_{n_1,\ldots,n_w}$ сумму этих величин:

$$z_{n_1,\ldots,n_w} = \underbrace{z^{(1)} + \cdots + z^{(1)}}_{n_1} + \underbrace{z^{(2)} + \cdots + z^{(2)}}_{n_2} + \cdots + \underbrace{z^{(w)} + \cdots + z^{(w)}}_{n_w}.$$

Выразим распределение $P(S_n \in \Delta)$, где Δ — некоторый отрезок, следующим образом:

$$P(S_n \in \Delta) = \sum_{\substack{0 \leqslant n_0 \\ n_1 + \cdots + n_w = n}} \frac{n!}{n_1! \cdots n_w!} \Lambda_1^{n_1} \cdots \Lambda_w^{n_w} P(z_{n_1,\ldots,n_w} \in \Delta).$$

Возьмем в качестве Δ отрезок длины $1 < l < 2$ и, применив лемму Рогозина (см. [91, с. 103]), получим

$$P(z_{n_1,\ldots,n_w} \in \Delta) \leqslant D_n = C_n^{[n/2]} 2^{-n}.$$

Поэтому учитывая, что $(\Lambda_1 + \ldots + \Lambda_w)^n = 1$, имеем

$$\max P(S_n = x) \leqslant C_n^{[n/2]} 2^{-n}.$$

Воспользовавшись оценкой $D_n < \sqrt{2/(\pi n)}$ (см. [149, с. 57] или [88, с. 178]), получаем

$$\max_x P(S_n = x) < \sqrt{\frac{2}{\pi n}}.$$

Откажемся от предположения (2.1). Обозначим $p_0 = P(\xi_j = 0)$, $0 < p_0 < 1$, и представим $H(z)$ в виде

$$H(z) = p_0 E(z) + q_0 H_0(z), \quad q_0 = 1 - p_0,$$

где $E(z)$ — единичная функция распределения и H_0 — функция распределения симметричных случайных величин, не имеющих скачка в нуле. Из равенства

$$H^{*n}(z) = \sum_{k=0}^{n} c_n^k \, q_0^k \, p_0^{n-k} H_0^{*k}(z) * E^{*n-k}(z)$$

выводим, что в случае $0 < p_0 < 1$ имеет место следующая оценка:

$$\begin{aligned}
\max_x P(S_n = x) &\leqslant p_0^n + \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \; c_n^k \, q_0^k \, p_0^{n-k} = \\
&= p_0^n + \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{2}{\pi(k+1)}} \; c_n^k \, q_0^k \, p_0^{n-k} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} p_0^n - \sqrt{\frac{2}{\pi}} p_0^n + \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) c_n^k \, q_0^k \, p_0^{n-k} \leqslant \\
&\leqslant p_0^n + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{n} c_n^k \, q_0^k \, p_0^{n-k} \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} p_0^n + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) c_n^k \, q_0^k \, p_0^{n-k}.
\end{aligned}$$

Оценим следующую сумму:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^{n} c_n^k \, q_0^k \, p_0^{n-k} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right)^2 &\leqslant \sum_{k=0}^{n} c_n^k \, q_0^k \, p_0^{n-k} \frac{1}{k+1} = \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} c_n^k \, q_0^k \, p_0^{n-k} z^k \right) dz = \int_0^1 (p_0 + q_0 z)^n dz = \left. \frac{(p_0 + q_0 z)^{n+1}}{(n+1)_{q_0}} \right|_0^1 = \frac{1 - p_0^{n+1}}{(n+1) q_0}.
\end{aligned}$$

Следовательно, имеем

$$\max_x P(S_n = x) \leqslant p_0^n + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{1-p_0^{n+1}}}{\sqrt{(n+1)q_0}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} p_0^n + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) c_n^k\, q_0^k\, p_0^{n-k} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{1-p_0^{n+1}}}{\sqrt{(n+1)q_0}} + p_0^n \left(1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) c_n^k\, q_0^k\, p_0^{n-k}.$$

Рассмотрим в отдельности

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) P_n(k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_n(k)\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}(k+1)(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})} <$$

$$< \sum_{k=1}^{n} \frac{P_n(k)\sqrt{2}}{(k+1)(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})} < \sum_{k=1}^{n} \frac{P_n(k)}{k+1} = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} c_n^k\, p_0^{n-k}\, q_0^k\, z^k\, dz - p_0^n = \int_0^1 (p_0 + q_0 z)^n dz =$$

$$= \frac{(p_0+q_0 z)^{n+1}}{(n+1)q_0}\Big|_0^1 - p_0^n < \frac{1-p^{n+1}}{(n+1)q_0} - p_0^n.$$

Окончательная оценка примет вид

$$\max_x P(S_n = x) < \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\sqrt{1-p_0^{n+1}}}{\sqrt{(n+1)q_0}} + \frac{1-p_0^{n+1}}{(n+1)q_0}\right). \qquad \square$$

Замечание. При замене в неравенстве теоремы 2.2 величины $1-p_0^{n+1}$ на 1 происходит незначительная потеря точности.

3. О локальной предельной теореме

Данный раздел содержит основную часть работы и начинается с рассмотрения гипотез, при которых применимость локальной теоремы кажется правдоподобной, но в действительности это не так (см. [15]).

В последующих рассуждениях значительное место занимают соображения, основанные на количественной характеристике гладкости распределения случайной величины ξ, которую будем обозначать $\delta(P_\xi)$. Как выясняется из дальнейшего, функция гладкости $\delta(P_\xi)$ естественно связана с такими характеристиками дискретного распределения, как максимальный шаг распределения и сходимость по вариации, и допускает оценку характеристической функции сверху, позволяющую в свою очередь выделить класс необязательно одинаково распределенных случайных величин, для которых выполнена локальная теорема, и эффективно оценить скорость сходимости. Это дает возможность выделить понятие функции гладкости $\delta(P_\xi)$ как важнейшее для исследований по локальным теоремам.

3.1. О связи локальной и интегральной теорем для решетчатых распределений. Ниже будет приведен пример 3.1, показывающий, что интегральная теорема и асимптотически равномерная распределенность сумм S_n не равносильны локальной теореме. Следует подчеркнуть, что в этом примере слагаемые в нормированной сумме не являются бесконечно малыми. Не меняет положения и добавление этого последнего свойства. В примере 3.2 строится последовательность независимых случайных величин, которые бесконечно малы, удовлетворяют интегральной теореме, но тем не менее, для S_n не имеет места локальная теорема.

Пример 3.1. Пусть случайные величины с нечетными индексами $n = 2k-1$ распределены по симметричному пуассоновскому закону

$$\xi_{2k-1} = \begin{cases} 0 & 2e^{-\Lambda k/2} \\ jh_k & \dfrac{1}{j!}\left(\dfrac{\Lambda_k}{2}\right)^j e^{-\frac{\Lambda k}{2}}, \quad j = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

с характеристической функцией

$$f(t, \xi_{2k-1}) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{it_j h_k} \frac{\left(\frac{\Lambda_k}{2}\right)^j e^{-\frac{\Lambda_k}{2}}}{j!} \times \sum_{j=0}^{\infty} e^{-it_j h_k} \frac{\left(\frac{\Lambda_k}{2}\right)^j e^{-\frac{\Lambda_k}{2}}}{j!} =$$
$$= e^{-\frac{\Lambda_k}{2}} e^{\frac{\Lambda_k}{2} e^{ith_k}} e^{-\frac{\Lambda_k}{2}} e^{\frac{\Lambda_k}{2} e^{ith_k}} = e^{-\Lambda_k} e^{\Lambda_k \cos th_k} = e^{\Lambda_k (\cos th_k - 1)},$$

где $\Lambda_k k^{1/2}$, $h_k = 2[e^{k^2/2} k^{-1/4}]$.

Величины ξ_n с четными индексами $n = 2k$ принимают значения

$$-k,\ -k+1,\ \dots,\ -1,\ 1,\ 2,\ \dots,\ k$$

с вероятностью $1/2k$ каждая. Поэтому ξ_{2k} равномерно распределена $\operatorname{mod} k$.

Утверждение 3.1. *Сумма* S_n/B_n *асимптотически нормальна* $(0,1)$:

$$P(S_n < xB_n) \to \Phi(x), \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Действительно, пусть $n' = 2k' - 1$ — наибольшее нечетное число, не превосходящее n: $2k' - 1 \leqslant n$. Имеем:

$$D\xi_{2k'-1} < B_n^2 \leqslant \sum_{k \leqslant k'} D\xi_{2k} + \sum_{k < k'} D\xi_{2k-1} + D\xi_{2k'-1}. \tag{3.1}$$

Несложные вычисления дают следующие оценки:

$$D\xi_{2k'-1} = h_{k'}^2 \sum_{j=1}^{k'} j^2 p_j = h_{k'}^2 \Lambda_{k'},$$

$$D\xi_{2k} = 2\sum_{j=1}^{k} j \frac{1}{2k'} = \frac{1}{k'} \frac{k'(k'+1)(2k'+1)}{6} = \frac{2k'^2 + 3k' + 1}{6},$$

$$\sum_{k<k'} D\xi_{2k} < \frac{k'^3}{3} + \frac{k'^2}{2} + \frac{k'}{6} < k'^3,$$

$$\sum_{k<k'} D\xi_{2k-1} \leqslant (k'-1) h_{k'}^2 \Lambda_{k'} = (k'-1) 4e^{(k'-1)^2} (k'-1)^{-1/2+1/2} =$$
$$= 4(k'-1) e^{(k'-1)^2} < 4k' e^{(k'-1)^2}.$$

Следовательно, (3.1) можно переписать следующим образом:

$$h_{k'}^2 \Lambda_{k'} < B_n^2 \leqslant (k')^3 + 4k' e^{(k'-1)^2} + h_{k'}^2 \Lambda_{k'}.$$

Так как

$$\Lambda_{k'} h_{k'}^2 = (k')^{1/2} 4 \frac{e^{(k')^2}}{(k')^{1/2}} = 4e^{(k')^2},$$

то

$$B_n^2 \sim \Lambda_{k'} h_{k'}^2 \sim 4e^{(k')^2}.$$

Далее, поскольку $2k' - 1 \leqslant n$, получаем

$$S_n = \sum_{2k \leqslant n} \xi_{2k} + \sum_{k<k'} \xi_{2k-1} + \xi_{2k'-1} \equiv \tau_n + \rho_n + \xi_{2k'-1} \equiv S_{n-1} + \xi_{2k'-1}.$$

Имеем

$$\frac{S_{n-1}}{B_n} \xrightarrow{P} 0, \quad \frac{\xi_{2k'-1}B_{n-1}}{\sqrt{D\xi_{2k'-1}}B_n} \xrightarrow{P} 0, \quad P\left(\frac{\xi_{2k'-1}}{\sqrt{D\xi_{2k'-1}}}\right) \Longrightarrow \Phi(x).$$

Из сказанного вытекает, что нормированная сумма S_n/B_n асимптотически нормальна. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n}{B_n} < x\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_{n-1}}{B_{n-1}}\frac{B_{n-1}}{B_n} + \frac{\xi_{2k'-1}}{\sqrt{D\xi_{2k'-1}}} - \frac{\xi_{2k'-1}B_{n-1}}{\sqrt{D\xi_{2k'-1}}B_n} < x\right) = \Phi(x). \qquad \square$$

Утверждение 3.2. *Суммы S_n обладают свойством асимптотической равномерной распределенности.*

Доказательство этого утверждения основывается на следующей простой лемме.

Лемма 3.1. *Если к случайной величине ξ, равномерно распределенной $\bmod h$, добавить не зависящую от нее случайную величину η, то сумма $\xi+\eta$ снова распределена равномерно $\bmod h$.*

Доказательство. Действительно,

$$P\big(\xi+\eta \equiv m \bmod h\big) = \sum_{k=0}^{h-1} P\big(\xi \equiv k \bmod h\big),$$

$$P\big(\eta \equiv m-k \bmod h\big) = \frac{1}{h}\sum_{k=0}^{h-1} P\big(\eta \equiv m-k \bmod h\big)$$

Учитывая, что

$$\sum_{k=0}^{h-1} P(\eta \equiv m-k \bmod h) = 1,$$

получаем утверждение леммы. $\square$

Доказательство утверждения 3.2 о том, что S_n распределена равномерно по любому модулю k, $0<k<[n/2]$, немедленно следует из леммы и определения величин ξ_{2k}.

Утверждение 3.3. *Последовательность $\{\xi_n\}$ не удовлетворяет локальной теореме.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда, как легко видеть, при $m' = \mathrm{o}(B_n)$ и $m'' = \mathrm{o}(B_n)$ должно быть $P(S_n = m) \sim P(S_n = m'')$. Выберем $m''=0$, $m' = \frac{1}{2}h_{k'} = \mathrm{o}(B_n)$. Тогда

$$P(S_n = m') = P\left(\sum_{2k<n}\xi_{2k} + \sum_{k<k'}\xi_{2k-1} + \xi_{2k'-1} = m'\right) =$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} P\big(\tau_n+\rho_n = m' - jh_{k'}\big)P\big(\xi_{2k'-1} = jh_{k'}\big) \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} P\big(\tau_n+\rho_n = m'-jh_{k'}\big) =$$
$$= P\big(\tau_n + |\rho_n| > m'\big) \leqslant P\big(|\rho_n| > m' - (k')^2\big) = 2P\big(\rho_n > m' = (k')^2\big).$$

Так как при $k' \geqslant k_0$ имеем $h_{k'}/4 \geqslant (k')^2$, то при $k' > k_0$

$$P(S_n = m') \leqslant 2P\big(\rho_n \geqslant \tfrac{1}{4}h_{k'}\big).$$

Обозначим $h_{k'}/4 = T$. По неравенству Чебышева при любом $u>0$

$$P(\rho_n \geqslant T) \leqslant e^{-uT}Ee^{u\rho_n} = \exp\left\{-uT + \sum_{k<k'}\Lambda_k(\operatorname{ch} uh_k - 1)\right\} \equiv e^w. \tag{3.2}$$

Определим u следующим образом:

$$e^{uh_{k'-1}} = \frac{h_{k'}}{4\Lambda_{k'-1}h_{k'-1}} \quad \Longleftrightarrow \quad u = \frac{1}{h_{k'-1}}\ln\frac{h_{k'}}{4\Lambda_{k'-1}h_{k'-1}}.$$

Выбор такого u продиктован следующим соображением:
$$-\frac{h_{k'}}{4}+\Lambda_{k'-1}h_{k'-1}\operatorname{sh} uh_{k'-1}=0,\quad \frac{h_{k'}}{4}=\Lambda_{k'-1}.$$
При таком u показатель в правой части (3.2) не превосходит
$$-uT+k'\Lambda_{k'-1}\frac{e^{uh_{k'-1}}}{2}=-\frac{hk'}{4h_{k'-1}}\ln\frac{h_{k'}}{2\Lambda_{k'-1}h_{k'-1}}+\frac{h_{k'}k'}{8h_{k'-1}}. \tag{3.3}$$
Отметим теперь, что
$$\frac{h_{k'}}{h_{k'-1}}\sim e^{k'-1/2},$$
$$\ln\frac{h_{k'}}{2\Lambda_{k'-1}h_{k'-1}}=\ln\frac{e^{k'-1/2}}{2\sqrt{k'-1}}=\left(k'-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\ln(k'-1)\sim k'.$$
Следовательно, правая часть (3.3) эквивалентна
$$w\sim-\frac{1}{4}\frac{h_{k'}}{h_{k'-1}}k'+\frac{1}{8}\frac{h_{k'}}{h_{k'-1}}k'=\frac{h_{k'}k'}{8h_{k'-1}}\sim-\frac{1}{8}e^{-1/2}k'e^{k'} \tag{3.4}$$
и для всех $k'>k_1$ не превосходит
$$-\frac{1}{16}k'e^{k'}. \tag{3.5}$$
Из оценок (3.3)–(3.5) вытекает, что
$$P(S_n=m')\leqslant 2\exp\left\{-\frac{1}{16}k'e^{k'}\right\}. \tag{3.6}$$
В то же время
$$P(S_n=0)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}B_n}\sim\frac{1}{1\sqrt{2\pi}}e^{-k'^2/2}. \tag{3.7}$$
Сравнение (3.5) и (3.6) показывает, что асимптотика $P(S_n=m')\sim P(S_n=0)$ невозможна и что локальная теорема к последовательности $\{\xi_n\}$ неприменима. □

Пример 3.2. Построение последовательности происходит следующим образом. Пусть $\alpha=(1+\sqrt{5})/2$. Запишем α в виде цепной дроби $[1;\,1,\ldots,1]$. Числители и знаменатели q_j соответствующих дробей представим в виде таблицы

j	1	2	3	4	5	
p_j	3	5	8	13	21	…
q_j	2	3	5	8	13	…

Числители образуют ряд Фибоначчи: $p_j=p_{j-1}+p_{j-2}$, $j\geqslant 3$, причем $q_j=p_{j-1}$, $j\geqslant 2$.

Замечание. Пример 3.1 был построен автором за год до примера 3.2, более информативного и значительно более сложного. Однако прямые вероятностные рассуждения, используемые при анализе примера 3.1, представляют определенный интерес, и поэтому мы включили этот пример в текст.

Рассмотрим последовательность независимых величин, которую удобнее выписать в виде следующей таблицы:
$$\begin{matrix}\xi_1,\ldots,\xi_{n_1}\\ \xi_{n_1+1},\ldots,\xi_{n_1+n_2}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \xi_{n_1+n_2+\ldots+n_{j-1}+1},\ldots,\xi_{n_1+\ldots+n_{j-1}+n_j},\end{matrix} \tag{3.8}$$
где величины j-й строки распределены одинаково и принимают значения 0, q_j, p_j с вероятностями p_{j-2}/p_j, $1/p_j$, $1/p_j$ соответственно, а количество слагаемых в строке выбирается по формуле
$$n_j=\left[p_j^{3/2}\right]+1; \tag{3.9}$$

здесь $[\alpha]$ означает целую часть действительного числа α.

Заметим, что дисперсия величины $\xi_{n_1+\ldots+n_i}$ в i-й строке допускает следующую оценку:

$$\sigma_i^2 = \frac{p_i^2+q_i^2}{p_i} - \frac{(p_i+q_i)^2}{p_i^2} \geqslant \frac{p_i^2+q_i^2}{p_i} - \frac{2(p_i^2+q_i^2)}{p_i^2} = \frac{p_i-2}{p_i^2}(p_i^2+q_i^2);$$

так как $p_i \geqslant 3$, то последнее выражение не меньше, чем $(p_i^2+q_i^2)/3p_i$. Положим $N_k = n_1+\ldots+n_k$. Тогда

$$B_{N_k}^2 \geqslant \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{k}\frac{p_i^2+q_i^2}{p_i}\,n_i.$$

Проверка условия асимптотической равномерной распределенности основана на следующей теореме (см. [126]). Для того чтобы сумма S_n последовательности (3.7) была асимптотически равномерно распределена, достаточно, чтобы для любого фиксированного $h>0$ и $r=0,1,\ldots,h-1$ выполнялось условие $f(2\pi r/h, S_n)\to 0$ при $n\to\infty$.

Достаточно доказать, что

$$\prod_{j=1}^{k}\left|f\left(2\pi\frac{r}{h},\xi_{N_j}\right)\right|^{2n_j} \to 0 \quad \text{при } k\to\infty,$$

где $N_k = n_1+\ldots+n_k$. Очевидно,

$$f\left(2\pi\frac{r}{h},\xi_{N_j}\right) = \frac{p_j-2}{p_j} + \frac{1}{p_j}\exp\left\{2\pi i\frac{r}{h}q_j\right\} + \frac{1}{p_j}\exp\left\{2\pi i\frac{r}{h}p_j\right\}.$$

В дальнейшем, не ограничивая общности, будем считать r и h взаимно простыми. Имеем

$$\left|f\left(2\pi\frac{r}{h},\xi_{N_j}\right)\right| \leqslant \frac{1}{p_j} + \left|\frac{p_j-2}{p_j} + \frac{1}{p_j}\exp\left(2\pi i\frac{\tau}{h}q_j\right)\right|.$$

Допустим, что q_j не кратно h. Представим rq_j в виде $rq_j = m_jh+k$, $1\leqslant k\leqslant h-1$. Тогда

$$\begin{aligned}\left|\frac{p_j-2}{p_j} + \frac{1}{p_j}\exp\left(2\pi\,i\frac{r}{h}q_j\right)\right| &\leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant h-1}\left|\frac{p_j-2}{p_j} + \frac{1}{p_j}\exp\left(2\pi\,i\frac{k}{h}\right)\right| = \\ = \max_{1\leqslant k\leqslant h-1}\left|\frac{p_j-3}{p_j} + \frac{1}{p_j} + \frac{1}{p_j}\exp\left(2\pi\,i\frac{k}{h}\right)\right| &\leqslant \frac{p_j-3}{p_j} + \frac{1}{p_j}\max_{1\leqslant k\leqslant h-1}\left|1+\exp\left(2\pi\,i\frac{k}{h}\right)\right| \leqslant \\ &\leqslant \frac{p_j-3}{p_j} + \frac{2}{p_j}\left(1-\frac{\eta}{2}\right) = \frac{p_j-3}{p_j} + \frac{(2-\eta)}{p_j} = \frac{p_j-1-\eta}{p_j},\end{aligned}$$

где $\eta=\eta(h)=2\bigl(1-\cos\frac{\pi}{h}\bigr)$. Следовательно,

$$\left|f\left(2\pi\frac{r}{h},\ \xi_{N_j}\right)\right| \leqslant 1-\frac{\eta}{p_j},$$

и так как n_j выбирается соответственно условию (3.9), то

$$\left|f\left(2\pi\frac{r}{h},\ \xi_{N_j}\right)\right|^{2n_j} \leqslant \left(1-\frac{\eta}{p_j}\right)^{2n_j} \leqslant e^{-2\eta}.$$

Последнее неравенство справедливо при q_j не кратном h. Оценим количество таких q_j. Имея в виду, что $p_{j-1}q_j - p_j\,q_{j-1} = \pm 1$, получаем, что два последних числа q_{j-1} и q_j не могут быть оба кратными h. Действительно, если предположить, что существуют такие h и l, что одновременно $q_{j-1}=kh$ и $q_j=lh$, получим, что $l^2h^2 - p_jkh = \pm 1$ (по построению последовательности p_j и q_j имеем $p_{j-1}=q_j$; см. таблицу (1.3)); следовательно $l^2h - p_jk = \pm 1/h$. последнее равенство невозможно. Таким образом, среди чисел q_j, $j=1,\ldots,k$, не менее $k/2$ не кратны h. Поэтому при $k\to\infty$

$$\prod_{j=1}^{k}\left|f\left(2\pi\frac{r}{h},\xi_{N_j}\right)\right|^{2n_j} \leqslant \exp\left\{-\frac{k}{2}2\eta\right\} \to 0.$$

Проверим условие бесконечной малости слагаемых и интегральную теорему. Мы покажем, что в нашем примере

$$\frac{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}|\xi_j - E\xi_j|}{B_n} \to 0 \quad \text{при } n\to\infty.$$

Следовательно, имеет место как условие Ляпунова, так и условие бесконечной малости слагаемых в нормированной сумме.

Действительно, возьмем произвольное n и найдем такое k, что $n_1+\ldots+n_{k-1} < n \leqslant n_1+\ldots+n_k$. Тогда

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n}|\xi_j| = p_k, \quad \max_{1\leqslant j\leqslant n}|\xi_j - E\xi_j| = 2p_k;$$

учитывая, что $n_j = [p_j^{3/2}]+1$, имеем

$$\left(\frac{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}|\xi_j - E\xi_j|}{B_n}\right)^2 \leqslant \frac{4p_k^2}{\frac{1}{\sqrt{3}}\sum\limits_{j=1}^{k-1}\frac{p_j^2+q_j^2}{p_j}n_j} = \mathrm{O}\left(p_{k-1}^{-1/2}\right),$$

что и требовалось доказать.

Прежде чем доказать, что построенная последовательность (3.8) не удовлетворяет локальной теореме, приведем следующее необходимое условие локальной теоремы (см. [17]).

Если последовательность $\xi_1,\ldots,\xi_n,\ldots$ удовлетворяет локальной теореме, то найдется такая последовательность положительных чисел $\varepsilon_n\to 0$, что при $n\to\infty$

$$J_nB_n\int\limits_{\varepsilon_n\leqslant t\leqslant 2\pi-\varepsilon_n}\prod_{k=1}^{n}\bigl|f(t,\xi_k)\bigr|^2\,dt\to 0.$$

Замечание. В [17] утверждается лишь, что при $n\to\infty$

$$J_n = B_n\int\limits_{\varepsilon_n<t\leqslant\pi}\prod_{j=1}^{n}|f(t,\xi_j)|^2\,dt\to 0,$$

но так как подынтегральная функция четная и периодическая, то же утверждение будет справедливо в интервале $[\pi, 2\pi-\varepsilon_n]$, и окончательно получим

$$J_n = B_n\int\limits_{\varepsilon_n<t<2\pi-\varepsilon_n}\prod_{j=1}^{n}|f(t,\xi_j)|^2\,dt\to 0.$$

Рассмотрим сумму $\zeta_n = S_n+\eta$, где η — случайная величина с нормальной плотностью, S — построенная на основании ряда Фибоначчи. Получим, что ζ_n также имеет плотность.

Принимая во внимание оценку интеграла $J_{3,n} > \mathrm{const}$, имеем

$$B_{N_k}\int\limits_{|t-2\pi/\alpha|<B_{N_k}^{-1}}\prod_{j=1}^{n}\bigl|f(t,\xi_j)\bigr|^2e^{-t^2/2}\,dt > B_{N_k}e^{-\frac{1}{2}(2\pi\alpha-\frac{1}{B_{N_k}})}\int\limits_{|t-2\pi/\alpha|<B_{N_k}^{-1}}\prod_{j=1}^{k}\bigl|f(t,\xi_j)\bigr|^2dt > \mathrm{const}.$$

Следовательно, для плотности случайной величины ζ_n также не выполняется локальная теорема.

На основании построенного примера можно заключить, что условие теоремы Ю. А. Розанова:

$$R_{k,n} = \frac{1}{D\xi_k}\sum_{|j-E\xi_k|\leqslant n}(j-E\xi_k)^2p_{kj}\to 1\ (\mathcal{R})$$

при $n\to\infty$ равномерно по k (см. [95]) является оптимальным в следующем смысле. Если нарушается условие $(\mathcal{R})$, то локальная предельная теорема не выполняется. Действительно, для построенной последовательности функция $R_{k,n}$ довольно быстро стремится к нулю: $R_{1,3}=1$, $R_{2,3}=0{,}45$, $R_{3,3}=0{,}32$, $R_{4,3}=0{,}00085$, $R_{1,5}=R_{2,5}=1$, $R_{3,5}=0{,}4$, $R_{4,5}=0{,}144$, $R_{1,8}=R_{2,8}=R_{3,8}=1$, $R_{4,8}=0{,}349$ и $R_{5,8}=0{,}09$.

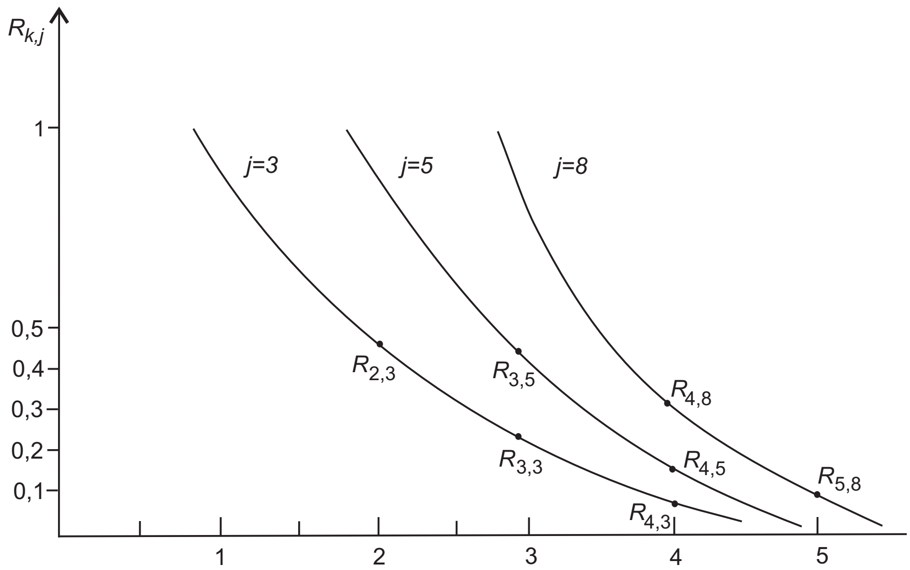

Рис. 4

Покажем, что эти интегралы для построенной последовательности (3.8) не стремятся к нулю. Оценим функцию

$$g(t) \equiv \left|f(t,\xi_j)\right|^2 = \frac{(p_j-2)^2+2}{p_j^2} + \frac{2}{p_j^2}\cos t(p_j-q_j) + \frac{2(p_j-2)}{p_j^2}\cos tq_j + \frac{2(p_j-2)}{p_j^2}\cos tp_j$$

снизу в точке $t_j = 2\pi q_{j-1}/q_j$. Учитывая, что $q_{j-1}p_j - q_jp_{j-1} = \pm 1$, имеем

$$\begin{aligned}(q_j-p_j)\frac{q_j-1}{q_j} = q_{j-q} - \frac{p_jq_{j-1}}{q_j} = q_{j-1} + \frac{\pm 1 + p_{j-1}q_j}{q_j} = q_{j-1} \pm \frac{1}{q_j} + p_{j-1},\\ \frac{q_{j-1}}{q_j}p_j = \frac{\pm 1 + q_jp_{j-1}}{q_j} = \pm\frac{1}{q_j} + p_{j-1}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Следовательно,

$$\left|f(t_j,\xi_{N_j})\right|^2 = \frac{(p_j-2)^2+2}{p_j^2} + \frac{2(p_j-2)}{p_j^2} + \frac{2}{p_j^2}\cos\frac{2\pi}{q_j} + \frac{2(p_j-2)}{p_j^2}\cos\frac{2\pi}{q_j}.$$

Воспользовавшись элементарным неравенством $\cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$, получим

$$\begin{aligned}\left|f(t_j,\xi_{N_j})\right|^2 \geqslant \frac{(p_j-2)^2+2+2(p_j-2)}{p_j^2} + \left(\frac{2}{p_j^2} + \frac{2(p_j-2)}{p_j^2}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{q_j}\right)^2\right) = \\ = 1 - \frac{(p_j-1)}{p_j^2}\left(\frac{2\pi}{q_j}\right)^2 > 1 - \frac{1}{p_j}\left(\frac{2\pi}{q_j}\right)^2, \quad j \geqslant 2.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Далее,

$$\left[\left|f(t,\xi_j)\right|^2\right]' = -\frac{2(p_j-q_j)}{p_j^2}\sin t(p_j-q_j) - \frac{2q_j(p_j-2)}{p_j^2}\sin tq_j - \frac{2p_j(p_j-2)}{p_j^2}\sin tp_j;$$

$$\begin{aligned}\left[\left|f(t,\xi_j)\right|^2\right]'_{t=t_j} = -\frac{2(p_j-q_j)}{p_j^2}\sin 2\pi\frac{q_{j-1}}{q_j}(p_j-q_j) - \frac{2q_j(p_j-2)}{p_j^2} - \\ - \sin\frac{2\pi}{q_j}q_{j-1}q_j - \frac{2p_j(p_j-2)}{p_j^2}\sin 2\pi\frac{q_{j-1}}{q_j}p_j.\end{aligned}$$

Принимая во внимание (3.10), имеем

$$\Big[\big|f(t,\xi_j)\big|^2\Big]'_{t=t_j} = -\frac{2(p_j-q_j)}{p_j^2}\sin\left(\pm 2\pi\frac{1}{q_j}\right) - \frac{2p_j(p_j-2)}{p_j^2}\sin\left(\pm\frac{2\pi}{q_j}\right) = \\ = \left[\frac{2(p_j-q_j)}{p_j^2} + \frac{2p_j(p_j-2)}{p_j^2}\right]\sin\left(\pm\frac{2\pi}{q_j}\right),$$

$$\Big[\big|f(t,\xi_j)\big|^2\Big]'_{t=t_j} \leqslant \left(\frac{2(p_j-q_j)}{p_j^2} + \frac{2(p_j-2)}{p_j^2}\right)\frac{2\pi}{q_j} = \frac{4\pi}{q_j}\left(1 - \frac{1}{p_j} - \frac{q_j}{p_j^2}\right) \leqslant \frac{4\pi}{q_j}. \tag{3.12}$$

Для второй производной имеем следующую оценку:

$$|g_j''(t)| = 2\left|\frac{p_j-2}{p_j^2}p_j^2\cos p_jt + \frac{(p_j-2)q_j^2}{p_j^2}\cos q_jt + \frac{(p_j-q_j)^2}{p_j^2}\cos(p_j-q_j)t\right| < \\ < \left(\big|f(0,\xi_{N_j})\big|^2\right)'' = 2\left((p_j-2) + \frac{(p_j-2)q_j^2}{p_j^2} + \frac{(p_j-q_j)^2}{p_j^2}\right) = \\ = 2\left(p_j - 1 + \frac{q_j^2-2q_j}{p_j} - \frac{q_j^2}{p_j^2}\right) < 2\left(p_j + \frac{q_j^2-2q_j}{p_j} - \frac{q_j^2}{p_j^2} - 1\right) < 2\frac{(p_j^2+q_j^2)}{p_j}. \tag{3.13}$$

Взяв разложение подынтегральной функции $|f(t,\xi_j)|^2$, $j = 1,\dots,k$, где $k\in\mathbb{N}$, в ряд Тейлора при $|t - 2\pi/\alpha| < B_{N_k}^{-1}$, получим

$$\big|f(t,\xi_j)\big|^2 = \left|f\left(\frac{2\pi}{\alpha},\xi_j\right)\right|^2 + \left|t-\frac{2\pi}{\alpha}\right|\Big[\big|f(t,\xi_j)\big|^2\Big|'_{t=2\pi/\alpha} + \frac{1}{2}\left|t-\frac{2\pi}{\alpha}\right|^2\Big[\big|f(t,\xi_j)\big|^2\Big]''_{t=\theta}, \quad \frac{2\pi}{\alpha} < \theta < t. \tag{3.14}$$

Исследуем каждое слагаемое в отдельности. Во-первых,

$$\left|f\left(\frac{2\pi}{\alpha},\xi_j\right)\right|^2 = \big|f(t_j,\xi_j)\big|^2 + \left|t_j - \frac{2\pi}{\alpha}\right|\Big[\big|f(t,\xi_j)\big|^2\Big|'_{t=t_j} + \frac{|t_j-2\pi/\alpha|^2}{2}\Big[\big|f(t,\xi_j)\big|^2\Big]''_{t=t_j\theta},$$

где $t_j = 2\pi q_{j-1}/q_j$. Учитывая, что $|t_j - 2\pi/\alpha| \leqslant 2\pi/q_j^2$, и (3.12), имеем

$$\left|f\left(\frac{2\pi}{\alpha},\xi_j\right)\right|^2 \geqslant 1 - \frac{1}{p_j}\left(\frac{2\pi}{q_j}\right)^2 - \frac{2\pi}{q_j^2}\,\frac{4\pi}{q_j} - \left(\frac{2\pi}{q_j^2}\right)^2\,\frac{2(p_j^2+q_j^2)}{p_j}. \tag{3.15}$$

Далее,

$$\Big[\big|f(t,\xi_j)\big|^2\Big]'_{t=2\pi/\alpha} \leqslant \big|f'(t_j,\xi_j)\big| + \left|t_j - \frac{2\pi}{\alpha}\right|\big|f''(t_j,\xi_j)\big| \leqslant \frac{4\pi}{q_j} + \frac{4\pi}{q_j^2}\,\frac{(p_j^2+q_j^2)}{p_j}, \tag{3.16}$$

$$\Big[\big|f(t,\xi_j)\big|^2\Big]''_{t=2\pi/\alpha} \leqslant \frac{2(p_j^2+q_j^2)}{p_j}. \tag{3.17}$$

Подставляя в ряд Тейлора (3.14) оценки (3.15)–(3.17) получаем

$$\big|f(t,\xi_j)\big|^2 \geqslant 1 - \frac{1}{p_j}\left(\frac{2\pi}{q_j}\right)^2 - \frac{8\pi^2}{q_j^3} - \frac{8\pi^2(p_j^2+q_j^2)}{q_j^4p_j} - \frac{1}{B_{N_k}}\left(\frac{4\pi}{q_j} + \frac{4\pi}{q_j^2}\,\frac{p_j^2+q_j^2}{p_j}\right) - \frac{1}{B_{N_k}^2}\,\frac{2(p_j^2+q_j^2)}{p_j}.$$

Проведем следующее преобразование правой части последнего неравенства:

$$\frac{1}{q_j} = \frac{1}{p_j}\,\frac{p_j}{q_j} = \frac{p_j}{p_jp_{j-1}} = \frac{p_{j-1}+p_{j-2}}{p_jp_{j-1}} = \frac{1}{p_j}\left(1+\frac{p_{j-2}}{p_{j-1}}\right) < \frac{2}{p_j}; \quad \frac{1}{q_j^3} \leqslant \frac{8}{p_j^3};$$

$$\frac{1}{q_j^4}\,\frac{p_j^2+q_j^2}{p_j} < \frac{16}{p_j^4}\left(p_j + \frac{q_j^2}{p_j^2}p_j\right) = \frac{16}{p_j^4}\left(p_j + \left(\frac{p_{j-1}}{p_j}\right)^2p_j\right) = \frac{16}{p_j^3}\left(1+\left(\frac{p_{j-1}}{p_j}\right)^2\right) < \frac{32}{p_j^3};$$

$$\frac{1}{q_j^2}\,\frac{(p_j^2+q_j^2)}{p_j} < \left(\frac{2}{p_j}\right)^2p_j\left(1+\frac{q_j^2}{p_j^2}\right) = \frac{4}{p_j}\left(1+\frac{p_{j-1}^2}{p_j^2}\right) < \frac{8}{p_j};$$

$$\frac{p_j^2+q_j^2}{p_j}=p_j+\frac{q_j^2}{p_j^2}\,p_j=p_j\left(1+\left(\frac{p_{j-1}}{p_j}\right)^2\right)<2p_j.$$

Окончательно

$$\bigl|f(t,\xi_j)\bigr|^2\geqslant 1-\frac{8\pi^2}{p_j^3}-\frac{64\pi^2}{p_j^3}-\frac{8\cdot 32}{p_j^3}\pi^2-\frac{1}{B_{N_k}}\left(\frac{8\pi}{p_j}+\frac{32\pi}{p_j}\right)-\frac{1}{B_{N_k}^2}\cdot 4p_j=$$
$$=1-\frac{328\pi^2}{p_j^3}-\frac{40\pi}{B_{N_k}p_j}-\frac{4p_j}{B_{N_k}^2},$$

и

$$\prod_{j=1}^{k}\bigl|f(t,\xi_j)\bigr|^{2n_j}\geqslant \exp\left\{-328\pi^2\sum_{j=1}^{k}\frac{n_j}{p_j^3}-\frac{40\pi}{B_{N_k}}\sum_{j=1}^{k}\frac{n_j}{p_j}-\frac{2}{B_{N_k}^2}\sum_{j=1}^{k}n_jp_j\right\}.$$

Далее,

$$\frac{1}{B_{N_k}^2}\sum_{j=1}^{k}n_jp_j\leqslant\frac{\sum\limits_{j=1}^{k}n_jp_j}{\frac13\sum\limits_{j=1}^{k}\frac{p_j^2+q_j^2}{p_j^2}n_jp_j}<\frac{\sum\limits_{j=1}^{k}n_jp_j}{\frac13\frac{p_1^2+q_1^2}{p_1^2}\sum\limits_{j=1}^{k}n_jp_j}=\frac{3p_1^2}{p_1^2+q_q^2}=\frac{27}{13}.$$

Учитывая, что число Фибоначчи p_j есть ближайшее целое число к $\left(\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right)^{j+3}/\sqrt5$ (см. [13, с. 25]), в дальнейшем при $j\geqslant 2$ используем неравенство

$$p_j>\frac{(1.6)^{j+3}}{\sqrt5}-\frac12>\frac{(1.6)^{j+2}}{\sqrt5}.$$

Имеем

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{n_j}{p_j^3}=\sum_{j=1}^{k}\frac{[p_j^{3/2}]+1}{p_j^3}<\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{p_j^{3/2}}{p_j^3}+\frac{1}{p_j^3}\right),$$

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{p_j^3}\leqslant 7{,}965,\quad \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{p_j^{3/2}}\leqslant 4{,}85,\quad \sum_{j=1}^{k}\frac{n_j}{p_j^3}<12{,}815.$$

Поэтому

$$\frac{1}{B_{N_k}}\sum_{j=1}^{k}\frac{n_j}{p_j}<\frac{\sum\limits_{j=1}^{k}\frac{[p_j^{3/2}]+1}{p_j}}{\sqrt3\left(\sum\limits_{j=1}^{k}\left(\frac{p_j^2+q_j^2}{p_j}n_j\right)\right)^{1/2}}<\frac{\sum\limits_{j=1}^{k}\left(p_j^{1/2}+\frac{1}{p_j}\right)}{\sqrt3\left(\sum\limits_{j=1}^{k}(p_j^2+q^2+j)p_j^{1/2}\right)^{1/2}}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{p_k^{1/2}\sum\limits_{j=1}^{k}\left(\frac{p_j}{p_k}\right)^{1/2}+\sum\limits_{j=1}^{k}\frac{1}{p_j}}{\sqrt3\left(\sum\limits_{j=1}^{k}p_j^{5/2}\right)^{1/2}}=\frac{p_k^{1/2}}{p_k^{5/4}}\,\frac{\sum\limits_{j=1}^{k}\left(\frac{p_j}{p_k}\right)^{1/2}}{\sqrt3\Bigl(\sum\limits_{j=1}^{k}\frac{p^{5/2}}{p_k}\Bigr)^{1/2}}+\frac{\sum\limits_{j=1}^{k}\frac{1}{p_j}}{\sqrt3\Bigl(\sum\limits_{j=1}^{k}p_j^{5/2}\Bigr)^{1/2}}.$$

При получении последней оценки было использовано неравенство

$$\frac{n_j}{p_j}=\frac{[p_j^{3/2}]+1}{p_j}>\frac{p_j^{3/2}-1+1}{p_j}-p_j^{1/2}.$$

Справедливы также следующие оценки:

$$p_j<\frac{2(1,6)^{j+3}}{\sqrt5},\quad p_j>\frac{(1,6)^{j+2}}{\sqrt5}.$$

Поэтому

$$\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{p_j}{p_k}\right)^{1/2} < 8{,}48, \qquad \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{p_j}{p_k}\right)^{5/2} \leqslant 26{,}3.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{B_{N_k}}\sum_{j=1}^{k}\frac{n_j}{p_j} < 7.$$

Учитывая оценки, окончательно получаем

$$I_{N_k} = B_{N_k}\int\limits_{\varepsilon_n\leqslant t\leqslant 2\pi-\varepsilon_n}\prod_{1}^{k}\left|f(t,\xi_j)\right|^{2n_j}dt > B_{N_k}\int\limits_{\left|t-\frac{2\pi}{\alpha}\right|<B_{N_k}^{-1}} e^{-c}\,dt > 2e^{-c}.$$

3.2. Свойства функции гладкости. Пусть ξ — целочисленная случайная величина и

$$\delta(P_\xi) = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\Big|P(\xi=m) - P(\xi=m-1)\Big|,$$

где $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел. Ниже будут исследованы основные свойства функции $\delta(P_\xi)$, сначала для одномерных, а в дальнейшем и для многомерных независимых случайных величин.

О свойствах одномерных функций $\delta(P_\xi)$. Ввиду того, что словосочетание «решетчатое распределение» и связанная с ним терминология в отечественной литературе употребляются в разных смыслах, предварительно напомним основные определения. При изложении этого материала мы ставили целью избрать такой способ, который придал бы единую форму, как в одномерном, так и в многомерном случае. Многомерные решетчатые распределения будем обсуждать при изучении многомерной функции гладкости $\delta(P_\xi)$.

Решеткой M называется множество точек $\{m\colon m = a + kh\}$, где a и $h > 0$ — фиксированные числа, а k пробегает целочисленные значения $-\infty \leqslant k \leqslant \infty$. Распределение P_ξ называется *дискретным*, если существует такое конечное или счетное множество точек A, что

$$P(\xi\in A) = 1. \tag{3.18}$$

Дискретное распределение называется *решетчатым*, если существует такая решетка M, что $P_\xi(M) = 1$, причем здесь k пробегает целочисленные значения, но не обязательно все. Число h называется *шагом распределения* (3.18). Если же для любой подрешетки M', $M' \subset M$, имеет место неравенство $P(M') < 1$, то такой шаг распределения h называют *максимальным шагом распределения*, т.е. все возможные значения ξ ни при каких значения a_1 и $h_1 > h$ нельзя представить в виде

$$a_1 + kh_1 \tag{3.19}$$

Иногда распределение, сосредоточенное на множестве kh ($k = 0, \pm1, \ldots$), называют *арифметическим*, однако для случайной величины

$$\xi = \begin{array}{|c|c|}\hline -1 & 1 \\ \hline 1/2 & 1/2 \\ \hline\end{array}$$

принятое нами определение (3.18) дает максимальный шаг распределения, равный 2, а в смысле последнего распределения (3.19) получаем, что максимальный шаг распределения равен -1 (см. [112, с. 164]).

Принятая здесь терминология совпадает с терминологией книг Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогорова [36], В. С. Королюка, Н. И. Портенко, А. В. Скорохода, А. Ф. Турбина [51] и В. В. Петрова [79]. Интересно отметить, что в книге В. Феллера (см. [112, с. 164, 561]), как и у А. В. Скорохода (см. [109, с. 90]) термин «арифметическое распределение» употребляется как синоним решетчатого распределения с максимальным шагом h. М. Лоэв называет h шагом закона (см. [60, с. 230]), А. А. Боровков — шагом решетки (см. [9, с. 154]). В книгах Б. А. Севастьянова [106] и А. Н. Ширяева [115] авторы ограничиваются рассмотрением дискретных распределений.

Свойства функции $\delta(P_\xi)$.

Свойство 1. Очевидно, что $\delta(P_\xi) \leqslant 2$.

Свойство 2. **Теорема 3.1.** *Если $\delta(P_\xi) < 2$, то максимальный шаг распределения случайной величины ξ равен* 1.

Доказательство. Действительно, так как $\delta(P_\xi) < 2$, то

$$\sum_m P(\xi = m) + P(\xi = m-1) - \Big| P(\xi = m) P(\xi = m-1) \Big| > 0.$$

Следовательно, существует такое m_0, что

$$P(\xi = m_0) + P(\xi = m_0 - 1) - \Big| P(\xi = m_0) P(\xi = m_0 - 1) \Big| > 0.$$

Рассмотрим три случая:

(i) если $P(\xi = m_0) = P(\xi = m_0 - 1)$, то обе эти вероятности положительны;

(ii) если $P(\xi = m_0) > P(\xi = m_0 - 1)$, то

$$P(\xi = m_0) + P(\xi = m_0 - 1) - P(\xi = m_0) + P(\xi = m_0 - 1) = 2P(\xi = m_0 - 1) > 0;$$

(iii) если $P(\xi = m_0 - 1) > P(\xi = m_0)$, то

$$P(\xi = m_0) + P(\xi = m_0 - 1) + P(\xi = m_0) - P(\xi = m_0 - 1) = 2P(\xi = m_0) > 0.$$

Свойство 2 доказано. Заметим, что в действительности здесь доказано больше: не только то, что максимальный шаг распределения равен 1, но и то, что существует такое m_0, что $P(\xi = m_0) P(\xi = m_0 - 1) > 0$. □

Обратное утверждение может быть неверным, т.е. максимальный шаг распределения может быть равен 1, а $\delta(P_\xi) = 2$. Например, для случайной величины ξ, которая принимает значения 0, 3 и 5 с вероятностями 1/3, имеем $\delta(P_\xi) = 2$.

Свойство 3. $\delta(P_\xi) \geqslant 2 \max\limits_m P(\xi = m)$.

Доказательство. Действительно, пусть $P(m_0) = \max\limits_m P(m)$. Тогда

$$P(m_0) = P(m_0) - P(m_0+1) + P(m_0+1) - P(m_0+2) + P(m_0+2) - \ldots \leqslant \leqslant \sum_{m=m_0+1} \big| P(m) - P(m-1) \big|.$$

С другой стороны,

$$P(m_0) = P(m_0) - P(m_0-1) + P(m_0-1) - P(m_0-2) + P(m_0-2) - \ldots \leqslant \leqslant \sum_{m=-\infty}^{m_0} \big| P(m) - P(m-1) \big|.$$

Остается сложить эти неравенства почленно. □

Если распределение унимодально, т.е. если существует такое m_0, что $P(m+1) \leqslant P(m)$ при $m \geqslant m_0$ и $P(m-1) \leqslant P(m)$ при $m \leqslant m_0$, то

$$\delta(P_\xi) = 2P(m_0) = 2 \max_m P(m).$$

Если к тому же распределение симметрично или имеет неотрицательную характеристическую функцию, то $m_0 = 0$ и

$$\delta(P_\xi) = 2P(0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt.$$

Теперь перейдем к рассмотрению сумм независимых случайных величин.

Свойство 4. Если ξ_1 и ξ_2 — независимые целочисленные случайные величины, то

$$\delta(P_{\xi_1+\xi_2}) \leqslant \min\bigl(\delta(P_{\xi_1}),\ \delta(P_{\xi_2})\bigr).$$

Доказательство. Действительно,

$$\delta(P_{\xi_1+\xi_2}) = \sum_k \Bigl|P(\xi_1+\xi_2=k) - P(\xi_1+\xi_2=k-1)\Bigr| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_l \left(\sum_k P(\xi_2=k-l)\right)\Bigl|P(\xi_1=l) - P(\xi_1=l-1)\Bigr| \leqslant \delta(p_{\xi_1}).$$

Аналогично получаем неравенство $\delta(P_{\xi_1+\xi 2}) \leqslant \delta(P_{\xi_2})$. □

Из свойства 4 следует, что $\delta(P_{S_n})$ является монотонной невозрастающей функцией n. Далее, если ξ_k одинаково распределены и максимальный шаг распределения ξ_k равен 1, то начиная с некоторого n выполняется неравенство $\delta(P_{S_n}) < 2$ (см. ниже), хотя, как было отмечено выше, $\delta(P_{\xi_1})$ может быть равно 2. Если же ξ_k — разнораспределенные величины, то при максимальном шаге распределения S_n, равном 1, для каждого n может выполняться равенство $\delta(P_{S_n}) = 2$. Действительно, пусть ξ_1 принимает значения 0, 2 и 5 с вероятностями 1/3, а ξ_k принимает значения 0 и 8^{k-1} с вероятностями, равными 1/2. Тогда, каково бы ни было n, любая пара возможных значений дает разность $\geqslant 2$, поэтому $\delta(P_{S_n}) = 2$.

Перечисленные ниже свойства $\delta(P_{S_n})$ описывают поведение этой характеристики при $n \to \infty$.

Свойство 5. **Теорема 3.2.** *Для того чтобы при любом целом $h > 1$ и всех целых j, $0 \leqslant j \leqslant h-1$ имело место равенство*

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n \equiv j \bmod L) = \frac{1}{L},$$

т.е. для асимптотической равномерной распределенности S_n по $\bmod h$ (см. [86]), *достаточно, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} \delta(P_{S_n}) = 0. \tag{3.20}$$

Доказательство. Обозначив $A_{nj} = P(S_n \equiv j \bmod h)$, имеем

$$\bigl|A_{n1} - A_{n0}\bigr| = \left|\sum_k P_n(kh+1) = P_n(kL)\right| \leqslant \delta(P_{S_n}),$$

$$\bigl|A_{n2} - A_{n0}\bigr| = \left|\sum_k P_n(kh+2) = P_n(kh+1) + P_n(kh+1) - P_n(kL)\right| \leqslant \delta(P_{S_n})$$

и т. д. Так как

$$\sum_{j-0}^{k-1} A_{nj} = 1,$$

отсюда вытекает неравенство

$$|hA_{n0} - 1| \leqslant (h-1)\delta(P_{S_n}),$$

и при любом j, $0 \leqslant j \leqslant h-1$,

$$\left|A_{nj} - \frac{1}{h}\right| \leqslant \left(\frac{h-1}{h} + 1\right)\delta(P_{S_n}) \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$ □

Замечание. Условие (3.20) не является необходимым для асимптотической равномерной распределенности величины S_n). Соответствующий пример можно построить следующим образом. Определим S_n как сумму $\xi_1 + \ldots + \xi_n$ независимых целочисленных случайных величин ξ_k. При этом допустим, что $\xi_1 = 0$ с вероятностью 1, ξ_k при $k \geqslant 2$ принимает k значений, а именно 0, $(k+1)!+1$, $2((k+1)!+1)$, …, $(k-1)((k+1)!+1)$, и что все эти значения имеют одну и ту же вероятность $1/k$. Таким образом, ξ_k распределено равномерно $\bmod k$ (т.е. остатки 0, 1, …, $k-1$

от деления на k имеют одну и ту же вероятность появления $1/k$). Тогда, как легко показать, сумма ξ_k и любой независимой от нее целочисленной случайной величины будет также распределена равномерно $\mod k$ (см. с. 19). Поэтому при любом k и $n > k$ имеем

$$A_{nj} = P(S_n \equiv j \bmod k) = \frac{1}{k}, \quad \lim_{n\to\infty} A_{nj} = \frac{1}{k}, \quad 0 \leqslant j \leqslant k-1.$$

Покажем теперь, что при $n \geqslant 2$ расстояние между соседними возможными значениями $S_n = m$ при $n \geqslant 2$ всегда $\geqslant 2$. Отсюда ясно, что $P(S_n = m)$ и $P(S_n = m-1)$ не могут быть одновременно больше нуля и, следовательно, $\delta(P_{S_n}) = 2$ при всех $n \geqslant 2$.

Легко доказать по индукции, что при $n \geqslant 2$ имеем $0 \leqslant \xi_1 + \ldots + \xi_n \leqslant n(n+1)!$. Для $n = 2$ очевидно, что расстояние между соседними возможными значениями S_n не меньше 2. Возьмем какое-либо $n \geqslant 2$, и пусть для S_n требуемое свойство уже доказано. Рассмотрим возможные значения S_{n+1}. Они образуют серии. Серия с номером j, $0 \leqslant j \leqslant n$, образуется прибавлением к j-му значению ξ_{n+1}, т.е. к $j((n+2)!+1)$ поочередно всех возможных значений суммы S_n. Между значениями S_{n+1}, принадлежащими к одной серии, расстояние $\geqslant 2$ согласно предположению индукции. Максимальное значение в j-й серии не превосходит $A_j = j(n+2)! + j + n(n+1)!$, а минимальное в $(j+1)$-й не меньше $B_j = (j+1)(n+2)! + (j+1)$. Разность $B_j - A_j = 2(n+1)! + 1 > 2$. Поэтому расстояние между возможными значениями S_{n+1}, принадлежащими разным сериям, больше 2, и S_{n+1} обладает требуемым свойством. Таким образом, при всех $n \geqslant 2$ между возможными значениями расстояние всегда $\geqslant 2$. Отсюда вытекает, что $\delta(P_{S_n}) = 2$.

Свойство 6. **Теорема 3.3.** *Пусть $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ — произвольная последовательность целочисленных величин, $g(x)$ — некоторая неотрицательная, ограниченная, кусочно монотонная функция (число интервалов монотонности S конечно) и пусть при некоторых A_n и B_n имеет место соотношение*

$$\sum_{m\in z} \left| P(S_n = m) - \frac{1}{B_n}\Gamma_q\left(\frac{m-A_n}{B_n}\right)\right| \to \infty, \quad n \to \infty, \tag{3.21}$$

где $B_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогда $\delta(P_{S_n}) \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Обозначим входящую в выражение сумму через E_n. Нетрудно получить неравенство

$$\delta(P_{S_n}) \leqslant 2E_n + B_n^{-1} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \bigl|q(z_{n,m}) - g(z_{n,m-1})\bigr|,$$

где $z_{n,m} = (m - A_n)/B_n$. Пусть $(-\infty, a_1)$, $[a_1, a_2), \ldots [a_s, \infty)$ — интервалы монотонности функции $g(x)$ и $M = \sup\limits_x g(x)$. Тогда

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \bigl|g(z_{n,m}) - g(z_{n,m-1})\bigr| \leqslant 2Ms.$$

Следовательно,

$$\delta(P_{S_n}) \leqslant 2E_n + \frac{2Ms}{B_n} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty, \tag{3.22}$$

что и требовалось. □

Приведем одно следствие этого свойства. Пусть S_n — суммы независимых одинаково распределенных целочисленных случайных величин ξ_k с максимальным шагом распределения, равным 1, которые притягиваются к какому либо устойчивому закону $G(x)$. Тогда по известной локальной теореме Б. В. Гнеденко при некоторых A_n и $B_n > 0$ равномерно по $m \in \mathbb{Z}$ выполняется равенство

$$P(S_n = m) - \frac{1}{B_n} g\left(\frac{m-A_n}{B_n}\right) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{B_n}\right),$$

где $B_n \to \infty$ при $n \to \infty$ и $g(x) = G'(x)$. Следовательно, справедливо соотношение (3.22) (см. [85] или [46, теорема 4.2.2, с. 152]). Так как устойчивые законы одновершинны, то по свойству 6 имеем $\delta(P_{S_n}) \to 0$ при $n \to \infty$.

Свойство 7. Теперь покажем, что для суммы S_n независимых одинаково распределенных целочисленных случайных величин ξ_k с максимальным шагом распределения, равным 1, всегда (т.е. независимо от того, притягивается их распределение к какому-либо закону или нет) $\delta(P_{S_n}) \to 0$ при $n \to \infty$. Более того, для каждой последовательности ξ_k, удовлетворяющей указанным условиям будет верна оценка

$$\delta(P_{S_n}) \leqslant An^{-1/2} + \mathrm{O}(n^{-1}), \quad n \to \infty, \quad A = \frac{2}{\sigma\sqrt{\pi p_n}}.$$

Для доказательства этой оценки допустим сначала, что рассматриваемые целочисленные случайные величины ограничены одной и той же постоянной.

Свойство 8. **Теорема 3.4.** *Если $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ — последовательность независимых ограниченных одинаково распределенных целочисленных случайных величин с максимальным шагом распределения, равным 1, и $|\xi_k| \leqslant L$, то*

$$\delta(P_{S_n}) = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi n}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right), n \to \infty,$$

где σ^2 — дисперсия величин ξ_k.

Доказательство. Введем обозначения $E\xi_k = a$, $E(\xi_k - a)^3 = \alpha_3$, $\mathcal{X}$ — семиинвариант 4-го порядка. Согласно асимптотическому разложению вероятности $P_n(m)$ имеем (см. [127] или [36, теорема 1, § 51])

$$P_n(m) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\varphi(z_{n,m}) - \frac{\alpha_3}{6\sigma^4 n}\varphi^{(3)}(z_{n,m}) + \frac{1}{\sigma n\sqrt{n}}\left[\frac{\mathcal{X}_4}{4!\sigma^4}\varphi^{(4)}(z_{n,m} + \frac{10}{6!}\frac{\alpha_3^2}{\sigma^6}\varphi^{(6)}(z_{n,m})\right] + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

где $\varphi(z)$ и $\varphi^{(j)}(z)$ — плотность нормального распределения и ее k-я производная соответственно. Имеем равномерно по $m \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
P_n(m) - P_n(m-1) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\big(\varphi(z_{n,m}) - \varphi(z_{n,m-1})\big) - \frac{\alpha_3}{6\sigma^4 n}\big[\varphi^{(3)}(z_{n,m}) - \varphi^{(3)}(z_{n,m-1})\big] + \\
&+ \frac{1}{\sigma n\sqrt{n}}\frac{\mathcal{X}_4}{24\sigma^4}\big[\varphi^{(4)}(z_{n,m}) - \varphi^{(4)}(z_{n,m-1})\big] + \frac{\alpha_3^2}{72\sigma^7 n\sqrt{n}}\big(\varphi^{(6)}(z_{n,m}) - \varphi^{(6)}(z_{n,m-1})\big) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\varphi'(z_{n,m}) - \frac{1}{2\sigma^2 n}\varphi''(z_{n,m})\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{\alpha_3}{6\sigma^5 n^{3/2}}\varphi^{(4)}(z_{n,m}) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \\
&= \frac{1}{n\sigma^2}\varphi'(z_{n,m}) - \frac{1}{2\sigma^3 n\sqrt{n}}\varphi''(z_{n,m}) - \frac{\alpha_3}{6\sigma^5 n\sqrt{n}}\varphi^{(4)}(z_{n,m}) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Предположим, что γ — некоторая постоянная, $\gamma \geqslant 2$. Введем обозначение $\Delta z_n = (\sigma\sqrt{n})^{-1}$. Оценим при достаточно большом n величину

$$\begin{aligned}
\sum_{m\in M}\big|P_n(m) - P_n(m-1)\big| &= \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{|z_{n,m}|\leqslant\gamma\sqrt{\log n}}\big|\varphi'(z_{n,m})\big|\Delta z_n + \\
&+ \frac{\theta_{1,n}}{\sigma^2 n}\sum_{|z_{n,m}|\leqslant\gamma\sqrt{\log n}}\big|\varphi''(z_{n,m})\big|\Delta z_n + \frac{\theta_{2,n}|\alpha_3|}{\sigma^4 n}\sum_{|z_{n,m}|\leqslant\gamma\sqrt{\log n}}\big|\varphi^{(4)}(z_{n,m})\big|\Delta z_n + \mathrm{O}\left(\frac{\sqrt{n\log n}}{n^2}\right),
\end{aligned}$$

где $M = \{m : |m - na| \leqslant \gamma\sigma\sqrt{n\log n}\}$, числа $\theta_{1,n}$, $\theta_{2,n}$ не превосходят единицы.

Пользуясь леммой 1 из [81] (или формулой Эйлера—Маклорена), получим

$$\sum_{m\in M}\big|P_n(m) - P_n(m-1)\big| = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\int\limits_{|z|\leqslant\gamma\sqrt{\log n}}|\varphi'(z)|\,dz + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right) +$$

$$+\,\theta_{1,n}\left[\int\limits_{|z|\leqslant\gamma\sqrt{\log n}}\bigl|\varphi''(z)\bigr|\,dz+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]+\theta_{2,n}\frac{|\alpha_3|}{n\sigma^4}\left[\int\limits_{|z|\leqslant\gamma\sqrt{\log n}}\bigl|\varphi^{(4)}(z)\bigr|\,dz+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right]+$$
$$+\,\mathrm{O}\left(\frac{\sqrt{\log n}}{n\sqrt{n}}\right)=\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\int\limits_{|z|\leqslant\gamma\sqrt{\log n}}\bigl|\varphi'(z)\bigr|\,dz+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right),\quad n\to\infty.$$

Поскольку при $n\to\infty$ имеют место равенства

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\int\limits_{|z|\leqslant\gamma\sqrt{\log n}}\bigl|\varphi'(z)\bigr|\,dz=\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi n}}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{\gamma^2/2}}\right)=\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi n}}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right),$$

справедливо соотношение

$$\sum_{m\in M}\bigl|P_n(m)-P_n(m-1)\bigr|=\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi n}}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right),\quad n\to\infty.$$

Осталось оценить величину

$$\sum_{m\in\overline{M}}\bigl|P_n(m)-\mathcal{P}_n(m-1)\bigr|\leqslant\sum_{m\in\overline{M}}P_n(m)+\sum_{m\in\overline{M}}P_n(m-1)=$$
$$=P\Bigl(|S_n-na|>\gamma\sigma\sqrt{n\log n}\Bigr)+P\Bigl(|S_n+1-na|\geqslant\gamma\sigma\sqrt{n\log n}\Bigr)\leqslant$$
$$\leqslant 2P\Bigl(|S_n-na|>\gamma\sigma\sqrt{n\log n}-1\Bigr),$$

где $\overline{M}=\mathbb{Z}\setminus M$.

При достаточно большом n вероятность, стоящую в правой части последней формулы, оценим при помощи экспоненциального неравенства А. Н. Колмогорова (см. [135] или [60, с. 268]):

$$P\Bigl(|S_n-na|>\sigma\sqrt{n}\bigl(\gamma\sqrt{\log n}-(\sigma\sqrt{n})^{-1}\bigr)\Bigr)\leqslant 2\exp\bigl(-2^{-1}\varepsilon^2(1-2^{-1}\varepsilon c)\bigr),$$
$$\varepsilon=\gamma\sqrt{\log n}-(\sigma\sqrt{n})^{-1},\quad c=2L(\sigma\sqrt{n})^{-1}.$$

Легко подсчитать, что при таких ε и c выполняется соотношение

$$2\exp\bigl(-2^{-1}\varepsilon^2(1-2^{-1}\varepsilon c)\bigr)=\mathrm{O}(n^{-\gamma^2/2})=\mathrm{O}(n^{-1}),\quad n\to\infty.$$

Из полученных оценок следует нужное утверждение. □

Вернемся к доказательству свойства 7. Пусть $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ — последовательность независимых, одинаково распределенных целочисленных случайных величин ξ_k с максимальным шагом распределения, равным 1. Обозначим принимаемые с положительной вероятностью значения через $a_1,a_2,\ldots$ и выберем из них конечный набор чисел $a_{i_1},a_{i_2},\ldots,a_{i_s}$, попадающих в интервал $[-L,L]$ и имеющих максимальный шаг распределения, равный 1. Определим $2n$ величин ξ'_k и ξ''_k, $1\leqslant k\leqslant n$, следующим образом: это независимые в совокупности величины. Распределение ξ'_k (ξ''_k) совпадает с условным распределением ξ_k при условии $|\xi_k|\leqslant L$ ($|\xi_k|>L$). Тогда

$$P(S_n=m)=\sum_{l=0}^n c_n^l\,p^l\,q^{n-l}\,P\bigl(\xi'_1+\ldots+\xi'_l+\xi''_{l+1}+\ldots+\xi''_n=m\bigr),$$

где $p=P(|\xi_k|\leqslant L)$, $q=1-p$.

Учитывая свойство 4, имеем

$$\delta(P_{S_n})=\sum_m\bigl|P(S_n=m)-P(S_n=m-1)\bigr|\leqslant\sum_{l=0}^n c_n^l\,p^l\,q^{n-l}\,\delta\Bigl(P_{\xi'_1+\cdots+\xi'_l+\xi''_{l+1}+\cdots+\xi''_n}\Bigr)\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{l=0}^n c_n^l\,p^l\,q^{n-l}\,\delta\bigl(P_{\xi'_1+\cdots+\xi'_l}\bigr)=\sum_{l<np/2}+\sum_{l\geqslant np/2}.$$

Для первой суммы выполняются неравенства

$$\sum_{l<np/2} \leqslant 2 \sum_{l<np/2} c_n^l\, p^l\, q^{n-l} \leqslant 2 \sum_{|l-np|>np/2} c_n^l\, p^l\, q^{n-l} \leqslant \frac{8npq}{(np)^2} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right), \quad n\to\infty.$$

Для второй суммы по свойству 8 имеем

$$\sum_{l\geqslant np/2} \leqslant \sum_{l\geqslant np/2} c_n^l\, p^l\, q^{n-l}\left(\frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi l}}+\frac{c}{l}\right) \leqslant \frac{2}{\sigma\sqrt{n\pi p}}+\frac{c}{np} = \frac{2}{\sigma\sqrt{n\pi p}}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right),$$

где $c = \mathrm{const}$ и $n\to\infty$.

Из предыдущих выкладок получаем свойство 7 с $A = 2(\sigma\sqrt{\pi}p)^{-1}$. Ниже будет показано, сколь быстро может стремиться к нулю $\delta(P_{S_n})$. Для любого α, $0<\alpha<2$, существуют такие независимые, одинаково распределенные случайные величины ξ_k с максимальным шагом распределения, равным 1, что $\delta(P_{S_n}) < cn^{-1/2}$. Один из самых простых способов построения соответствующего примера опирается на следующую лемму; по-видимому, она известна, но для полноты изложения приведем ее доказательство. Аналог этой леммы для непрерывного распределения хорошо известен (см. [46, с. 80] или [152]).

Лемма 3.2. *Если целочисленные случайные величины ξ и η независимы, симметричны и унимодальны, то распределение суммы $\xi+\eta$ симметрично и унимодально.*

Доказательство. Любое симметричное унимодальное распределение $P(m)$ можно представить следующим образом:

$$P(m) = \sum_J \lambda_j P_j(m),$$

где $P_j(m)$ — равномерное дискретное распределение на $(-m_j, m_j)$ (т.е. распределение, приписывающее каждой точке k, $-m_j\leqslant k\leqslant m_j$, вероятность $(2m_j+1)^{-1}$; λ_j — положительные постоянные.

Обозначим через $\xi^{(j)}$, $\eta^{(l)}$ независимые между собой целочисленные случайные величины с равномерными распределениями. Тогда получим

$$P(\xi+\eta=m) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \lambda_j\, \mu_l P\bigl(\xi^{(j)}+\eta^{(l)}=m\bigr)$$

(μ_l — положительные постоянные). Из одновершинности и очевидной симметрии распределения $\xi^{(j)}+\eta^{(l)}$ вытекает утверждение леммы. □

Из леммы следует, что для любых независимых одинаково распределенных симметричных унимодальных целочисленных случайных величин $\xi_1,\dots,\xi_n$ имеет место равенство

$$\delta(P_{S_n}) = 2P(S_n=0).$$

Для данного α, $0<\alpha\leqslant 2$, рассмотрим вероятность

$$P(\xi_k=m) = c(1+|m|^{\alpha+1})^{-1},$$

где c определим из условия нормировки.

Легко видеть, что распределение ξ_k принадлежит области нормального притяжения симметричного устойчивого закона с показателем α, и по локальной теореме (см. [46, теорема 4.2.1, с. 149]) имеем

$$P(S_n=0) = \mathrm{O}(n^{-1/\alpha}) \quad \text{при } n\to\infty.$$

Свойство 9. Утверждение 3.4. *Величина $\delta(P_{S_n})$ не может убывать сколь угодно быстро. Каковы бы ни были независимые целочисленные случайные величины ξ_k с максимальным шагом распределения, равным 2, и каково бы ни было $\gamma>0$, неравенство*

$$\delta(P_{S_n}) \leqslant \exp\{-n\gamma\}$$

может выполняться только для конечного числа номеров n.

Доказательство. Рассмотрим произвольные целочисленные независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и сумму $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Рассмотрим независимые от $\{\xi_j\}_{j=1}^n$ и одинаково распределенные с ними величины $\xi'_1, \ldots, \xi'_n$. Вводя обозначение

$$S'_n = (\xi_1 - \xi'_1) + \ldots + (\xi_n - \xi'_n),$$

имеем

$$\delta(P_{S_n}) \geqslant \delta(P_{S'_n}) \geqslant 2 \max_m P(S'_n = m) = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^{2n}\, dt. \tag{3.23}$$

Рассмотрим для данного $\gamma > 0$ величину $\theta = e^{-\gamma/2}$, $0 < \theta < 1$. Тогда либо $|f(t)|^2 \geqslant \theta$ для всех t, $|t| \leqslant \pi$, либо существует t_0, $0 < t_0 < \pi$, для которого $|f(t_0)|^2 < \theta$. Нижнюю грань таких t_0 обозначим a_0; очевидно, $|f(t_0)|^2 \geqslant \theta$ при $|t| \leqslant a_0$ $|t| \leqslant a_0$. Тогда на основании (3.23) в первом случае имеем

$$\delta(P_{s_n}) \geqslant \frac{2\theta^n}{\pi} = \frac{2e^{-n\gamma/2}}{\pi} > e^{-n\gamma} \quad \text{для всех } n > n_1.$$

Аналогично во втором случае получим

$$\delta(P_{s_n}) \geqslant \frac{2a_0\theta^n}{\pi} > e^{-n\gamma} \quad \text{для всех } n > n_2. \qquad \square$$

Свойство 10. Установим связь между характеристическими функциями $f(t,\eta)$ и $\delta(P_\eta)$.

Лемма 3.3. *Для любой целочисленной величины η при всех $t \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ справедлива оценка*

$$\bigl|f(t,\eta)\bigr| \leqslant \frac{\delta(P_\eta)}{2|\sin\frac{t}{2}|}. \tag{3.24}$$

Неравенство (3.24) легко выводится из соотношения

$$(1 - e^{it})f(t,\eta) - \sum_m e^{itm}\bigl(P(m) - P(m-1)\bigr).$$

Замечание. Не представляет трудности получить аналогичным путем сходное неравенство вида

$$\bigl|f(t,\eta)\bigr| \leqslant \frac{\delta_k(P_\eta)}{2\bigl|\sin\frac{tk}{2}\bigr|}, \tag{3.25}$$

где

$$\delta_k(P_\eta) = \sum_m \bigl|P(m) - P(m-k)\bigr|,$$

причем $\delta_1(\cdot) = \delta(\cdot)$, при всех $tk \neq 2\pi l$, где $l \in \mathbb{Z}$. Минимальное значение $\delta_k(P_\eta)$ необязательно достигается при k, равном шагу распределения.

Пример 3.3. Пусть случайная величина η с вероятностью $1/L$ принимает следующие L значений (L — натуральное число $\geqslant 2$): $1, 3, \ldots, 2L-3, 2L$. Тогда носителем распределения является решетка M с шагом 1 и $\delta_1(P_\eta) = 2$, а на подрешетке $M' = \{m : m = 2k-1,\ k = 1, \ldots, L-1\}$ с шагом 2 имеем $\delta_2(P_\eta) = 4/L$. Элементарные вычисления показывают, что в данном примере неравенство (3.24) тривиально, а неравенство (3.25) с функцией $\delta_2(P_\eta)$ дает содержательную оценку при

$$\arcsin\frac{2}{L} + 2l\pi \leqslant t \leqslant -\arcsin\frac{2}{L} + (2l+1)\pi.$$

О свойствах многомерной функции $\delta(P_{\vec{\xi}})$. Пусть $\vec{\xi} = (\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(s)})$ — s-мерный вектор и каждая координата $\xi^{(k)}$ принимает только целочисленные значения $m^{(k)}$, $k = 1, \ldots, s$. Введем обозначения $m = (m^{(1)}, \ldots, m^{(s)})$, $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, …, $e_s = (0, \ldots, 0, 1)$ и положим

$$\delta(P_{\vec{\xi}}) = \sum_{k=1}^{s} \sum_{m} \bigl|P(\vec{\xi} = m) - P(\vec{\xi} = m - e_k)\bigr|,$$

где внутренняя сумма берется по всем целочисленным векторам $m \in \mathbb{R}^s$. Очевидно, $\delta(P_{\vec{\xi}}) \leqslant 2s$.

Обобщение теоремы 3.2 (свойство 5) на многомерный случай не представляет трудности. Мы сформулируем его для сокращения записи в двумерном случае.

Пусть $S_1, S_2, \ldots$ — последовательность целочисленных двумерных случайных векторов $S_n = (S_n^{(1)}, S_n^{(2)})$.

Теорема 3.5. *Для того чтобы при любых $h_1 > 1$ и $h_2 > 1$ и всех целых j_1 и j_2, $0 \leqslant j_1 \leqslant h_1 - 1$, $0 \leqslant j_2 \leqslant h_2 - 1$, выполнялось соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} P\Bigl(S_n^{(1)} \equiv j_1 \bmod h_1,\ S_n^{(2)} \equiv j_2 \bmod h_2\Bigr) = \frac{1}{h_1 h_2},$$

достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \delta(P_{S_n}) = 0.$$

Заметим, что так же, как и в одномерном случае, последнее условие не является необходимым.

Многомерная решетка и многомерное решетчатое распределение. Ниже используются некоторые понятия, относящиеся к многомерным решетчатым распределениям. О них, насколько автору известно, сжатую информацию можно найти в справочнике [88] и лишь наглядное и неполное изложение в частном случае двумерных распределений затрагивается в [119]; отметим также монографию [10]. Решетки (но не решетчатые распределения) обсуждаются в книге [35]; по полноте изложения особенно выделим монографию [48]. Несколько отстоящие от вероятностных интересов вопросы, связанные с решетками, излагаются также в [40].

Решеткой M в $\mathbb{R}^s$ с базисом $l = (l_1, \ldots, l_s)$ называется множество точек

$$m = n_1 l_1 + \cdots + n_s l_s, \tag{3.26}$$

где $n_k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $k = 1, \ldots, s$, и векторы $l_1, \ldots, l_s$ предполагаются линейно независимыми. Представление любой точки решетки M в форме (3.26) однозначно, но одна и та же решетка M может иметь различные базисы. Нетрудно показать, что если базисы l и l' описывают одну и ту же решетку, то $l_k = a_{k1} l'_1 + \cdots + a_{ks} l'_s$, $k = 1, \ldots, s$, причем $\det\{a_{ik}\} = \pm 1$, поэтому величина $d(M) = |\det l|$ не зависит от выбора базиса решетки M; число $d(M)$ называют определителем решетки. Если каждая точка решетки L является также точкой решетки M, то L называется подрешеткой решетки M.

Пусть P — невырожденное, т.е. не сосредоточенное ни на каком линейном подпространстве, дискретное вероятностное распределение в $\mathbb{R}^S$ и множество A_p — носитель этого распределения. Если существует решетка $M \supset A_p$, то будем говорить, что P — *решетчатое распределение*. Решетчатыми называют также и такие распределения, для которых существуют такие решетка M и вектор a, что $M_{+a} \supset A_p$ (см. [88]); предположение $a = 0$, принятое здесь, не уменьшает, очевидно, общности последующих рассуждений и сводится к тому, что точка 0 имеет положительную вероятность.

Для решетчатого распределения P рассмотрим класс $\mathcal{M}_p$ всех тех решеток, которые содержат A_p. Множество $M^* = \bigcup\limits_{m \in \mathcal{A}_p} M$ также является решеткой (см. [48, с. 104]), причем $P(M^*) = 1$ и для любой ее подрешетки M' выполняется неравенство $P(M') < 1$. M^* называется основной решеткой, а параллелепипед, построенный на базисе основной решетки — основным параллелепипедом. Заметим, что форма основного параллелепипеда определяется неоднозначно. С каждым решетчатым распределением P связывают его шаг распределения — определитель $d(M)$ решетки $M(P(M)=1)$, а определитель $d(M^*)$ основной решетки M^* называют максимальным шагом распределения. Из предыдущего следует, что он равен объему основного параллелепипеда.

Максимальный шаг распределения может быть вычислен по следующему правилу: он равен произведению $s!$ и общего наибольшего делителя объемов s-мерных симплексов, все $s+1$ вершин которых лежат в точках m решетки M^*, для которых $P(m)>0$.

Следующая теорема устанавливает связь между функцией $\delta(P_\xi)$ и максимальным шагом распределения.

Теорема 3.6. *Пусть ξ — целочисленный вектор в R^S. Если $\delta(P_\xi)<2$, то максимальный шаг распределения P_ξ равен* 1.

Доказательство. Пусть распределение P_ξ не вырождено и M^* — основная решетка случайного вектора ξ. Предположим, что $\delta(P_\xi)<2$, но максимальный шаг распределения больше 1, т.е. существует хотя бы один вектор $e_j \bar{\in} M^*$. Тогда в выражении $|P(m)-P(m-e_j)|$ одна из вероятностей $P(m)$ или $P(m-e_j)$ равна нулю, и поэтому

$$\sum_{m^{(j)}}{}' \bigl|P(m)-P(m-e_j)\bigr| = \sum_{m^{(j)}} \bigl|P(m)+P(m-e_j)\bigr| = P\bigl(\xi^{(j)}=m^{(j)}\bigr)+P\bigl(\xi^{(j)}=m^{(j)}-1\bigr),$$

где $\sum\limits_{m^{(j)}}{}'$ означает суммирование по $m^{(1)},\dots,m^{(s)}$ исключая $m^{(j)}$. Суммируя по $m^{(j)}$ получаем, что $\delta(P_\xi)=2$, а это противоречит условию теоремы; следовательно $e_j\in M^*$. Таким образом, все единичные векторы входят в M^*, и определитель решетки равен единице.

Рассмотрим случай вырожденного распределения. Пусть P_ξ сосредоточена на какой-либо гиперплоскости $\alpha\subset\mathbb{R}^k$, где $k<s$. Тогда найдется хотя бы один единичный вектор, скажем e_1, не лежащий в этой гиперплоскости. Поэтому

$$\sum_m \bigl|P(m)-P(m-e_1)\bigr| = \sum_m \bigl(P(m)+P(m-e_1)\bigr)=2$$

и тем более $\delta(P_\xi)>2$. Теорема доказана. □

Следующее свойство относится к суммам S_n целочисленных случайных векторов $\xi_1,\dots,\xi_n$. Введем следующие обозначения:

$$a^{(k)}=E\xi_1^{(k)},\quad \sigma_k^2=D\xi_1^{(k)},\quad \lambda_{jk}=E(\xi_1^{(j)}-a^{(j)},\xi_1^{(k)}-a^{(k)}),\quad \Lambda=\det\{\lambda_{jk}\},$$

где Λ_{jk} — алгебраическое дополнение элемента λ_{jk}, $j,k=1,\dots,s$,

$$a=(a^{(1)},\dots,a^{(s)}),\quad m=(m^{(1)},\dots,m^{(s)}),\quad z=(z^{(1)},\dots,z^{(s)}),$$

$$Q(z)=\sum_{j,k=1}^{s}\frac{\Lambda_{jk}}{\Lambda}\,z^{(j)}z^{(k)},\quad |z_{n,m}|^2=z_{n,m_1}^2+\dots+z_{n,m_s}^2,$$

$$Z_{n,m}=\frac{(m-an)}{\sqrt{n}},\quad z_{n,m_j}=\frac{(m^{(j)}-a^{(j)}n)}{\sqrt{n}}.$$

Теорема 3.7. *Если $\xi_1,\dots,\xi_n$ — последовательность целочисленных независимых одинаково распределенных случайных векторов, имеющих максимальный шаг распределения, равный* 1, *и $|\xi_k|<L$, $k=1,\dots,n$, то при $n\to\infty$*

$$\delta(P_{S_n})=\sqrt{\frac{2}{\pi n\Lambda}}\bigl(\sqrt{\Lambda_{11}}+\dots+\sqrt{\Lambda_{ss}}\bigr)+\mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Заметим, что в условиях теоремы матрица ковариаций невырождена.

Доказательство. Рассуждения сходны с теми, которые были использованы в одномерном случае (см. [16]) и опираются на локальную предельную теорему. Чтобы избежать длинных вычислений, укажем основные шаги.

Согласно [10, теорема 22.1] при $n \to \infty$ имеем

$$\mathcal{P}_n(m) = \frac{1}{n^{s/2}} P_0(z_{n,m}) + \frac{1}{n^{(s+1)/2}} P_1(z_{n,m}) + \frac{\mathrm{o}\left(n^{-\frac{(s+1)}{2}}\right)}{1 + |z_{n,m}|^2}, \tag{3.27}$$

где

$$P_0(z_{n,m}) = (2\pi)^{-s/2} \Lambda^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} Q(z_{n,m})\right\},$$

а многочлен $P_1(z_{n,m})$ определен в [4, с. 500].

Пусть

$$A = \left\{m : |m^{(1)} - a^{(1)}| \leqslant \gamma\sqrt{n\log n},\ \dots,\ |m^{(s)} - a^{(s)}| \leqslant \gamma\sqrt{n \log n}\right\}, \quad \gamma \geqslant 2.$$

Рассуждая так же, как в одномерном случае, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^{s/2}} \sum_{m \in A} \left|P_0(m) - P_0(m - e_l)\right| &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m\in A} \left|\frac{\partial P_0(z_{n,m})}{\partial z_{n,m_l}}\right| \Delta z_{n,m_1} \dots \Delta z_{n,m_s} + \\ &+ \frac{1}{n^{s/2}} \sum_{m\in A} \sum_{k=2}^{s+1} \left|\frac{\partial^k P_0(z_{n,m})}{\partial z^k_{n,m_l}}\right| (\Delta z_{n,m_1})^k + \frac{\theta_1}{n^{s/2}} \sum_{m \in A} \left|\frac{\partial^{s+2} P_0(z_{n,\theta_2 m})}{\partial z^{s+2}_{n,m_l}}\right| (\Delta z_{n,m_1})^{s+2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \int\limits_{|z^{(1)}|<\gamma\sqrt{\log n}} \cdots \int\limits_{|z^{(s)}|<\gamma\sqrt{\log n}} \left|\frac{\partial P_0(z)}{\partial z^{(l)}}\right| dz^{(1)} \dots dz^{(l)} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}(2\pi)^{s/2}\Lambda^{1/2}} \int\limits_{|z^{(1)}|<\gamma\sqrt{\log n}} \cdots \int\limits_{|z^{(s)}|<\gamma\sqrt{\log n}} \left|\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Lambda_{lj}}{\Lambda} z^{(j)}\right| \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{\infty} \frac{\Lambda_{lj}}{\Lambda} z^{(j)} z^{(k)}\right\} dz^{(1)} \dots dz^{(s)} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \end{aligned} \tag{3.28}$$

где θ_1 и θ_2 не превосходят единицы, а $n \to \infty$. Принимая во внимание остальные члены формулы (3.27), находим, что при $n \to \infty$

$$\begin{aligned} \sum_{m\in A} \left|P_n(m) - \mathcal{P}_n(m - e_l)\right| &= \frac{1}{\sqrt{n}(2\pi)^{s/2}\Lambda^{1/2}} \int\limits_{|z^{(1)}|<\gamma\sqrt{\log n}} \cdots \int\limits_{|z^{(s)}|<\gamma\sqrt{\log n}} \left|\sum_{j=1}^{s} \frac{\Lambda_{lj}}{\Lambda} z^{(j)}\right| \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{s} \frac{\Lambda_{jk}}{\Lambda} z^{(j)} z^{(k)}\right\} dz^{(1)} \dots dz^{(s)} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned} \tag{3.29}$$

Нетрудно показать, что интеграл в правой части (3.28) можно заменить на интеграл, взятый по всему пространству. Вычислим указанный интеграл, взятый по всему пространству, исходя из вероятностных соображений. Для этого рассмотрим вспомогательные случайные величины $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(s)}$, которые имеют нормальное распределение с $E\xi^{(k)} = 0$ и матрицей ковариации $\{\lambda_{ij}\}$. Тогда, вводя обозначение

$$\xi = \sum_{j=1}^{s} \frac{\Lambda_{lj}}{\Lambda} \xi^{(j)},$$

нетрудно получить

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^{s/2}\Lambda^{1/2}\sqrt{n}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\sum_{j=1}^{s} \frac{\Lambda_{lj}}{\Lambda} z^{(j)}\right| \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{s} \frac{\Lambda_{jk}}{\Lambda}\ z^{(j)} z^{(k)}\right\} dz^{(1)} \dots dz^{(s)} = \\ = \frac{1}{\sqrt{n}} E|\xi| = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{2}{\pi} E|\xi|^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi n} \frac{\Lambda_{ll}}{\Lambda}}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Используя экспоненциальное неравенство А. Н. Колмогорова, можно показать, что

$$\sum_{k=1}^{s}\sum_{m\in A^c}\bigl|P_n(m)-P_n(m-e_k)\bigr| = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{при } n\to\infty. \tag{3.31}$$

На основании оценок (3.27)–(3.31) получаем утверждение теоремы. □

Следует отметить также, что, как и в [27, с. 837], для любой последовательности одинаково распределенных независимых целочисленных случайных векторов, имеющих максимальный шаг распределения, равный 1, найдется такая постоянная c, что $\delta(P_{S_n})\leqslant cn^{-1/2}$.

Обобщение неравенства (3.24) для конечномерного случайного вектора не представляет трудности.

Лемма 3.4. *Пусть $\vec{\xi}$ — целочисленный случайный вектор, $T_S=t_1+\dots+t_s$. Тогда при всех $T_S\neq 2\pi l$, где l — целые числа, справедлива оценка*

$$\bigl|f(t,\vec{\xi})\bigr|\leqslant\frac{\sum\limits_m |P(\vec{m})-P(\vec{m}-\vec{e})|}{2\bigl|\sin T_{S/2}\bigr|}. \tag{3.32}$$

Доказательство этого неравенства получается по аналогии с одномерным случаем на основе соотношения

$$\bigl(1-e^{iT_S}\bigr)f(t)=\sum_m e^{i(\vec{t},\vec{m})}\bigl(P(\vec{m})-P(\vec{m}-\vec{e})\bigr).$$

3.3. О применении функции гладкости в доказательстве локальной предельной теоремы. Перейдем к основной цели — исследованию локальной предельной теоремы с помощью функции гладкости $\delta(P_\xi)$. Ниже при помощи этой функции выделяется класс «гладких» случайных величин и дается краткое описание метода доказательства локальной предельной теоремы с указанием скорости сходимости для величин этого класса.

Приводимая ниже теорема — простейший вариант использования функции $\delta(P_\xi)$ в локальной предельной теореме.

Теорема 3.8. *Пусть $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n,\dots$ — последовательность независимых (не обязательно одинаково распределенных) целочисленных случайных величин, к которой применима центральная предельная теорема. Если существуют такие натуральное n_0 и положительное число λ, $\lambda<\sqrt{2}$, что $\delta(P^{*n_0}_{\xi_k})\leqslant\lambda$ при всех k, и $B_n^2=\mathrm{O}(n)$ при $n\to\infty$, то к этой последовательности применима и локальная предельная теорема в усиленной форме.*

В доказательстве теоремы существенное место занимает следующая лемма, которая связывает характеристическую функцию $f(t,\eta)$ и функцию $\delta(P_\eta)$.

Лемма 3.5. *Пусть n_0 выбрано таким образом, что $\delta(P^{*n_0}_{\eta})<\sqrt{2}$ (это возможно в том и только в том случае, когда шаг распределения P_η равен* 1(см. [27]). *Тогда для всех t, $|t|\leqslant\pi$, справедлива оценка*

$$|f(t,\eta)|\leqslant\exp\{-ct^2\},\quad \text{где}\quad c=l\left(1-\frac{\delta^2(P^{*n_0}_{\eta})}{2}\right)\frac{1}{2\pi^2n_0}.$$

Утверждение леммы 3.5 является следствием следующего неравенства и леммы 3.3.

Модифицированное неравенство Крамера. *Если при значении t, удовлетворяющем условию $b\leqslant|t|\leqslant 2b$, справедливо неравенство $|f(t,\eta)|<K$, то при всех $|t|\leqslant 2b$ имеем*

$$\bigl|(f(t,\eta)\bigr|\leqslant\exp\left\{-(1-k^2)\frac{t^2}{8b^2}\right\}.$$

Действительно, согласно неравенству Крамера (см. [79, с. 22]) при $|t|\leqslant b$ имеем

$$\bigl|(f(t,\eta)\bigr|\leqslant 1-(1-k^2)\frac{t^2}{8b^2}.$$

Но для $b \leqslant |t| \leqslant 2b$ справедливо неравенство

$$1 - (1-k^2)\frac{t^2}{8b^2} > k.$$

Таким образом, для всех $|t| \leqslant 2b$ имеем

$$\big|(f(t,\eta)\big| \leqslant 1 - (1-k^2)\frac{t^2}{8b^2} \leqslant \exp\left\{-(1-k^2)\frac{t^2}{8b^2}\right\}.$$

Нетрудно показать, как применяется утверждение леммы для доказательства локальной предельной теоремы, а также исследования скорости сходимости в ней. Основная трудность в доказательстве локальной предельной теоремы заключается в оценке так называемого III-го интеграла (см. [79, 86])

$$J_3 = \int\limits_{\theta \leqslant |t| \leqslant \pi B_n} e^{-itm} f\left(\frac{t}{B_n}, S_n\right) dt.$$

Предположим, что существует такое n_0, что $\delta(P^{*n_0}_{\xi_k}) \leqslant \lambda < \sqrt{2}$ равномерно по k. Используя лемму 3.5, получим

$$J_3 \leqslant \int\limits_{\theta \leqslant |t| \leqslant \pi B_n} \prod_{j=1}^{n} \left| f\left(\frac{t}{B_n}, \xi_j\right)\right| dt \leqslant 2B_n \int\limits_{\theta/B_n}^{\infty} e^{-ct^2 n} dt \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2B_n^2\pi^2 \exp\left\{-\left[\dfrac{n}{n_0}\right]\theta\left(1-\dfrac{\lambda^2}{2}\right)/2B_n^2\pi^2\right\}}{\theta\left[\dfrac{n}{n_0}\right]\left(1-\dfrac{\lambda^2}{2}\right)}.$$

Здесь величина c та же, что и в лемме 3.5. Присутствующий в формулировке теоремы параметр n_0 определяется неоднозначно. Для последовательности разнораспределенных случайных величин условие теоремы означает существование таких случайных величин $\zeta_1^{(k)}, \dots, \zeta_{n_0}^{(k)}$, которые распределены так же, как ξ_k для каждого k, $k = 1, \dots, n$, и для которых обеспечивается «достаточная» гладкость $\delta(P^{*n_0}_{\zeta_1^{(k)}}) < \sqrt{2}$. Однако это условие остается справедливым при замене n_0 на большее значение. Но при этом неравенство

$$\big|f(t,S_n)\big| \leqslant \left(\frac{\delta(P^{*n_0}_{\xi_j})}{2|\sin\frac{t}{2}|}\right)^{\left[n/n_0\right]}, \quad \frac{\pi}{2} \leqslant |t| \leqslant 2\pi,$$

становится менее точным, поэтому разумнее остановиться на $n_0 = \big\{\min k \colon \delta(P^{*k}_{\xi_j}) < \sqrt{2}\big\}$, что нетрудно видеть из свойства 8:

$$\delta(P^{*n_0}_{\xi_j}) = \sqrt{\frac{2}{\pi n_0}}\,\frac{1}{\sigma} + \mathrm{o}(n^{-1/2}),$$

и монотонного возрастания функции $(\sqrt{2}/\sigma\sqrt{\pi x})^{n/x}$ при $x \geqslant 2$, $\sigma \geqslant 1$.

Замечание. Интересно заметить, что в [38] для суммы независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ доказано неравенство

$$\big|f(t,\xi_1)\big| \leqslant \exp\left\{-\bar{\delta}(S_{k_1})\frac{t^2}{\pi^2 k_1}\right\}, \quad |t| \leqslant \pi,$$

где

$$\bar{\delta}(S_{k_1}) = 2\sum_{l} \frac{P\big(S_{k_1} = 2l\big)P\big(S_{k_1} = 2l+1\big)}{P\big(S_{k_1} = 2l\big) + P\big(S_{k_1} = 2l+1\big)},$$

причем значение k_1 выбирается так, чтобы существовали две соседние точки, для которых справедливо неравенство

$$P\big(S_{k_1} = l\big)P\big(S_{k_1} = l+1\big) > 0, \tag{3.33}$$

т.е. $\delta(P_{\xi_j}^{*k_1}) < 2$.

С другой стороны, для суммы одинаково распределенных слагаемых $\delta(P_{\xi_j}^{*n})$ — монотонно убывающая функция n (свойство 4), и поэтому существует такое значение n_0, что $\delta(P_{\xi_j}^{*n_0}) < \sqrt{2}$, а по лемме 3.5 для всех t, $|t| \leqslant \pi$, имеем

$$\bigl|f(t,\xi_1)\bigr| < \exp\left\{-\left(1 - \frac{\delta^2(P_{\xi_1}^{*n_0})}{2}\right)\frac{t^2}{2\pi^2 n_0}\right\}.$$

В связи с этим хотелось бы обратить внимание на разницу между характеристиками $\bar{\delta}$ и δ: функция $\delta(\cdot)$ проще вычисляется и ее свойства известны.

Следует добавить, что характеристика $\bar{\delta}$ впервые появляется у Бавли (см. [2]), а условие (3.33) — у Мизеса [140].

Оценка многомерного интеграла J_3. Поступаем следующим образом. В силу неравенства (3.32) для $\pi/2 \leqslant T_S \leqslant 3\pi/2$ справедливо соотношение

$$\bigl|f(\vec{t},\vec{\xi})\bigr|^2 \leqslant \frac{1}{2}\delta_{\vec{e}}^2\,(p_{\vec{\xi}}),$$

где

$$\delta_{\vec{e}}\,(P_{\vec{\xi}}) = \sum_m \bigl|P(\vec{m}) - P(\vec{m}-\vec{e})\bigr|.$$

Используя сначала неравенство Крамера

$$\bigl|f(\vec{t},\vec{\xi})\bigr|^2 \leqslant 1 - \frac{T_S^2}{\pi^2 n_0}\left(1 - \frac{\delta_{\vec{e}}^2(P_{\vec{\xi}}^{*n_0})}{2}\right), \quad 0 < T_S < \frac{\pi}{2},$$

а далее, по аналогии с рассуждением в одномерном случае, при $0 < T_S < \pi$ получаем

$$\bigl|f(\vec{t},\vec{\xi})\bigr| \leqslant \exp\left\{-\frac{T_S^2}{2\pi^2 n_0}\left(1 - \frac{\delta_{\vec{e}}^2(P_{\vec{\xi}}^{*n_0})}{2}\right)\right\}. \tag{3.34}$$

Последнее неравенство (3.34) и применяется для оценки многомерного интеграла J_3.

Замечание. Величина функции

$$\delta_{e_k}(P_{\vec{\xi}}) = \sum_{\vec{m}} \bigl|P(\vec{m}) - P(\vec{m}-e_k)\bigr| \tag{3.35}$$

зависит от природы распределения и выбора репера e_k (т.е. направления, по которому сравниваются вероятности), поэтому, естественно, из сходных неравенств типа (3.35) выбрать неравенство

$$\bigl|f(\vec{t},\vec{\xi})\bigr| \leqslant \frac{\min\sum\limits_m \bigl|P(m) - P(m-e')\bigr|}{2\bigl|\sin\frac{t'}{2}\bigr|}, \quad t' \neq 2\pi l,$$

где $e' = e'(e_1,\dots,e_s)$ и $t' = t'(t_1,\dots,t_s)$ — линейные функции соответствующих аргументов.

3.4. Об одной нижней оценке для скорости сходимости в локальной теореме. Значительное число работ посвящено достаточным условиям применимости локальной теоремы последовательности независимых решетчатых случайных величин, а также оценке сверху скорости сходимости в локальной теореме. Здесь предлагается способ построения нижней оценки скорости сходимости в локальной теореме, использующий максимумы характеристической функции.

Лемма 3.6. ***Для того чтобы для*** *последовательности* (1.1) *независимых целочисленных случайных величин выполнялась локальная теорема, необходимо, чтобы она выполнялась также и для «симметризованных» случайных величин* ζ_j *с характеристической функцией* $|f(t,\zeta_j)| = |f(t,\xi_j)|^2$.

Замечание. Заметим, что лемма остается справедливой, если под $\zeta(n)$ понимать произвольные случайные величины, не обязательно суммы.

Доказательство. Положим $\zeta_{(n)} = \sum\limits_{j=1}^{n} \zeta_j$ и воспользуемся условием теоремы в следующей форме:

$$P\big(S_n = j\big) = \frac{1}{B_n\sqrt{2\pi}}\, e^{-z_{n,j}^2/2} + \frac{\theta_{n,j}\lambda_n}{B_n},$$

где $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$, а $z_{n,j} = j - A_n/B_n$, $|\theta_{n,j}| \leqslant 1$. Имеем

$$P\big(\zeta_{(n)} = k\big) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} P\big(S_n = k+j\big)P\big(S_n = j\big) =$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\exp\Big\{-\frac{1}{2}(\frac{k}{B_n} + z_{n,j})^2 - \frac{z_{n,j}^2}{2}\Big\}}{\sqrt{2\pi}B_n\sqrt{2\pi}B_n} + \theta'\frac{\lambda_n}{B_n}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{\exp\Big\{-z_{n,j}^2/2\Big\}}{\sqrt{2\pi}B_n} + \theta''\frac{\lambda_n}{B_n}.$$

По лемме работы [81] или по формуле Эйлера—Маклорена получаем

$$\frac{1}{2\pi B_n}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{B_n} + z_{n,j}\right)^2 - \frac{z_{n,j}^2}{2}\right\}\frac{1}{B_n} \leqslant \frac{1}{2\pi B_n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{B_n} + z\right)^2 - \frac{z^2}{2}\right\}dz + \frac{4}{2\pi B_n^2},$$

$$\frac{\lambda_n}{\sqrt{2\pi}B_n}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{z_{n,j}^2}{2}\right\}\frac{1}{B_n} \leqslant \frac{\lambda_n}{\sqrt{2\pi}B_n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2/2}dz + \frac{4\lambda_n}{B_n^2\sqrt{2\pi}}.$$

Нетрудно подсчитать, что

$$\frac{1}{2\pi B_n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{B_n} + z\right)^2 - \frac{z^2}{2}\right\}dz = \frac{1}{2\pi B_n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{k^2}{4B_n^2} - \left[\left(\frac{k}{2B_n}\right)^2 + \frac{kz}{B_n} + z^2\right]\right\}dz =$$

$$= \frac{e^{-k^2/4B_n^2}}{2\pi B_n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-w^2}dw = \frac{1}{2\sqrt{\pi}B_n}\exp\left\{-\frac{k^2}{4B_n^2}\right\}.$$

Следовательно, имеем

$$\left|P\big(\zeta_{(n)} = k\big) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}B_n}\exp\left\{-\frac{k^2}{4B_n^2}\right\}\right| \leqslant \frac{2}{\pi B_n^2} + \frac{2\lambda_n}{B_n} + \frac{4\lambda_n\sqrt{2\pi}}{B_n^2 2\pi} = \frac{\Lambda_n}{B_n},$$

где

$$\Lambda_n = 2\lambda_n + \frac{2}{\pi B_n} + \frac{2\sqrt{2}\lambda_n}{B_n\sqrt{\pi}}.$$ □

Лемма 3.7. *Пусть $\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \ldots$ — последовательность «симметризованных» целочисленных случайных величин с характеристической функцией $f(t, \zeta_j) = |f(t, \xi_j)|^2$, для которых выполняется локальная теорема*:

$$\sup_m\left|P(\zeta_{(n)} = m) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}B_n}\exp\left\{-\frac{m^2}{4B_n^2}\right\}\right| = \frac{\Lambda_n}{B_n}.$$

Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\Lambda_n\left(2 + \frac{1}{8\sqrt{\pi}}\right) \geqslant \frac{B_n}{4\pi}\int\limits_{\frac{2\pi}{2k+1}\leqslant|t|\leqslant\pi}\prod_{j=1}^{n}\big|f(t,\xi_j)\big|^2\,dt, \tag{3.36}$$

где $k = k_n$ — наибольшее целое число, для которого

$$0 < k \leqslant \sqrt{\Lambda n}\,B_n. \tag{3.37}$$

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\vartheta_n = P\big(\zeta_{(n)} = 0\big) - \frac{1}{2k+1}\sum_{j=-k}^{k} P(\zeta_{(n)} = j).$$

Так как

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin(n+\frac{1}{2}x)}{\sin\frac{x}{2}}$$

(ядро Дирихле), то по формуле обращения эту разность можно представить в следующем виде:

$$\vartheta_n - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1 - \frac{\sin\frac{2k+1}{2}t}{(2k+1)\sin\frac{t}{2}}\right)\prod_{j=1}^{n}\big|f(t,\xi_j)\big|^2\,dt.$$

Не представляет трудности дать аналоги этой леммы для многомерного случая и локальной предельной теоремы для плотностей.

По локальной теореме имеем

$$P\big(\zeta_{(n)} = 0\big) \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi}B_n} + \frac{\Lambda_n}{B_n}, \quad P\big(\zeta_{(n)} = j\big) \geqslant \frac{e^{-k^2/(4B_n^2)}}{2\sqrt{\pi}B_n} - \frac{\Lambda_n}{B_n}.$$

Следовательно,

$$\vartheta_n \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi}B_n} + \frac{\Lambda_n}{B_n} - \frac{e^{-k^2/(4B_n^2)}}{2\sqrt{\pi}B_n} + \frac{\Lambda_n}{B_n} < \frac{k^2}{2\sqrt{\pi}B_n 4B_n^2} + \frac{2\Lambda_n}{B_n}, \tag{3.38}$$

где $k = k_n$ — наибольшее целое число, для которого $k \leqslant \sqrt{\Lambda n}B_n$. С другой стороны, так как при t, удовлетворяющих условию $2\pi/(2k+1) \leqslant |t| \leqslant \pi$, имеем

$$\frac{\sin\frac{2k+1}{2}t}{(2k+1)\sin\frac{t}{2}} < \frac{1}{(2k+1)\sin\frac{\pi}{2k+1}} < \frac{1}{(2k+1)\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{(2k+1)}} < \frac{1}{2},$$

то

$$\vartheta_n \geqslant \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\pi\geqslant|t|\geqslant\frac{2\pi}{2k+1}}\prod_{j=1}^{n}\big|f(t,\xi_j)\big|^2\,dt.$$

Таким образом, учитывая (3.38) и определение числа k (см. (3.37)), имеем

$$\frac{1\Lambda_n}{2\sqrt{\pi}4} + 2\Lambda_n \geqslant \vartheta_n B_n \geqslant \frac{B_n}{4\pi}\int\limits_{\pi\geqslant|t|\geqslant\frac{2\pi}{2k+1}}\prod_{j=1}^{n}\big|f(t,\xi_j)\big|^2\,dt.$$

□

4. Несколько задач, связанных с центральной предельной теоремой

В настоящем разделе изучаются различные способы оценки близости функций распределений. Одним из самых известных методов оценки отклонения функции распределения от заданной функции является метод Эссеена (см. [79, 127]). Ниже будет предложен другой подход, который основывается на сглаживании исходной разности с помощью специально подобранных равномерно распределенных слагаемых. Показано, что сравнительно небольшое изменение рассуждений в части, касающейся оценок характеристических функций, приводит к оценке Берри—Эссеена. Следует добавить, что работа тесно связана с исследованием А. М. Журавского [41], в которой были даны оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме: в случае одинаково распределенных слагаемых с конечными первыми тремя моментами оценка имела порядок $n^{-1/8}$ в одномерном случае и $n^{-1/2(s+4)}$ в s-мерном. Автор пишет при этом: «Наши рассуждения представляют по существу видоизменение классического доказательства теоремы, использующего множитель Дирихле. Как известно, отсутствие абсолютной сходимости получающихся интегралов делает чрезвычайно затруднительным строгое поведение доказательства. Это обстоятельство заставило А. М. Ляпунова ввести вспомогательную случайную переменную, распределенную нормально, а других исследователей обратиться к характеристическим функциям. Очень простое по существу видоизменение множителя Дирихле позволяет достичь того, что все интегралы, входящие в рассуждение, оказываются абсолютно сходящимися. Получается не только доказательство теоремы, но и одновременно оценка величины уклонения распределения суммы большого количества случайных величин от предельного. В целях достижения большей общности я не стремился к возможному понижению порядка уклонения, что, впрочем, может быть сделано без особого труда. Основная идея введенного здесь множителя тесно связана с исследованиями И. М. Виноградова в области асимптотической арифметики».

Значение неравенства Эссеена (см. [79]) для исследования скорости сходимости в центральной предельной теореме общеизвестно. Буквальный перенос доказательства классического неравенства Эссеена дает выражение

$$\int\limits_{-T}^{T}\cdots\int\limits_{-T}^{T}\frac{|f(t)-g(t)|}{t_1\cdots t_s}dt, \quad t\in\mathbb{R}^S,$$

которое может быть и бесконечным из-за поведения подынтегральной функции вблизи нуля. Используя оператор конечной разности, удается обойти эту трудность и доказать конечномерный аналог неравенства Эссеена. Сходное неравенство следует из результатов [104] (двумерный аналог), а также [14, 120], где использованы другие методы.

Важность оценки близости распределений по вариации, по-видимому, впервые подчеркивалась А. Н. Колмогоровым (см. [50]). Нам удалось получить оценку расстояния по вариации с помощью конечных разностей характеристических функций. Это дает возможность иметь представление о близости распределений по вариации, если даже соответствующие функции недифференцируемы (см. [23]). Наконец, приводится пример решетчатого распределения с недифференцируемой характеристической функцией (см. [28]).

4.1. Об одном методе доказательства центральной предельной теоремы. В этом разделе изучается близость функций распределения с использованием множителя Дирихле и доказывается центральная предельная теорема с указанием скорости сходимости.

4.1.1. Вспомогательные результаты. Пусть

$$\Psi(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-iu\alpha}\psi(u)\,du.$$

Если $\psi(u)$ — абсолютно интегрируемая функция, то функция $\Psi'(\alpha)$ существует, непрерывна на всей прямой и ограничена для всех α (см. [60, с. 202]);

$$E\Psi(\xi)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(u)\bar f(u,\xi)\,du,$$

где $\bar f(u,\xi)$ означает функцию, сопряженную с характеристической функцией $f(u,\xi)$ случайной величины ξ. Если $\Psi(\alpha)$ — четная функция, то

$$E\Psi(\xi)=E\Psi(-\xi)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(u)\bar f(u,-\xi)\,du=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(u)f(u,\xi)\,du. \tag{4.1}$$

Пусть $A>0$,

$$\psi(u)=\psi(u,A,\lambda_1,\lambda_2,\dots)=\frac{\sin Au}{u}\prod_{j=1}^{\infty}\frac{\sin\lambda_j u}{\lambda_j u},\quad \delta=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j<\infty.$$

Так как $\psi(u)$ — четная функция, то для любой случайной величины ξ

$$E\Psi(\xi) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(u) f(u,\xi)\,du.$$

Свойства функции $\Psi(\alpha, A, \lambda_1, \lambda_2, \ldots)$. Для простоты и наглядности будем привлекать вероятностные соображения.

Пусть $w_0, w_1, \ldots$ — независимые равномерно распределенные случайные величины на $[-1,1]$. Ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda_j w_j$ сходится с вероятностью 1 и определяет случайную величину w

$$w = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j w_j$$

с характеристической функцией, равной

$$\varphi(u) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_j u}{\lambda_j u}.$$

Распределение вероятностей случайной величины w обладает следующими свойствами:

(i) плотность $p_w(\alpha)$ бесконечно дифференцируема на всей прямой;

(ii) функция $p_w(\alpha)$ четная и имеет единственный максимум в нуле;

(iii) $p_w(\alpha)$ равна нулю при $|\alpha| \geqslant \delta$;

(iv) при всех α в интервале $-\delta < \alpha < \delta$ функция $p_w(\alpha)$ положительна.

Очевидно, плотность случайной величины и характеристическая функция случайной величины $V = Aw_0 + w$ равны соответственно

$$p_V(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{A_{w_0}}(\alpha-\beta) p_w\,(\beta)\,d\beta, \quad \frac{1}{A}\psi(u).$$

По формуле обращения имеем

$$p_V(\alpha) = p_V(\alpha, A) = \frac{1}{2\pi A}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-iu\alpha}\,\frac{\sin Au}{u}\prod_{j=1}^{\infty}\frac{\sin\lambda_j u}{\lambda_j u}\,du = \frac{\Psi(\alpha)}{2A}. \tag{4.2}$$

Исследуем свойства плотности $p_V(\alpha)$.

(i) Очевидно, $p_V(\alpha)$ — четная функция.

(ii) $p_V(\alpha)$ — бесконечно дифференцируемая и одновершинная функция. Предположим, что $\delta < A$ и $\alpha > 0$. Тогда $p_V(0) = 1/(2A)$. Действительно, при $0 \leqslant \alpha < A-\delta$ и $\alpha - \delta < \alpha - \beta \leqslant \alpha + \delta < A$ имеем

$$p_V(\alpha) = \int\limits_{-\delta}^{\delta} p_{A_{w_0}}(\alpha-\beta)\,p_w\,(\beta)\,d\beta = \frac{1}{2A}. \tag{4.3}$$

(iii) Пусть теперь $A - \delta < \alpha < A$, $\alpha - \beta < \delta$ и $\alpha - \delta < \beta$; тогда

$$p_V(\alpha) = \int\limits_{\alpha-\delta}^{A} p_{A_{w_0}}(\beta)\,p_w(\alpha-\beta)\,d\beta = \frac{1}{2A}\int\limits_{\alpha-\delta}^{A} p_w(\alpha-\beta)\,d\beta = -\frac{1}{2A}\int\limits_{\delta}^{\alpha-A} p_w(\gamma)\,d\gamma =$$

$$= \frac{1}{2A}\int\limits_{\alpha-A}^{\delta} p_w(\gamma)\,d\gamma = \frac{1}{2A}\left[1 - \int\limits_{A-\alpha}^{\delta} p_w(\gamma)\,d\gamma\right] = \frac{1}{2A}\left[1 - \int\limits_{-\delta}^{\alpha-A} p_w(\gamma)\,d\gamma\right]. \tag{4.4}$$

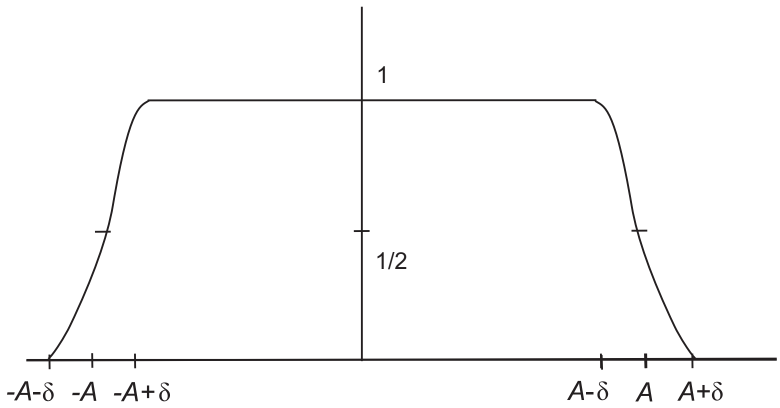

Рис. 5

Пусть

$$\rho(\alpha) = \int\limits_{A-\alpha}^{\delta} p_w(\gamma) d\gamma.$$

Тогда $\rho(A-\delta) - 0$, $p(A) = 1/2$ и на отрезке $[A-\delta, A]$ функция $\rho(\alpha)$ не убывает. Остается рассмотреть интервал $A < \alpha < A+\delta$. Воспользуемся соотношением (4.4). При $-\delta < \varepsilon < \delta$ получим

$$p_v(A-\varepsilon) = \frac{1}{2A}\left[1 - \int\limits_{\varepsilon}^{\delta} p_w(\gamma)\, d\gamma\right] = \frac{1}{2A}\left[\frac{1}{2} + \int\limits_{0}^{\varepsilon} p_w(\gamma)\, d\gamma\right]. \tag{4.5}$$

На основании формул (4.2)–(4.5) можно получить следующие свойства функции $\Psi(\alpha) = 2Ap_\nu(\alpha)$ при $\delta < A$:

(i) $\Psi(\alpha)$ — четная и бесконечно дифференцируемая функция;
(ii) $\Psi(\alpha) = 1$ для $0 < \alpha \leqslant A-\delta$;
(iii) $1 > \Psi(\alpha) > 0$, если $A-\delta < \alpha < A+\delta$;
(iv) $\Psi(\alpha)$ монотонно убывает в промежутке $A-\delta < \alpha < A+\delta$;
(v) функция $\Psi(\alpha)$ выпукла вверх на $(A-\delta, A)$, выпукла вниз на $(A, A+\delta)$;
(vi) график $\Psi(\alpha$ в интервале $(A-\delta, A+\delta)$ обладает центральной симметрией относительно точки $(A, 1/2)$;
(vii) $\Psi(\alpha) = 0$, если $\alpha > A+\delta$.

Введем индикаторную функцию

$$\chi_A(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{если } |\alpha| \leqslant A \\ 0, & \text{если } |\alpha| < A. \end{cases}$$

Учитывая свойства функции $\Psi(\alpha A)$ при всех α и δ $(2\delta \leqslant A)$, имеем

$$\Psi(\alpha, A-\delta) \leqslant \chi_A(\alpha) \leqslant \Psi(\alpha, A+\delta). \tag{4.6}$$

С другой стороны, учитывая монотонность функции Ψ по A для $A > 2\delta$ и всех α, получаем

$$\Psi(\alpha, A-\delta) \leqslant \Psi(\alpha, A) \leqslant \Psi(\alpha, A+\delta). \tag{4.7}$$

Из неравенств (4.6) и (4.7) следует неравенство

$$\bigl|\Psi(\alpha, A) - \chi_A(\alpha)\bigr| \leqslant \Psi(\alpha, A+\delta) - \Psi(\alpha, A-\delta). \tag{4.8}$$

Поэтому для любой случайной величины ξ с плотностью распределения P_ξ выполнено неравенство

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \chi_A(\alpha) P_\xi(\alpha)\, d\alpha - \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\alpha, A) P_\xi(\alpha)\, d\alpha\right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \Big[\Psi(\alpha, A+\delta) - \Psi(\alpha, A-\delta)\Big] P_\xi(\alpha)\, d\alpha. \tag{4.9}$$

Лемма 4.1. *Пусть ξ и η — произвольные случайные величины, а $\lambda_1, \ldots, \lambda_2, \ldots$ — такая последовательность положительных чисел, что*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j < \infty.$$

Тогда

$$\Delta(A) = \Big|P\big(|\xi| < A\big) - P\big(|\eta| < A\big)\Big| \leqslant \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Au}{u} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_j u}{\lambda_j u} \Big[f(u, \xi) - f(u, \eta)\Big]\, du\right| +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sin(A+\delta)u}{u} - \frac{\sin(A-\delta)u}{u}\right] \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_j u}{\lambda_j u} \Big[f(u, \xi) - f(u, \eta)\Big]\, du +$$
$$+ \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sin(A+\delta)u}{u} - \frac{\sin(A-\delta)u}{u}\right] \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_j u}{\lambda_j u} f(u, \eta) du. \tag{4.10}$$

Доказательство. Воспользовавшись неравенством (4.9), получим

$$\Delta(A) = \left|\int_{-\infty}^{\infty} \chi_A(\alpha)\big(P_\xi(\alpha) - P_\eta(\alpha)\big)\, d\alpha\right| =$$
$$= \left|\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\alpha, A)\big(P_\xi(\alpha) - P_\eta(\alpha)\big)\, d\alpha + \int_{-\infty}^{\infty} \big(\chi_A(\alpha) - \Psi(\alpha, A)\big)\big(P_\xi(\alpha) - P_\eta(\alpha)\big)\, d\alpha\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\alpha, A)\big(P_\xi(\alpha) - P_\eta(\alpha)\big)\, d\alpha\right| + \int_{-\infty}^{\infty} \big|\chi_A(\alpha) - \Psi(\alpha, A)\big|\big(P_\xi(\alpha) - P_\eta(\alpha)\big)\, d\alpha \leqslant$$
$$\leqslant \left|\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\alpha, A)\big(P_\xi(\alpha) - P_\eta(\alpha)\big) d\alpha\right| + 2\int_{-\infty}^{\infty} \big(\Psi(\alpha, A+\delta) - \Psi(\alpha, A-\delta)\big) P_\eta(\alpha) d\alpha +$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \big(\Psi(\alpha, A+\delta) - \Psi(\alpha, A-\delta)\big)\big(P_\xi(\alpha) - P_\eta(\alpha)\big) d\alpha. \tag{4.11}$$

Учитывая (4.2), получаем утверждение леммы. □

Неравенство (4.11) будем называть основным. В терминах распределений неравенство (4.11) можно переписать следующим образом:

$$\Delta(A) \leqslant \Big|P\big(|\xi + w| < A\big) - P\big(|\eta + w| < A\big)\Big| + P\big(A - \delta < |\xi + w| < A + \delta\big) -$$
$$- P\big(A - \delta < |\eta + w| < A + \delta\big) + 2P\big(A - \delta < |\eta + w| < A + \delta\big).$$

4.1.2. Центральная предельная теорема. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины,

$$S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n, \quad E\xi = a, \quad DS_n = 1, \quad L_n = \sum_{j=1}^{n} E|\xi_j|^3.$$

Тогда

$$\Delta(A) = \Delta_n(A) = \sup_A \Big| P\big(|S_n| < A\big) - P\big(|\eta| < A\big) \Big| \leqslant c\, L_n,$$

где η имеет нормальное распределение с тем же первым и вторым моментами, что и S_n, c — абсолютная константа.

Доказательство. Заметим, что поскольку мы не требуем равенства нулю $E\xi$, то рассмотрение симметричных относительно нуля интервалов не ограничивает общности. Воспользуемся неравенством (4.10). Будем полагать, что $A > 2\delta$. Имеем

$$\Delta(A) = \frac{1}{\pi}\left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Au}{u} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_j u}{\lambda_j u} \Big[f(u, S_n) - e^{-u^2/2 + iau} \Big]\, du \right| +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sin(A+\delta)u}{u} - \frac{\sin(A-\delta)u}{u} \right] \cdot \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_j u}{\lambda_j u} \Big[f(u, S_n) - e^{-u^2/2 + iau} \Big]\, du \right| +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sin(A+\delta)u}{u} - \frac{\sin(A-\delta)u}{u} \right] \cdot \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_j u}{\lambda_j u} e^{-u^2/2 + iau} du \equiv J_1 + J_2 + J_3.$$

Оценим J_3. Поскольку

$$\sin(A+\delta)u - \sin(A-\delta)u = 2\cos Au \sin \delta u,$$

имеем

$$J_3 = \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos Au \frac{\sin \delta u}{u} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_j u}{\lambda_j u} e^{iua - u^2/2}\, du = \frac{4\delta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos Au \frac{\sin \delta u}{\delta u} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_j u}{\lambda_j u} e^{iua - u^2/2}\, du.$$

Величина $J_3/4\delta$ равна полусумме значений плотности распределений случайной величины

$$\delta w_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j w_j$$

в точках $-A$ и A. Поэтому

$$J_3 \leqslant 4\delta.$$

Положим $\lambda_j = 4\pi L_n / j2$; тогда

$$\delta = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j = \frac{2\pi^3 L_n}{3},$$

и $J_3 = \mathrm{O}(L_n)$. Имеет место оценка

$$J_1 = \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Au}{u} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_j u}{\lambda_j u} \Big[f(u, S_n) - e^{iua - u^2/2} \Big]\, du \right| = \frac{1}{\pi} \int\limits_{|u| < 1/4L_n} + \frac{1}{\pi} \int\limits_{|u| \geqslant 1/4L_n} = J_1' + J_1''.$$

Для оценки J_1' используем неравенство

$$\Big| f(u, S_n) - e^{iau - u^2/2} \Big| \leqslant 16 L_n |u|^3 e^{-u^2/3}, \quad |u| \leqslant \frac{1}{4L_n}.$$

(см. [60, с. 300]). Поэтому

$$J_1' \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_{|u| \leqslant 1/4L_n} \left| \frac{\sin Au}{u} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_j u}{\lambda_j u} \Big[f(u, S_n) - e^{iau - u^2/2} \Big] \right| du <$$

$$< \frac{16}{\pi} \int\limits_{|u| \leqslant 1/4L_n} \frac{L_n |u|^3 e^{-u^2/3}}{|u|} du = \frac{16 L_n}{\pi} \int\limits_{|u| \leqslant 1/4L_n} |u|^2 e^{-u^2/3} du = c_1 L_n.$$

Оценка J_1'' сводится к оценке выражения

$$R = \frac{1}{\pi} \int\limits_{|u|\geqslant 1/4L_n} |u|^{-1} \left| \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_j u}{\lambda_j u} \right| \bigl|f(u, S_n)\bigr| \, du$$

(так как в качестве случайной величины S_n можно рассматривать, в частности, и нормальную случайную величину).

Теперь оценим J_2:

$$J_2 \leqslant \frac{1}{\pi} \left| \int\limits_{|u|<(4L_n)^{-1}} \left[\frac{\sin(A+\delta)u}{u} - \frac{\sin(A-\delta)u}{u} \right] \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_j u}{\lambda_j u} \Bigl[f(u, S_n) - e^{iau-u^2/2} \Bigr] du \right| +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \left| \int\limits_{|u|\geqslant(4L_n)^{-1}} \left[\frac{\sin(A+\delta)u}{u} - \frac{\sin(A-\delta)u}{u} \right] \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_j u}{\lambda_j u} \Bigl[f(u, S_n) - e^{iau-u^2/2} \Bigr] du \right| \equiv J_2' + J_2''.$$

Аналогично оценке J_1' получаем

$$J_2' < \frac{\delta}{\pi} \int\limits_{|u|\leqslant 1/4L_n} \frac{2|\cos Au \sin \delta u|}{|u|\delta} \, 16L_n |u|^3 \, e^{-u^2/3} \, du < \frac{2\delta \cdot 16 L_n 2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} u^3 e^{-u^2/3} \, du \leqslant c_2 L_n \delta. \qquad \square$$

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 4.2. *Для произвольного $u \geqslant (4L_n)^{-1}$ и для последовательности $\lambda_j = 4\pi L_n / j^2$ справедливо неравенство*

$$\left| \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_j u}{\lambda_j u} \right| < \exp\bigl\{ -c_3 \, u^{1/2} L_n^{1/2} \bigr\}, \quad c_3 = \frac{\pi^2}{72}. \tag{4.12}$$

Доказательство. Воспользуемся представлением

$$\ln \left| \frac{\sin \lambda_j u}{\lambda_j u} \right| = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^{2m} B_m}{2m!} \, \frac{(\lambda_j u)^{2m}}{2m} \quad \text{при} \ \ 0 < |\lambda_j u| < \pi,$$

где B_n — числа Бернулли. Отсюда получаем, что при $|\lambda_j u| < \pi$ выполняется неравенство

$$\ln \left| \frac{\sin \lambda_j u}{\lambda_j u} \right| < -u^2 B_1 \lambda_j^2 = -\frac{u^2}{6} \, \lambda_j^2. \tag{4.13}$$

Пусть j^* таково, что

$$\frac{4\pi u L_n}{j_*^2} < \pi \leqslant \frac{4\pi u L_n}{(j_* - 1)^2}. \tag{4.14}$$

В силу условия леммы такое j_* существует и не меньше 2. Тогда в силу неравенства (4.14) имеем

$$\left| \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_j u}{\lambda_j u} \right| \leqslant \exp \left\{ -(4\pi L_n)^2 u^2 \sum_{j=j^*}^{\infty} \frac{1}{j^4} \right\},$$

$$\sum_{j=j_*}^{\infty} \frac{1}{j^4} > \int\limits_{j^*}^{\infty} \frac{dx}{x^4} > \frac{1}{3(j_*)^3} = \frac{(j_*-1)^3}{3j_*^3} \, \frac{1}{(j_*-1)^3} \geqslant \frac{1}{3 \cdot 2^3} \, \frac{1}{(4uL_n)^{3/2}}.$$

Окончательно

$$\bigl|\varphi(u)\bigr| \leqslant \exp\Bigl\{ -c_3 L_n^{1/2} u^{1/2} \Bigr\}$$

для всех $u \geqslant (4L_n)^{-1}$. $\square$

Для оценки R нам понадобится также следующий факт.

Лемма 4.3 (Эссеен, [127, с. 27]). *Пусть $z_1, \dots, z_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $Ez_j = 0$, $Ez_j^2 = \alpha_2$, $Ez_j^3 = \beta_3$. Тогда существуют такие две абсолютные постоянные k_1 и k_2, что для любого интервала I длины $k_1\alpha_2/\beta_3$ справедливо соотношение*

$$\int\limits_I \bigl|f(u, z_1)\bigr|^n du \leqslant \frac{k_2}{\sqrt{n\alpha_2}},$$

где $k_1 = 0{,}74$, $k_2 = 5{,}206$.

Рассмотрим случайные величины $v_{1,n}, \dots, v_{n,n}$ с характеристической функцией

$$f(u, v_{k,n}) = \frac{1}{2}\Bigl\{\bigl|f(u,\xi_1)\bigr|^2 + \ldots + \bigl|f(u,\xi_n)\bigr|^2\Bigr\},$$

причем $Ev_{k,n} = 0$, $Ev_{k,n}^2 = 2/n$, $Ev_{k,n}|^3 \leqslant 4L_n, n$, для всех $k = 1, \dots, n$. (Действительно, если ξ_k' не зависит от ξ_k и распределена одинаково с ξ_k, то характеристическая функция для $\xi_k - \xi_k'$ равна $\bigl|f(u,\xi_k)\bigr|^2$, причем $E(\xi_k - \xi_k')^2 = 2E\xi_k^2$ и $E|\xi_k - \xi_k'|^3 \leqslant 4E\xi_k^3$.) Очевидно, что

$$\bigl|f(u, S_n)\bigr| \leqslant \bigl|f(u, v_{k,n})\bigr|^{n/2}.$$

Тогда, согласно лемме Эссеена, на каждом интервале I_1 длины $k_1/2L_n \leqslant k_1 Ev_{k,n}^2/E|v_{k,n}|^3$ имеем

$$\int\limits_{I_1} \bigl|f(u, S_n)\bigr| du \leqslant \int\limits_{I_1} \bigl|f(u, \nu_{k,n})\bigr|^{[n/2]} du = k_2 \frac{1}{\sqrt{\frac{n}{6}\frac{2}{n}}} = k_2\sqrt{3}.$$

Приступим к оценке R. Пусть $\alpha_l = (1 + 2lk_1)/4L_n$, где $l = 0, 1, \dots$. Тогда, используя неравенство (4.12), получаем

$$R = \int\limits_{u \geqslant (4L_n)^{-1}} u^{-1} \left|\prod_{j=1}^{\infty} \frac{\sin\lambda_j u}{\lambda_j u}\right| \bigl|f(u, X)\bigr|\, du < 4L_n \sum_{l=1}^{\infty} \int\limits_{a_l}^{a_{l+1}} \exp\bigl\{-c_3 L_n^{1/2} u^{1/2}\bigr\} f(u, x)\, du \leqslant$$

$$\leqslant 4L_n \sum_{l=1}^{\infty} \exp\bigl\{-c_3 L_n^{1/2} a_l^{1/2}\bigr\} \int\limits_{a_l}^{a_{l+1}} |f(u, Z)|\, du.$$

Применяя лемму Эссеена и учитывая, что $a_l L_n > (1 + 2lk_1)/4 \geqslant \theta l$, где θ — некоторое положительное число, получаем оценку

$$R \leqslant 4L_n k_2 \sqrt{3} \sum_{l=1}^{\infty} \exp\bigl\{-c_3 L_n^{1/2} a_l^{1/2}\bigr\} < c_4 L_n \sum_{l=1}^{\infty} \exp\bigl\{-c_3 \theta^{1/2} l^{1/2}\bigr\} = \mathrm{O}(L_n).$$

Учитывая эти оценки, получаем, что при $A \geqslant 2\delta$

$$\Delta(A) = \mathrm{O}(L_n). \tag{4.15}$$

Пусть теперь $A < 2\delta$. Тогда $P(|\eta| < A) \leqslant 2\delta/\sqrt{2\pi}$,

$$P\bigl(|S_n| \leqslant A\bigr) \leqslant P\bigl(|S_n| \leqslant 2\delta\bigr) \leqslant P\bigl(|\eta| \leqslant 2\delta\bigr) + \mathrm{O}(L_n) < \frac{2\delta}{\sqrt{2\pi}} + \mathrm{O}(L_n) = \mathrm{O}(L_n).$$

Отсюда снова получаем (4.15).

В завершение этого раздела приведем неравенство для характеристической функции равномерного распределения, которое является обобщением на многомерный случай результата леммы (4.12). Интерес к такому типу неравенств обусловлен следующим обстоятельством. Как известно, при изучении скорости сходимости в предельных теоремах теории вероятностей часто используется прием, называемый «сглаживанием» (см. например, [113, с. 601], [111, с. 79] или [146]). При этом наряду с данным случайным вектором рассматривают сумму двух независимых векторов — данного и другого, имеющего «гладкое» распределение и, соответственно, «быстро убывающую» характеристическую функцию.

В качестве «сглаживающего» распределения берут нормальное распределение или композицию (свертку) конечного числа распределений, равномерных в некотором шаре с центром в начале координат. Можно рассматривать и свертку бесконечного числа распределений, каждое из которых равномерно в каком либо шаре с центром в начале координат.

Утверждение 4.1. *Пусть $f(t,\xi)$ — характеристическая функция равномерного распределения в шаре радиуса r и в конечномерном пространстве $\mathbb{R}^s$. Тогда для $r|t| \leqslant s/2$ справедливо неравенство*

$$\bigl|f(t,\xi)\bigr| \leqslant \exp\left\{-\frac{r^2|t|^2}{2s+4}\right\}.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что центр шара находится в нуле. Для характеристической функции равномерного распределения в шаре радиуса r имеем

$$f(t,\xi) = \frac{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}{\pi^{s/2}r^s} \int\limits_{\{x:|x|\leqslant r\}} e^{i(t,x)}dx = \frac{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}{\pi^{s/2}r^s}\left(\frac{2\pi r}{|t|}\right)^{s/2} J_{s/2}(r|t|) = \frac{2^{s/2}\Gamma\bigl(\frac{s}{2}+1\bigr)}{(|t|r)^{s/2}} J_{s/2}(r|t|).$$

Здесь и далее $J_{s/2}(z)$ — функция Бесселя порядка $s/2$. Используя теперь представление функции Бесселя в виде бесконечного произведения (см. [58, с. 550]), имеем при всех z

$$J_{s/2}(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{s/2}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{j^2_{s/2,k}}\right),$$

где при $\nu > 0$ и $k = 1,2,3,\ldots$ $j_{\nu k}$ обозначает k-й по величине положительный нуль функции Бесселя (т.е. $0 < j_{\nu,1} < j_{\nu,2} < \ldots$). Тогда при $r|t| \leqslant j_{s/2,1}$ получим неравенство

$$|f(t,\xi)| = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)2^{s/2}}{(r|t|)^{s/2}}\,\frac{(r|t|)^{s/2}}{2^{s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{(r|t|)^2}{j^2_{s/2.k}}\right) \leqslant \exp\left\{-r^2|t|^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{j^2_{s/2,k}}\right\}.$$

Имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{j^2_{s/2,k}} = \frac{1}{2^2(\frac{s}{2}+1)}$$

(см. [58, формула 5, с. 553]). Следовательно,

$$\bigl|f(t,\xi)\bigr| \leqslant \exp\left\{-r^2|t|^2\frac{1}{2^2(\frac{s}{2}+1)}\right\} \quad \text{при} \quad r|t| \leqslant j_{s/2,1}. \tag{4.16}$$

Так как нули функции Бесселя допускают оценку

$$j_{s/2,1} > \sqrt{\frac{s}{2}\left(\frac{s}{2}+2\right)} \tag{4.17}$$

(см. [137, формула 5, с. 535])), то неравенство (4.16) имеет место и при $r|t| \leqslant s/2$. □

Следует добавить, что значения $j_{k,1}$ табулированы (см. [11, с. 227] или‘ [1]). Известны и асимптотические формулы для $j_{k,1}$ при $k \to \infty$ (см. [11, с. 192]).

Заметим также, что для $s = 1$ и $r|t| \leqslant j_{1/2,1}$ неравенство (4.17) совпадает с оценкой (17) из [25], причем $j_{1/2,1} = \pi$, так как

$$J_{1/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}\sin z.$$

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных векторов со значением из $\mathbb{R}^S$, причем распределение ξ_k равномерно в шаре радиуса r_k и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} r_k < \infty$.

Утверждение 4.2. *Пусть*

$$r_k = \frac{A}{k^\alpha} \cdot \frac{s}{2}, \quad \alpha > 1, \quad k = 1, 2, \dots,$$

A — какая-либо положительная постоянная. Тогда для суммы ряда

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$$

имеем оценку

$$|\xi| \leqslant A \cdot \frac{s}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = A \frac{s}{2} \zeta(\alpha)$$

и при $|t| \geqslant 1/A$ справедливо неравенство

$$\bigl|f(t,\xi)\bigr| = \prod_{k=1}^{\infty} \bigl|f(t,\xi_k)\bigr| \leqslant \exp\left\{ -|t|^{1/\alpha} A^{1/\alpha} \frac{(s/2)^2}{2^2(s/2+1)(2\alpha-1)2^{2\alpha-1}} \right\}.$$

Пусть t фиксировано и $|t|A \geqslant 1$. Выберем натуральное k_* (зависящее от t) так, что

$$(k_* - 1)^\alpha \leqslant |t|A < k_*^\alpha, \quad k_* \geqslant 2.$$

Тогда при $k > k_*$ имеем

$$r_k|t| \leqslant r_{k_*}|t| = \frac{A|t|}{k_*^\alpha} \frac{s}{2} < \frac{s}{2} \leqslant \frac{A|t|}{(k_*-1)^\alpha} \cdot \frac{s}{2}.$$

Используя неравенство (4.16), имеем

$$\begin{aligned}
\bigl|f(t,\xi)\bigr| &\leqslant \prod_{j=k_*}^{\infty} \bigl|f(t,\xi_j)\bigr| \leqslant \exp\left\{ -\frac{|t|^2 A^2 (\frac{s}{2})^2}{2^2(\frac{s}{2}+1)} \sum_{k=k_*}^{\infty} \frac{1}{k^{2\alpha}} \right\} \leqslant \\
&\leqslant \exp\left\{ -|t|^2 \frac{A^2(\frac{s}{2})^2}{2^2(\frac{s}{2}+1)} \frac{(k_*-1)^{2\alpha-1}}{(2\alpha-1)(k_*)^{2\alpha-1}(k_*-1)^{2\alpha-1}} \right\} \leqslant \\
&\leqslant \exp\left\{ -|t|^2 \frac{A^2(\frac{s}{2})^2}{2^2(\frac{s}{2}+1)} \frac{1}{(2\alpha-1)2^{2\alpha-1}} \frac{1}{A|t|^{2\alpha-1/\alpha}} \right\} = \\
&= \exp\left\{ -|t|^{1/\alpha} A^{1/\alpha} \frac{(s/2)^2}{2^2(\frac{s}{2}+1)(2\alpha-1)2^{2\alpha-1}} \right\}.
\end{aligned}$$

Следует заметить, что при $s = 1$ отсюда вытекает неравенство леммы 4.2 (см. [25]). В самом деле, в обозначениях этой леммы $\alpha = 2$, $A = 4L_n$, $r_k = 4\pi L_n/k^2$; учитывая, что $j_{1/2,1} = \pi$, получаем при $|t| \geqslant 1/(4L_n)$

$$\prod_{j=1}^{\infty} \bigl|f(t,\xi_j)\bigr| \leqslant \exp\left\{ -|t|^{1/2} L_n^{1/2} \frac{4^{1/2}\pi^2}{2^2(\frac{1}{2}+1)3 \cdot 2^3} \right\} = \exp\{-|t|^{1/2} L_n^{1/2} \pi^2/72\}.$$

4.2. Неравенство Эссеена для многомерной функции распределения. Пусть ξ, η — s-мерные случайные векторы с функциями распределения $F(x)$ и $G(x)$ ($G(x)$ предполагается дифференцируемой) и с характеристическими функциями $f(t)$ и $g(t)$ соответственно, $x, t \in \mathbb{R}^s$. Ниже с помощью вспомогательных функций $Lf(t)$ и $Lg(t)$ (точное определение см. ниже), будет оцениваться равномерное расстояние между $F(x)$ и $G(x)$.

Введем необходимые обозначения. Условимся в дальнейшем вместо $x_1 < 0, \dots, x_s < 0$ писать просто $x < 0$ и аналогично для интегралов:

$$\int_{-T}^{T} \cdots \int_{-T}^{T} f(t_1, \dots, t_s) dt_1, \dots dt_s = \int_{-T}^{T} f(t) dt.$$

Пусть $i(k) = \{i_1, \dots, i_k\}$, где $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, $k \leqslant s$, — выборка объема k из последовательности $(1, \dots, s)$. Для любой функции $\chi(t)$ $(t \in \mathbb{R}^s)$ положим

$$\chi_{i(k)} = \chi(t)\big|_{t_{i_1}=\dots=t_{i_k}=0}, \quad \chi^{i(k)}(t) = \lim_{\substack{t_{i_1}\to\infty \\ \dots \\ t_{i_k}\to\infty}} \chi(t).$$

В действительности введенные выше функции зависят, вообще говоря, от меньшего, чем s, числа одномерных аргументов и, конечно, точнее было бы писать $\chi_{i(k)}(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1} \dots)$. Мы сохраним введенные обозначения ради упрощения записи, помня, что аргументы с номерами i_p, $p = 1, \dots, k$, отсутствуют.

Далее, в записи типа

$$\int_{-T}^{T} \chi_{i(k)}(t)dt, \ \int_{-T}^{T} \chi^{i(k)}(t)dt$$

будем предполагать, что интегрирование ведется соответственно по $(s-k)$-мерному кубу. Символами

$$\prod\nolimits^{i(k)}, \quad \sum_{i(k)}$$

будем обозначать соответственно произведение и сумму всех участвующих в вычислениях элементов кроме тех, которые имеют номера $i_1, \dots, i_k$.

Для любой функции $\chi(t)$, $t \in \mathbb{R}^s$, и любого s определим преобразование $L(\chi(t))$ следующим образом:

$$L(\chi(t)) = \chi(t) + \sum_{k=1}^{s-1} (-1)^k \sum_{i(k)} \chi_{i(k)}(t).$$

Ниже оператор L будет применяться к различным функциям, определенным в пространствах различной размерности. Например, $L(\chi_{i(1)}(t))$ означает соответствующее преобразование, определенное выше, функции, зависящей от $s-1$ аргументов.

Пусть

$$\Delta(t) = \frac{Lf(t) - Lg(t)}{\prod\limits_{j=1}^{s} t_j}, \quad \Delta_{i(k)}(t) = \frac{Lf_{i(k)}(t) - Lg_{i(k)}(t)}{\prod\limits_{t=j}^{s}{}^{i(k)} t_j}.$$

Теорема 4.1. *При любом $T > 0$*

$$\sup_x \big|F(x) - G(x)\big| \leqslant 2\left[\frac{1}{(2\pi)^s}\int_{-T}^{T} |\Delta(t)|dt + \sum_{k=1}^{s-1}\frac{1}{(2\pi)^{s-k}}\sum_{i(k)}\int_{-T}^{T}\big|\Delta_{i(k)}(t)\big|dt\right] + \frac{Ac(s)}{T}, \tag{4.18}$$

где

$$c(s) = \frac{24\ln 2}{\pi} + \frac{8s^{1/3}}{(2\pi\ln\frac{4}{3})^{1/3}}, \quad A = \sum_{i=1}^{s} A_i, \quad A_i = \sup\frac{\partial G}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, s.$$

Доказательство. Рассмотрим одномерную плотность

$$q(x) = \frac{3}{8\pi}\left(\frac{4}{x}\sin\frac{x}{4}\right)^4$$

с характеристической функцией

$$h(t) = \begin{cases} 0, & |t| > 1, \\ 2(1-|t|)^3, & 1/2 \leqslant |t| < 1, \\ 1 - 6t^2 + 6|t|^3, & 0 \leqslant |t| < 1/2. \end{cases}$$

Определим λ как корень уравнения

$$\int\limits_{x<\lambda} q(x)dx = \left(\frac{3}{4}\right)^{1/2}.$$

Нетрудно оценить λ сверху:

$$\int\limits_{\lambda}^{\infty} q(x)dx = \frac{3}{2\pi}\int\limits_{\lambda/4}^{\infty}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^4 du < \frac{3}{2\pi}\int\limits_{\lambda/4}\frac{du}{u^4} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{4}{\lambda}\right)^3.$$

Выберем $\lambda = \lambda_0$ так, чтобы

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{4}{\lambda_0}\right)^3 = \frac{\ln 4/3}{s} \quad\Longrightarrow\quad \lambda_0 = \frac{4s^{1/3}}{(2\pi\ln\frac{4}{3})}.$$

Следовательно,

$$\lambda < 4\left(2\pi\ln\frac{4}{3}\right)^{-1/3} s^{1/3} \equiv c_1 s^{1/3}. \tag{4.19}$$

□

Следует заметить, что с изменением сглаживающей плотности порядок верхней оценки λ можно несколько понизить, однако здесь мы ограничимся неравенством (4.19).

Замечание. Сделаем замечание относительно существования интеграла

$$\int\limits_{-T}^{T}|\Delta(t)|dt = \int\limits_{-T}^{T}\frac{|Lf(t) - Lg(t)|}{t_1t_2t_3}\,dt_1dt2dt_3.$$

Для простоты ограничимся пространством $\mathbb{R}^3$.

Утверждение 4.3. *Если*

$$\int \ln(1+|x_1|)\ln(1+|x_2|)\ln(1+|x_3|)p(x_1x_2x_3)dx_1dx_2dx_3 < \infty,$$

то

$$\int\limits_{-T}^{T}\left|\frac{Lf(t)-1}{t_1t_2t_3}\right|dt_1dt_2dt_3 < \infty,$$

где

$$Lf(t) = f(t_1t_2t_3) - f(t_1,t_2,0) - f(t_1,0,t_3) + f(t_1,0,0) - f(0,t_2,t_3) + f(0,t_2,0) + f(0,0,t_3).$$

Доказательство. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} Lf(t) - 1 = \int \Big[&e^{-i(t_1x_1+t_2x_2)}(e^{-it_3x_3}-1) - e^{-it_1x_1}(e^{-it_3x_3}-1) - \\ &- e^{-it_2x_2}(e^{-it_3x_3}-1) + (e^{-it_3x_3}-1)\Big]p(x_1x_2x_3)dx_1dx_2dx_3 = \\ &= \int (e^{-it_3x_3}-1)(e^{-it_2x_2}-1)(e^{-it_1x_1}-1)\,p(x_1x_2x_3)\,dx_1dx_2dx_3. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int\limits_{-T}^{T}\left|\frac{Lf(t)-1}{t_1t_2t_3}\right|dt_1dt_2dt_3 =$$

$$= \int p(x_1x_2x_3)\int\limits_{-T}^{T}\left|\frac{e^{-it_1x_1}-1}{t_1}\;\frac{e^{-it_2x_2}-1}{t_2}\;\frac{e^{-it_3x_3}-1}{t_3}\right|\,dt_1dt_2dt_3dx_1dx_2dx_3 =$$

$$= \int p(x_1x_2x_3) \int\limits_{-T}^{T} \frac{2|\sin\frac{t_1x_1}{2}|}{|t_1|}\ \frac{2|\sin\frac{t_2x_2}{2}|}{|t_2|}\ \frac{2|\sin\frac{t_3x_3}{2}|}{|t_3|}\ dt_1dt_2dt_3dx_1dx_2dx_3.$$

Рассмотрим отдельно следующий интеграл:

$$\int\limits_0^T \left|\frac{\sin(t_1x_1/2)}{t_1}\right| dt_1 = \int\limits_0^{T|x_1|/2} \left|\frac{\sin z}{z}\right| dz = \int\limits_0^1 \left|\frac{\sin z}{z}\right| dz + \int\limits_1^{T|x_1|/2} \left|\frac{\sin z}{z}\right| dz \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \int\limits_1^{T|x_1|/2} \frac{dz}{z} = 1 + \ln\frac{T|x_1|}{2} < 1 + \ln\Bigl(1 + \frac{T|x_1|}{2}\Bigr) < 1 + \ln\Bigl(1 + \frac{T}{2}\Bigr)(1+|x|) =$$

$$= 1 + \ln\Bigl(1+\frac{T}{2}\Bigr) + \ln(1+|x_1|).$$

Из последнего неравенства и следует наше утверждение. □

Пусть случайная величина ζ_T имеет s-мерную плотность $Q_T(x) = Tq(Tx_1)\dots Tq(Tx_s)$ с характеристической функцией $H(t) = h\bigl(\frac{t_1}{T}\bigr)\cdots h\bigl(\frac{t_s}{T}\bigr)$, которая обращается в нуль вне куба $\max(|t_1|\dots|t_s|) < T$.

В дальнейшем нам понадобятся соотношения

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x_1| Q_T\left(x + \frac{\lambda e}{T}\right) dx \leqslant \frac{12\ln 2}{T\pi} + \frac{\lambda}{T} < \frac{1}{T}\left(\frac{12\ln 2}{\pi} + c_1 s^{1/3}\right) \equiv \frac{c(s)}{T},$$

$$\int\limits_{z<0} Q_T\left(z + \frac{\lambda e}{T}\right) dz = \frac{3}{4},$$

где $e = (1,\dots,1)$ — s-мерный вектор. Пусть

$$R(x) = F(x) - G(x), \quad \gamma = \sup_x |R(x)|,$$

$$R_T(x) = P\bigl(\xi + \zeta_T < x\bigr) - P\bigl(\eta + \zeta_T < x\bigr), \quad \gamma_T = \sup_x |R_T(x)|.$$

Легко видеть, что

$$R_T\left(x + \frac{e\lambda}{T}\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x-u) Q_T\left(u + \frac{e\lambda}{T}\right) du.$$

Пусть для определенности $\gamma = \sup\limits_x R(x)$; тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $u^{(\varepsilon)} = (u_1^{(\varepsilon)},\dots,u_s^{(\varepsilon)})$, что $R(u^{(\varepsilon)}) > \gamma - \varepsilon$, поэтому для $x < 0$ имеем

$$R\bigl(u^{(\varepsilon)} - x\bigr) = F\bigl(u^{(\varepsilon)} - x\bigr) - G\bigl(u^{(\varepsilon)} - x\bigr) \geqslant F\bigl(u^{(\varepsilon)}\bigr) - G\bigl(u^{(\varepsilon)}\bigr) -$$

$$- \Bigl[G\bigl(u^{(\varepsilon)} - x\bigr) - G\bigl(u^{(\varepsilon)}\bigr)\Bigr] \geqslant \gamma - \varepsilon - A_1|x_1| - \ldots - A_3|x_s|.$$

Имеем

$$J_1 = \int\limits_{x<0} R\bigl(u^{(\varepsilon)} - x\bigr)\, Q_T\left(x + \frac{\lambda e}{T}\right) dx \geqslant$$

$$\geqslant (\gamma - \varepsilon) \int\limits_{x<0} Q_T\left(x + \frac{\lambda e}{T}\right) dx - \frac{Ac(s)}{T} = \frac{3}{4}(\gamma - \varepsilon) - \frac{Ac(s)}{2T},$$

$$|J_2| = \left| \int\limits_{\substack{x_1 \geqslant 0 \\ \cdots \\ x_s \geqslant 0}} R\big(u^{(\varepsilon)} - x\big) Q_T\left(x + \frac{\lambda e}{T}\right) dx \right| \leqslant \frac{1}{4}\,\gamma;$$

$$\gamma_T \geqslant \left| R_T\left(u^{(\varepsilon)} + \frac{\lambda e}{T}\right) \right| \geqslant |J_1| - |J_2| \geqslant \frac{3}{4}(\gamma - \varepsilon) - \frac{Ac(s)}{2T} - \frac{\gamma}{4}. \tag{4.20}$$

В силу произвольной малости ε отсюда получаем, что

$$\gamma < 2\gamma_T + c(s)\frac{A}{T}. \tag{4.21}$$

Используя формулу обращения[1], нетрудно вывести соотношение

$$J_T = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x-u) Q_T(u) du =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^s} \int\limits_{-T}^{T} \frac{\Delta(t)}{(-i)^s} e^{-i(t,x)} H(t)\, dt + \sum_{k=1}^{s-1} (-1)^k \sum_{i(k)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} R^{i(k)}(x-y) Q_T(y)\, dy. \tag{4.22}$$

Рассмотрим последнее равенство как рекуррентное соотношение; тогда

$$\sum_{i(1)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} R^{i(1)}(x-u) Q_T(u) du =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{s-1}} \sum_{i(1)} \int\limits_{-T}^{T} \frac{\Delta i_{(1)}(t)}{(-i)^{s-1}} H(t) e^{-i(t,x)}\, dt + \sum_{k=2}^{s-1} (-1)^k \sum_{i(k)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} R^{i(k)}(x-u) Q_T(u)\, du =$$

$$= \sum_{k=1}^{s-1} \frac{1}{(2\pi)^{s-k}} \sum_{i(k)} \int\limits_{-T}^{T} \frac{\Delta_{i(k)}(t)}{(-i)^{s-k}} H(t) e^{-i(t,x)}\, dt$$

и так далее. Наконец,

$$\sum_{i(s-1)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} R^{i(s-1)}(x-u) Q_T(u) du = \frac{1}{2\pi} \sum_{i(s-1)} \int\limits_{-T}^{T} \frac{\Delta_{i(s-1)}(t)}{-i} H(t) e^{-i(t,x)}\, dt.$$

Подставив эти выражения в формулу (4.22), получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x-u) Q_T(u) du = \frac{1}{(2\pi)^s} \int\limits_{-T}^{T} \frac{\Delta(t)}{(-i)^s} e^{-i(t,x)} H(t)\, dt + \sum_{k=1}^{s-1} \frac{1}{(2\pi)^{s-k}} \sum_{j(k)} \int\limits_{-T}^{T} \frac{\Delta_{i(k)}(t)}{(-i)^{s-k}} e^{-i(t,x)} H(t)\, dt.$$

Следовательно,

$$\sup_x \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x-u) Q_T(u)\, du \right| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^s} \int\limits_{-T}^{T} |\Delta(t)|\, dt + \sum_{k=1}^{s-1} \frac{1}{(2\pi)^{s-k}} \sum_{i(k)} \int\limits_{-T}^{T} |\Delta_{i(k)}(t)|\, dt.$$

Отсюда по формуле (4.21) следует (4.18).

[1] См. замечание ниже.

Замечание. С целью облегчить изложение последующего материала, проведем рассуждение в $\mathbb{R}^3$. По формуле обращения имеем

$$\iiint \Big[F(x-u) - F(x_1-u_1, x_2-u_2, \infty) - F(x_1-u_1, \infty, x_2-u_2) - \\ - F(\infty, x_2-u_2, x_3-u_3) + F(x_1-u_1, \infty, \infty) + F(\infty, x_2-u_2, \infty) + \\ + F(\infty, \infty, x_3-u_3)\Big]\, Tq(Tx_1)Tq(Tx_2)Tq(T_3x_3)\, dx_1dx_2dx_3 = \\ = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \Big[f(t) - f(t_1,t_2,0) - f(t_1,0,t_3) - f(0,t_2,t_3) + f(t_1,0,0) + f(0,t_2,0) + f(0,0,t_3)\Big]\times \\ \times h\Big(\frac{t_1}{T}\Big)h\Big(\frac{t_2}{T}\Big)h\Big(\frac{t_3}{T}\Big)e^{-i(x_1t_1+x_2t_2+x_3t_3)}\, dt_1dt_2dt_3. \quad (4.23)$$

Учитывая, что

$$Lf(t) = f(t) - f(t_1,t_2,0) - f(t_1,0,t_3) - f(0,t_2,t_3) + f(t_1,0,0) + f(0,t_2,0) + f(0,0,t_3),$$

$$Q_T(x) = T_q(Tx_1)\cdot\ldots\cdot Tq(Tx_3), \quad H(t) = h\Big(\frac{t_1}{T}\Big)h\Big(\frac{t_2}{T}\Big)h\Big(\frac{t_3}{T}\Big),$$

$$\Delta(t) = \frac{Lf(t) - Lq(t)}{t_1t_2t_3}, \quad \sum_{i(1)}\Delta_{i(1)} = \Delta(0,t_2,t_3) + \Delta(t_1,0,t_3) + \Delta(t_1,t_2,0),$$

где

$$\Delta(0,t_2t_3) = \frac{Lf(0,t_2t_3) - Lg(\cdot)}{t_2t_3}$$

и т. д., имеем

$$\sum_{i(2)} R^{i(2)}(x-u) = \\ = \big[F(x_1-u_1,\infty,\infty) - G(\cdot)\big] + \big[F(\infty,x_2-u_2,\infty) - G(\cdot)\big] + \big[F(\infty,\infty,x_3-u_3) - G(\cdot)\big].$$

Принимая во внимание (4.23), получаем

$$J_T = \int \big[F(x-u) - G(x-u)\big]Q_T(u)\,du = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{\Delta(t)}{(-i)^3}e^{-i(t,x)}H(t)\,dt + \\ + \int \big[F(\infty,x_2-u_2,x_3-u_3) - G(\cdot)\big]Q_T(u)du + \int \big[F(x_1-u_1,\infty,x_3-u_3) - G(\cdot)\big]Q_T(u)\,du + \\ + \int \big[F(x_1-u_1,x_3-u_2,\infty) - G(\cdot)\big]Q_T(u)\,du - \int \big[F(x_1-u_1,\infty,\infty) - G(\cdot)\big]Q_T(u)\,du - \\ - \int \big[F(\infty,x_2-u_2,\infty) - G(\cdot)\big]Q_T(u)\,du - \int \big[F(\infty,\infty,x_3-u_3) - G(\cdot)\big]Q_T(u)\,du.$$

Применяя последнюю формулу относительно функции «меньшей размерности»

$$\big[F(\infty,x_2-u_2,x_3-u_3) - G(\cdot)\big], \quad \big[F(x_1-u_1,\infty,x_3-u_3) - G(\cdot)\big],$$

можем написать, что

$$J_t = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-T}^{T}\frac{\Delta(t)}{(-i)^3}e^{-i(t,x)}H(t)\,dt + \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-T}^{T}\frac{\Delta(0,t_2,t_3)}{(-i)^2}H(t)e^{-i(t,x)}dt + \\ + \int \big[F(\infty,x_2-u_2,\infty) - G(\cdot)\big]Q_T(u)du + \int \big[F(\infty,\infty,x_3-u_3) - G(\cdot)\big]Q_T(u)du + \\ + \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-T}^{T}\frac{\Delta(t_1,0,t_3)}{(-i)^2}H(t)e^{-i(t,x)}dt + \int \big[F(\infty,\infty,x_3-u_3) - G(\cdot)\big]Q_T(u)du+$$

$$+\int \big[F(x_1-u_1,\infty,\infty)-G(\cdot)\big]Q_T(u)du+\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-T}^{T}\frac{\Delta(t_1,t_2,0)}{(-i)^2}H(t)e^{-i(t,x)}dt+$$

$$+\int \big[F(x_1-u_1,\infty,\infty)-G(\cdot)\big]Q_T(u)du+\int \big[F(\infty,x_2-u_2,\infty)-G(\cdot)\big]Q_T(u)du-$$

$$-\int \big[F(x_1-u_1,\infty,\infty)-G(\cdot)\big]Q_T(u)du-\int \big[F(\infty,x_2-u_2,\infty)-G(\cdot)\big]Q_T(u)du-$$

$$-\int \big[F(\infty,\infty,x_3-u_3)-G(\cdot)\big]Q_T(u)du=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\Delta(t)}{(-i)^3}e^{-i(t,x)}H(t)dt+\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{i(1)}\int\frac{\Delta_{i(1)}(t)}{(-i)^2}e^{-i(t,x)}H(t)dt+$$

$$+2\sum_{i(2)}\int R^{i(2)}(x-u)Q_T(u)du-\sum_{i(2)}\int R^{i(2)}(x-u)Q_T(u)du=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{-T}^{T}\frac{\Delta(t)}{(-i)^3}e^{-i(t,x)}H(t)dt+\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{i(1)}\int\limits_{-T}^{T}\frac{\Delta_{i(1)}(t)}{(-i)^2}e^{-i(t,x)}dt+\frac{1}{(2\pi)}\sum_{i(2)}\int\limits_{-T}^{T}\frac{\Delta_{i(2)}(t)}{(-i)^2}H(t)e^{-i(t,x)}dt.$$

Следовательно,

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}R(x-u)Q_T(u)\,du\right|\leqslant\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{-T}^{T}\big|\Delta(t)\big|\,dt+\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{i(1)}\Big|\int\limits_{-T}^{T}\big|\Delta_{i(1)}(t)\big|\,dt+\frac{1}{2\pi}\sum_{i(2)}\int\limits_{-T}^{T}\big|\Delta_{i(2)}(t)\big|\,dt.$$

Отсюда уже следует утверждение теоремы.

В [14] приводится следующая теорема.

Теорема 4.2. *Для достаточно больших N и T справедливо неравенство*

$$L(F,G)\leqslant c\left(\int\limits_{\{t:NT^{-1}\leqslant t_j<T,\ j=1,\dots,s\}}\frac{|f(t)-g(t)|}{|t_1\dots t_s|}dt+T^{-1}\log T\log TN\right)+Q_F(N)+Q_G(N),\quad(4.24)$$

где $L(F,G)$ — метрика Леви,

$$Q_F(N)=P\left(\bigcup_{l}^{n}\xi_j\bar{\in}[-N,N]\right),$$

c — некая константа, не зависящая от N и T и в отличие от доказанной нами теоремы не предполагается существование $\partial G/\partial x_j$, $j=1,\dots,s$.

Неравенство (4.24) естественно рассматривать как многомерный аналог неравенства В. М. Золотарёва (см. [43]).

Для наглядности приведем теорему в случае двумерных случайных векторов. При любом $T>0$ имеем

$$\sup_{x_1x_2}\big|F(x_1x_2)-G(x_1x_2)\big|\leqslant$$

$$\leqslant 2\left[\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-T}^{T}\int\limits_{-T}^{T}\big|\Delta(t_1t_2)\big|dt_1dt_2+\frac{1}{2\pi}\sum_{i(1)}\int\limits_{-T}^{T}|\Delta_{i(1)}(t)|dt\right]+\frac{A}{T}c(2)=$$

$$= 2\left[\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-T}^{T}\int\limits_{-T}^{T}\left|\frac{Lf(t_1t_2)-Lg(t_1t_2)}{t_1t_2}\right| dt_1\,dt_2 + \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{-T}^{T}\frac{Lf_j(t)-Lg_j(t)}{\prod\limits_{j=1}^{s}{}^{(i,j)}\, t_j}\right] dt + \frac{A}{T}c(2) =$$

$$= 2\Bigg[\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-T}^{T}\int\limits_{-T}^{T}\left|\frac{\big(f(t_1,t_2)-f(t_1,0)-f(0,t_2)\big)-\big(g(t_1,t_2)-g(t,0)-g(0,t_2)\big)}{t_1t_2}\right| dt_1dt_2+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-T}^{T}\left|\frac{f(t_1,0)-g(t_1,0)}{t_1}\right| dt_1 + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-T}^{T}\left|\frac{f(0,t_2)-g(0,t_2)}{t_2}\right| dt_2\Bigg] + \frac{A}{T}c(2).$$

4.3. К оценке близости распределений по вариации. Перейдем теперь к оценке расстояния по вариации с использованием разностей характеристических функций.

Пусть ξ и η — случайные величины с распределениями $p(m) = P(\xi = m)$, $q(m) = P(\eta = m)$, где m — целое число, $f(t)$ и $g(t)$ — характеристические функции ξ и η соответственно. Нетрудно установить, что при любом $h > 0$ и любом целом m, учитывая элементарное равенство

$$e^{ihx} + e^{-ihx} - 2 = 2(\cos hx - 1) = -4\sin^2\frac{hx}{2},$$

имеем

$$-4p(m)\sin^2\frac{hm}{2} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-itm}\big[f(t+h)+f(t-h)-2f(t)\big]\,dt.$$

Вводя обычное обозначение δ_h^2 для центральной второй разности, получаем:

$$\big|p(m)-q(m)\big|\sin^2\frac{hm}{2} = \frac{1}{8\pi}\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-itm}\delta_h^2\big(f(t)-g(t)\big)\,dt\right|. \tag{4.25}$$

Допустим теперь, что при всех h, $|h| < 1$, выполняется неравенство

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big|\delta_h^2(f(t)-g(t))\big|dt \leqslant \varepsilon|h|^{1+\gamma}, \tag{4.26}$$

где ε и γ — постоянные, $\varepsilon > 0$, $0 < \gamma \leqslant 1$. Тогда, выбирая $h = h_m = 1/m$, для каждого $m \neq 0$ из (4.25) получаем

$$\big|p(m)-q(m)\big|\sin^2\frac{1}{2} \leqslant \frac{\varepsilon}{8\pi|m|^{1+\gamma}}.$$

При $m = 0$, используя формулу обращения преобразования Фурье, имеем:

$$\big|p(0)-q(0)\big| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big|f(t)-g(t)\big|dt \equiv \frac{\delta}{2\pi}.$$

Поэтому при условии (4.26) справедливо соотношение

$$\sup_A\big|P(\xi\in A)-P(\eta\in A)\big| = \frac{1}{2}\sum_m |p(m)-q(m)| =$$

$$= \frac{\delta}{4\pi} + \frac{\varepsilon}{8\pi\sin^2\frac{1}{2}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{|m|^{1+\gamma}} = \frac{\delta}{4\pi} + \frac{\varepsilon\zeta(1+\gamma)}{8\pi\sin^2\frac{1}{2}} < \frac{\delta}{12} + \frac{\varepsilon}{3},$$

где $\zeta(s)$ — функция Римана.

Точно так же устанавливаем, что если множество A «отделено» от нуля, т.е. $a = \beta(A) = \inf\{|m| : m \in A\} > 0$, то, принимая во внимание оценку

$$\sum_{m\geqslant a} \frac{1}{|m|^{1+\gamma}} \leqslant \frac{1}{a^{1+\gamma}} + \sum_{m=a+1} \frac{1}{|m|^{1+\gamma}} < \frac{1}{a^{1+\gamma}} + \int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^{1+\gamma}} = \frac{1}{a^{1+\gamma}} + \frac{1}{\gamma a^\gamma} < \frac{1}{a^\gamma} + \frac{1}{\gamma a^\gamma} = \frac{\gamma+1}{\gamma a^\gamma},$$

получим

$$\bigl|P(\xi \in A) - P(\eta \in A)\bigr| \leqslant \frac{\varepsilon}{8\pi \sin^2 \frac{1}{2}} \frac{(1+\gamma)}{\gamma \beta^\gamma(A)}.$$

Приведем пример характеристической функции, удовлетворяющий условию (4.26) с $\gamma < 1$. Нижеприводимые рассуждения примыкают к классической работе [132], где автор исследует нигде не дифференцируемую функцию Вейерштрасса.

Пусть дана характеристическая функция

$$f(t) = \Bigl(1 - \frac{a}{b}\Bigr) \sum_{m=1}^\infty \Bigl(\frac{a}{b}\Bigr)^m \cos b^m t + \Bigl(1 - \frac{a}{b}\Bigr)$$

причем $ab > 1$, $b > 1$ и $0 < a < 1$. Покажем, что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \bigl|\delta_h^2 f(t)\bigr|\, dt \leqslant c(a,b) h^{1+\gamma}, \tag{4.27}$$

где $c(a,b)$ — константа, зависящая от a и b, а γ определяется следующим образом:

$$ab^\gamma = 1. \tag{4.28}$$

Предварительно проведем следующие вспомогательные вычисления. Выберем число L из условия $a^{L+1} \leqslant |h|^\gamma < a^L$. По определению (4.28) получаем $b^\gamma = a^{-1}$ или $b = a^{-1/\gamma}$. Далее,

$$b^{L+1} = (a^{L+1})^{-1/\gamma} \leqslant (|h|^\gamma)^{-1/\gamma} = |h|^{-1}.$$

Аналогично имеем

$$b^L = (a^L)^{-1/\gamma} > (|h|^\gamma)^{-1/\gamma} = |h|^{-1}.$$

Итак, справедливо неравенство

$$b^{L+1} < |h|^{-1} < b^L.$$

Нетрудно получить и следующие неравенства:

$$(ab)^{L+1} < |h|^{\gamma-1}, \quad \frac{a^{L+1}}{b^L} < \frac{|h|^\gamma}{|h|^{-1}} = |h|^{\gamma+1}.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
\bigl|\delta_h^2 f(t)\bigr| &= \left|\Bigl(1 - \frac{a}{b}\Bigr)(-4) \sum_{m=0}^\infty \Bigl(\frac{a}{b}\Bigr)^m \cos b^m t \sin^2 \frac{b^m h}{2}\right| \leqslant \\
&\leqslant \frac{4(b-a)}{b} \left|\sum_{m=0}^L \Bigl(\frac{a}{b}\Bigr)^m \sin^2 \frac{b^m h}{2}\right| + \frac{4(b-a)}{b} \left|\sum_{m=L+1}^\infty \frac{a^m}{b^m}\right| \leqslant \\
&\leqslant \frac{(b-a)}{b} h^2 \sum_{m=0}^L a^m b^m + \frac{4(b-a)}{b} \Bigl(\frac{a}{b}\Bigr)^{L+1} \frac{1}{1-\frac{a}{b}} = \\
&= \frac{(b-a)}{b} h^2 \frac{(ab)^{L+1}}{ab-1} + \frac{4}{b} \frac{a^{L+1}}{b^L} \leqslant \frac{(b-a)}{b(ab-1)} h^{2+\gamma-1} + \frac{4}{b}|h|^{\gamma+1} \\
&= |h|^{\gamma+1} \left(\frac{b-a}{b(ab-1)} + \frac{4}{b}\right).
\end{aligned}$$

Следовательно, справедливо (4.26).

Если функция $g(t)$ удовлетворяет соотношению типа (4.27) (может быть, с другим значением показателя γ'), то разность $f(t)-g(t)$ удовлетворяет (4.26) с показателем, равным минимальному из γ и γ'.

Отметим, что вместо условия (4.26) можно было бы взять условие

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\delta_h'(f'(t)-g'(t))\right| dt < c\,|h|^{\gamma}.$$

4.4. Об одном примере решетчатого распределения. Рассмотрим пример решетчатой случайной величины ξ, которая имеет следующее распределение: $P(\xi=\pm b^n)=1/b^n$ $(b>3)$ при $n\neq 0$ и $P(\xi=0)=1-\frac{2}{b-1}$.

Оказывается, что соответствующая характеристическая функция

$$g(t,\xi)=1-\frac{2}{b-1}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b^n}\cos tb^n$$

нигде не дифференцируема, несмотря на простоту самого распределения. Действительно, последняя сумма превращается в нигде недифференцируемую функцию Вейерштрасса, если взять $t=\pi x$:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a^n\cos b^n\pi x,$$

где $ab=1$. В связи с этим возникает вопрос оценки модуля непрерывности функции Вейерштрасса $f(x)$.

Теорема 4.3. *Пусть $f(x)$ — функция Вейерштрасса и $ab=1$. Справедливы следующие утверждения*:

(i) *для почти всех x имеем*

$$\overline{\lim_{k\to 0}}\,\frac{f(x+h)-f(x)}{\pi h\sqrt{\log\frac{1}{|h|}\log\log\log\frac{1}{|h|}}}=-\underline{\lim_{h\to 0}}\,\frac{f(x+h)-f(x)}{\pi h\sqrt{\log\frac{1}{|h|}\log\log\log\frac{1}{|h|}}}=\frac{1}{\sqrt{\log b}};$$

(ii)

$$\lim_{h\to 0}\operatorname{mes}\left\{x:\ x\in(0,1),\ \frac{f(x+h)-f(x)}{\pi h\sqrt{\frac12\log_b\frac{1}{|h|}}}<y\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}e^{-u^2/2}du.$$

Доказательство. По предположению

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b^n}\cos b^n\pi x.$$

Пусть $|h|\leqslant 1/b$. Тогда найдется такое $N=N_h$, что

$$\frac{1}{b^{N+1}}<|h|\leqslant\frac{1}{b^N}. \tag{4.29}$$

Представим Δ в следующем виде:

$$\Delta=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{b^n}\big(\cos b^n\pi(x+h)-\cos b^n\pi x\big)+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{b^n}\big(\cos b^n\pi(x+h)-\cos b^n\pi x\big)\equiv\Delta^{(1)}+\Delta^{(2)}. \tag{4.30}$$

оценка $\Delta^{(2)}$ не представляет трудности; действительно,

$$|\Delta^{(2)}|\leqslant 2\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{b^n}=2\frac{\frac{1}{b^{N+1}}}{1-\frac1b}<2h\frac{b}{b-1}. \tag{4.31}$$

При оценке $\Delta^{(1)}$ воспользуемся элементарными соотношениями

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos\alpha=-\sin\alpha\sin\beta-2\cos\alpha\sin^2\frac{\beta}{2},$$
$$\sin z=z-\frac{\theta z^3}{6},\quad |z|\leqslant\pi,\quad 0<\theta<1,$$
$$|\sin z|<|z|\quad\text{при всех } z.$$

Тогда получим

$$\delta^{(1)}=-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{b^n}\sin(b^n\pi x)\sin(b^n\pi h)-2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{b^n}\cos b^n\pi x\sin^2\frac{b^n\pi h}{2}\equiv\Delta^{(3)}+\Delta^{(4)}. \tag{4.32}$$

Так как $b^N|h|<1$, то для $\Delta^{(4)}$ имеем

$$|\Delta^{(4)}\leqslant 2\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{b^n}\frac{b^{2n}\pi^2h^2}{4}\right|\leqslant\frac{\pi^2h^2}{2}\sum_{n=1}^{N}b^n\leqslant\frac{\pi^2h^2}{2}\frac{b^{N+1}}{b-1}<\frac{\pi^2b|h|}{2(b-1)}. \tag{4.33}$$

Оценка $\Delta^{(3)}$. Так как при $n\leqslant N$ по условию (4.29) имеем $|b^n\pi h|\leqslant\pi$, то

$$\Delta^{(3)}=-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{b^n}\sin(b^n\pi x)\sin(b^n\pi h)=-\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin b^n\pi x}{b^n}\left(b^n\pi h-\frac{\theta_n'}{6}b^{2n}\pi^2h^2\right)=$$
$$=-\pi h\sum_{n=1}^{N}\sin(b^n\pi x)+\sum_{n=1}^{N}\frac{\theta_n'}{6}b^n\pi^2h^2\sin b^n\pi x. \tag{4.34}$$

Введем обозначение

$$\Delta^{(5)}=\sum_{n=1}^{N}\frac{\theta_n'}{6}b^n\pi^2h^2\sin(b^n\pi x).$$

Верно неравенство

$$|\Delta^{(5)}|=\frac{\pi^2h^2}{6}\left|\sum_{n=1}^{N}b^n\sin(b^n\pi x)\right|<\frac{\pi^2h^2}{6}\sum_{n=1}^{N}b^n\leqslant\frac{\pi^2h^2}{6}\;\frac{b^{N+1}}{b-1}<\frac{\pi^2|h|}{6}\;\frac{b}{b-1}. \tag{4.35}$$

Учитывая (4.29)–(4.35) имеем

$$\Delta=f(x+h)-f(x)=-\pi h\sum_{n=1}^{N}\sin(b^n\pi x)+\theta_2\left(\frac{\pi^2bh}{2(b-1)}+\frac{\pi^2b|h|}{6(b-1)}+\frac{2|h|b}{b-1}\right)=$$
$$=-\pi h\sum_{n=1}^{N}\sin b^n\pi x+\frac{|h|b}{b-1}\theta_2\left(2+\frac{2\pi^2}{3}\right).$$

Справедливы также следующие элементарные неравенства:

$$N\log b\leqslant\log\frac{1}{|h|}<(N+1)\log b,\qquad \frac{1}{N+1}<\frac{\log b}{\log\frac{1}{|h|}}\leqslant\frac{1}{N}. \tag{4.36}$$

Поэтому

$$\frac{\Delta}{\pi h\sqrt{\frac12\log_b\frac{1}{|h|}}}=-\frac{\sum\limits_{n=1}^{N}\sin b^n\pi x\sqrt{N/2}}{\sqrt{N/2}\sqrt{\frac12\log_b\frac{1}{|h|}}}+\frac{1}{\sqrt{N/2}}\;\frac{\theta_2(2+\frac{2\pi^2}{3})}{\pi}.$$

При $N\to\infty$ в силу неравенства (4.29) $h\to\infty$ и по теореме Салема—Зигмунда имеем (см. [145])

$$\lim_{h\to0}\operatorname{mes}\left\{x:\; x\in(0,1),\;\frac{f(x+h)-f(x)}{\pi h\sqrt{\frac12\log_b\frac1h}}<y\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{y}e^{-\frac{z62}{2}}\,dz.$$

Для доказательства первого утверждения теоремы рассмотрим отношение

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{\pi h\sqrt{\log\frac{1}{|h|}\log\log\log\frac{1}{|h|}}}=\frac{-\sum\limits_{n=1}^{N}\sin b^n\pi x}{\sqrt{N\log\log N}}\frac{\sqrt{N\log\log N}}{\sqrt{\log\frac{1}{|h|}\log\log\log\frac{1}{h}}}+\frac{\theta_2 b(1+\frac{2\pi^2}{3})}{\pi(b-1)\sqrt{\log\frac{1}{h}\log\log\log\frac{1}{h}}}.$$

На основании неравенства (4.36) имеем

$$\log\frac{1}{|h|}\sim N\log b\quad \text{при } N=N_h\to\infty.$$

Нетрудно показать, что при $N\to\infty$ справедливо соотношение

$$\lim_{N\to\infty}\frac{N\log\log N}{\log\frac{1}{|h|}\log\log\log\frac{1}{|h|}}=\lim_{N\to\infty}\frac{\frac{N}{N\log b}\log\log N}{\frac{\log\frac{1}{|h|}}{N\log b}\log\log\left(\frac{\log\frac{1}{|h|}}{N\log b}\cdot N\log b\right)}=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{\log\log N}{\log b\log\log N+\log\log\log b}=\frac{1}{\log b}.$$

Поэтому для почти всех x на основании закона повторного логарифма (см. [151]) имеем

$$\varlimsup_{h\to\infty}\frac{f(x+h)-f(x)}{\pi h\sqrt{\log\frac{1}{|h|}\log\log\log\frac{1}{|h|}}}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{\pi h\sqrt{\log\frac{1}{|h|}\log\log\log\frac{1}{|h|}}}=\frac{1}{\sqrt{\log b}}.\qquad\square$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979.
2. *Бавли Г. М.* О локальной предельной теореме теории вероятностей// Уч. зап. Свердловск. ун-та. — 1937. — № 2. — С. 8–24.
3. *Бернулли Я.* О законе больших чисел. — М.: Наука, 1986.
4. *Бикялис А. П.* Асимптотические разложения для распределения сумм независимых одинаково распределенных решетчатых случайных векторов// Теор. вероят. примен. — 1969. — *14*, № 3. — С. 499–507.
5. *Бикялис А. П.* О центральной предельной теореме в R^S, I// Лит. мат. сб. — 1971. — *11*, № 1. — С. 27–58.
6. *Бикялис А. П.* О центральной предельной теореме в R^S, II// Лит. мат. сб. — 1972. — *11*, № 1. — С. 73–84.
7. *Бикялис А. П.* О центральной предельной теореме в R^S, III// Лит. мат. сб. — 1972. — *12*, № 3. — С. 19–35.
8. *Большев Л. Н., Смирнов Н. В.* Таблицы математической статистики. — М.: Наука, 1965.
9. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. — М.: Наука, 1986.
10. *Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р.* Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения. — М.: Наука, 1982.
11. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселовых функций. Ч. 1. — М.: ИЛ, 1949.
12. *Виноградов И. М.* Метод тригонометрических сумм. — М.: Наука, 1980.
13. *Воробьёв Н. Н* Числа Фибоначчи. — М.: Наука, 1969.
14. *Габович Ю. Р.* Непрерывность и устойчивость в задачах теории вероятностей и математической статистики// Зап. науч. семин. ЛОМИ. — 1976. — *61*. — С. 5–16.
15. *Гамкрелидзе Н. Г.* О локальной предельной теореме для решетчатых случайных величин// Теор. вероят. примен. — 1964. — *9*, № 4. — С. 733–736.
16. *Гамкрелидзе Н. Г.* О скорости сходимости в локальной теореме для решетчатых распределений// Теор. вероят. примен. — 1966. — *11*, № 1. — С. 129–140.
17. *Гамкрелидзе Н. Г.* Об одной нижней оценке скорости сходимости в локальной теореме// Лит. мат. сб. — 1967. — *7*, № 3. — С. 405–409.
18. *Гамкрелидзе Н. Г.* О связи локальной и интегральной теорем для решетчатых распределений// Теория вероятн. и ее примен. — 1968. — *13*, № 1. — С. 176–179.

19. *Гамкрелидзе Н. Г.* К оценке максимальной вероятности для сумм целочисленных случайных величин// Теор. вероят. примен. — 1973. — *18*, № 4. — С. 842–846.
20. *Гамкрелидзе Н. Г.* Об одной оценке максимальной вероятности// Сообщ. АН ГССР. — 1974. — *73*, № 1. — С. 17–20.
21. *Гамкрелидзе Н. Г.* Неравенство Эссеена для многомерной функции распределения// Теор. вероят. примен. — 1977. — *22*, № 4. — С. 897–900.
22. *Гамкрелидзе Н. Г.* Об одном методе доказательства центральной предельной теоремы// Теор. вероят. примен. — 1980. — *25*, № 3. — С. 619–625.
23. *Гамкрелидзе Н. Г.* О сглаживании вероятностей при сложении независимых целочисленных величин// Теор. вероят. примен. — 1981. — *26*, № 4. — С. 835–841.
24. *Гамкрелидзе Н. Г.* Об одной мере «гладкости» целочисленных распределений// III Междунар. Вильнюсская конференция по теории вероятностей и математической статистике, 1981.
25. *Гамкрелидзе Н. Г.* К оценке близости распределений по вариации// Теор. вероят. примен. — 1983. — *23*, № 2. — С. 445–446.
26. *Гамкрелидзе Н. Г.* О модуле непрерывности функции Вейерштрасса// Мат. заметки. — 1984. — *36*, № 1. — С. 35–38.
27. *Гамкрелидзе Н. Г.* Об одной мере гладкости распределений многомерных целочисленных случайных векторов// Теор. вероят. примен. — 1985. — *29*, № 2. — С. 401–405.
28. *Гамкрелидзе Н. Г.* О применении функции «гладкости» в доказательстве локальной предельной теоремы// Теор. вероят. примен. — 1988. — *23*, № 2. — С. 373–376.
29. *Гамкрелидзе Н. Г.* Письмо в редакцию// Теор. вероят. примен. — 1990. — *35*, № 2.
30. *Гамкрелидзе Н. Г.* О неравенстве для многомерной характеристической функции// Теор. вероят. примен. — 1991. — *36*, № 3. — С. 601–604.
31. *Гамкрелидзе Н. Г.* Об одном вероятностном методе оценки модуля функции Вейерштрасса// Междунар. Вильнюс. конф. по теории вероятностей и математической статистике. — С. 152.
32. *Гамкрелидзе Н. Г.* Об одном многомерном аналоге неравенства Эссеена// I Всемирный Конгресс Общества математической статистики и теории вероятностей им. Я. Бернулли. Т. 2. — С. 837.
33. *Гамкрелидзе Н. Г., Прохоров Ю. В.* Об аппроксимации распределний сумм решетчатых случайных величин при небольшом числе слагаемых// Теор. вероят. примен. — 1971. — *16*, № 1. — С. 136–140.
34. *Гапошкин В. О.* О скорости приближения к нормальному закону распределении взвешенных сумм лакунарных рядов// Теор. вероят. примен. — 1968. — *13*, № 3. — С. 445–461.
35. *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия. — М.: Наука, 1981.
36. *Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н.* Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. — М.: Гостехиздат, 1949.
37. *Гнеденко Б. В., Королюк В. С.* Несколько замечаний к теории областей притяжения устойчивых распределений// Докл. АН УССР. — 1950. — *4*. — С. 275–278.
38. *Гнеденко Б. В.* О локальной предельной теореме теории вероятностей// Усп. мат. наук. — 1949. — *3*, № 3. — С. 187–190.
39. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1977.
40. *Делоне Б. Н., Падуров Н., Александров А. А.* Математические основы структурного анализа кристаллов. — М., 1934.
41. *Журавский А. М.* О предельной теореме исчисления вероятностей// Тр. Физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1939. — *4*. — С. 9–35.
42. *Залесский Б. А., Сазонов В. В., Ульянов В. В.* Правильная оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме в гильбертовом пространстве. — М.: Препринт МИАН № 6, 1989.
43. *Золотарёв В. М.* Оценки различия распределений в метрике Леви// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1971. — *112*. — С. 224–231.
44. *Золотарёв В. М.* Обобщение теоремы Линдберга–Феллера// Теор. вероят. примен. — 1967. — *12*, № 4. — С. 666–677.
45. *Золотарёв В. М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин. — М.: Наука, 1986.
46. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. — М.: Наука, 1965.

47. *Карацуба А. А.* Основы аналитической теории чисел. — М.: Наука, 1975.
48. *Касселс Дж.* Введение в геометрию чисел. — М.: Мир, 1965.
49. *Колмогоров А. Н.* Две равномерные предельные теоремы для сумм независимых слагаемых// Теор. вероят. примен. — 1956. — *1*, № 4. — С. 426–436.
50. *Колмогоров А. Н.* Некоторые работы последних лет в области предельных теорем теории вероятностей// Вестн. МГУ. — 1953. — № 10.
51. *Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике// Киев. — 1986.
52. *Колчин В. Ф.* Случайные отображения. — М.: Наука, 1984.
53. *Крамер Г.* Случайные величины и распределения вероятностей. — М.: ИЛ, 1947.
54. *Круглов В. М.* Поведение сумм независимых случайных величин// Теор. вероят. примен. — 1974. — *19*, № 2. — С. 387–392.
55. *Круглов В. М.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин со значениями в гильбертовом пространстве// Теор. вероят. примен. — 1972. — *17*, № 2. — С. 209–227.
56. *Круопис Ю.* Аппроксимация распределений сумм решетчатых случайных величин// Лит. мат. сб. — 1986. — *26*, № 4. — С. 692–704.
57. *Кубилюс И. П.* Вероятностные методы в теории чисел. — Вильнюс: Госполитнаучиздат, 1962.
58. *Ламперти Д.* Вероятность. — М.: Наука, 1973.
59. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Теория мартингалов. — М.: Наука, 1986.
60. *Лоэв М.* Теория вероятностей. — М.: Мир, 1962.
61. *Максимов В. М.* Необходимые и достаточные условия сходимости композиции неодинаковых распределений на конечной группе// Теор. вероят. примен. — 1956. — *13*, № 2. — С. 295–307.
62. *Мацкиавичюс В. О.* О нижней оценке скорости сходимости в локальной предельной теореме// Теор. вероят. примен. — 1985. — *30*, № 4. — С. 763–766.
63. *Мачис Ю. Ю.* Предельные теоремы в неклассической постановке// Теор. вероят. примен. — 1971. — *16*, № 1. — С. 172–180.
64. *Мейзлер Д. Г., Парасюк О. С., Рвачева Е. Л.* О многомерной локальной предельной теореме теории вероятностей// Докл. АН СССР. — 1949. — *7*. — С. 1127–1128.
65. *Мейзлер Д. Г., Парасюк О. С., Рвачева Е. Л.* О многомерной локальной предельной теореме теории вероятностей// Укр. мат. ж. — 1949. — № 1. — С. 9–20.
66. *Миталаускас А. А.* О многомерной локальной предельной теореме для решетчатых распределений// Тр. АН Лит. ССР. Сер. Б. — 1960. — *2*, № 22. — С. 3–14.
67. *Миталаускас А. А., Статулявичус В. А.* Локальные предельные теоремы и асимптотические разложения для сумм независимых решетчатых случайных величин// Лит. мат. сб. — 1966. — *64*. — С. 569–583.
68. *Миталаускас А. А., Статулявичус В. А.* О локальных предельных теоремах// Лит. мат. сб. — 1977. — *17*, № 4. — С. 169–175.
69. *Мирошников А. А., Рогозин Б. А.* Неравенства для функции концентрации// Теор. вероят. примен. — 1980. — *25*, № 1. — С. 178–183.
70. *Москвин Д. А., Постникова Л. П., Юдин А. А.* Об арифметическом методе получения локальных предельных теорем для решетчатых случайны// Теор. вероят. примен. — 1970. — *15*, № 1. — С. 86–96.
71. *Мухин А. Б.* Локальные предельные теоремы для распределений сумм независимых случайных векторов// Теор. вероят. примен. — 1984. — *29*, № 2. — С. 360–366.
72. *Нагаев А. В.* Некоторые замечания по поводу многомерных локальных предельных теорем// Мат. заметки. — 1973. — *14*, № 4. — С. 559–563.
73. *Олвер Ф.* Таблицы нулей функции Бесселя. — М.: ВЦ АН СССР, 1967.
74. *Паулаускас В. И.* Одна теорема о скорости сходимости в центральной предельной теореме// Лит. мат. сб. — 1971. — *2*, № 1. — С. 173–179.
75. *Паулаускас В. И.* Оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме для разнораспределенных слагаемых// Лит. мат. сб. — 1972. — *12*, № 4. — С. 183–194.
76. *Паулаускас В. И.* Об одном усилении теоремы Ляпунова// Лит. мат. сб. — 1969. — *9*, № 2. — С. 323–328.
77. *Паулаускас В. И., Рачкаускас А. Ю.* Точность аппроксимации в центральной предельной теореме в банаховых пространствах. — Вильнюс: Мокслас, 1987.

78. *Петров В. В.* Об оценке функции концентрации суммы независимых случайных величин// Теор. вероят. примен. — 1970. — *15*, № 4. — С. 718–721.
79. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. — М.: Наука, 1987.
80. *Постников А. Г.* Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Наука, 1971.
81. *Прохоров Ю. В.* Асимптотическое поведение биномиального распределения// Усп. мат. наук. — 1953. — *8*, № 3 (55). — С. 135–142.
82. *Прохоров Ю. В.* Некоторые уточнения теоремы Ляпунова// Изв. АН СССР. — 1952. — *16*. — С. 281–292.
83. *Прохоров Ю. В.* Экстремальные задачи в предельных теоремах// Тр. VI Всесоюз. совещ. по теории вероятностей и математической статистике. — Вильнюс, 1962.
84. *Прохоров Ю. В.* Об одной локальной теореме// в кн.: Предельные теоремы теории вероятностей. — Ташкент, 1963. — С. 75–80.
85. *Прохоров Ю. В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. — М.: Мат. ин-т им. В. А. Стеклова, 1952.
86. *Прохоров Ю. В.* О локальной предельной теореме для решетчатых распределений// Докл. АН СССР. — 1954. — *98*, № 4. — С. 535–538.
87. *Прохоров Ю. В.* Многомерные распределения: неравенства и предельные теоремы// Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Мат. статистика. Теор. кибернетика. — 1972. — *10*. — С. 5–24.
88. *Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А.* Теория вероятностей. — М.: Наука, 1973.
89. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. — М.: Наука, 1981.
90. *Рауделюнас А. К* О многомерной локальной предельной теореме// Лит. мат. сб. — 1964. — *4*, № 1. — С. 141–145.
91. *Рогозин Б. А.* Об одной оценке функции концентрации// Теор. вероят. примен. — 1961. — *6*, № 1. — С. 103–105.
92. *Рогозин Б. А.* Об увеличении рассеивания сумм независимых величин// Теор. вероят. примен. — 1961. — *6*, № 1. — С. 106–108.
93. *Рогозин Б. А.* Оценка максимума свертки ограниченных плотностей// Теор. вероят. примен. — 1987. — *23*, № 1. — С. 53–61.
94. *Рогозин Б. А.* Неравенство для функций концентраций сверток арифметических распределений с ограниченными плотностями// Теор. вероят. примен. — 1987. — *23*, № 2. — С. 351–355.
95. *Розанов Ю. А.* О локальной предельной теореме для решетчатых распределений// Теор. вероят. примен. — 1957. — *2*, № 2. — С. 275–281.
96. *Розанов Ю. А.* Стационарные случайные процессы. — М.: Физматгиз, 1963.
97. *Ротарь В. И.* Неравномерная оценка скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме// Теор. вероят. примен. — 1970. — *15*, № 4. — С. 648–664.
98. *Ротарь В. И.* О неклассических оценках точности аппроксимации в центральной предельной теореме// Мат. заметки. — 1978. — *23*, № 1. — С. 143–153.
99. *Ротарь В. И.* К обобщению теоремы Линдберга—Феллера// Мат. заметки. — 1975. — *18*, № 1. — С. 129–135.
100. *Ротарь В. И.* О суммировании независимых слагаемых в неклассической ситуации// Усп. мат. наук. — 1982. — *37*, № 6. — С. 137–156.
101. *Ротарь В. И.* Неклассические оценки скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме, I// Теор. вероят. примен. — 1978. — *22*, № 4. — С. 774–790.
102. *Ротарь В. И.* Неклассические оценки скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме, I// Теор. вероят. примен. — 1978. — *23*, № 1. — С. 55–66.
103. *Рышков С. С., Барановский Е. П.* Классические методы теории решетчатых упаковок// Усп. мат. наук. — 1979. — *34*, № 4 (208). — С. 3–63.
104. *Садикова С. М.* Двумерные аналоги неравенства Эссеена с применением к центральной предельной теореме// Теор. вероят. примен. — 1966. — *11*, № 3. — С. 369–380.
105. *Сазонов В. В.* Нормальная аппроксимация в конечномерных и гильбертовых пространствах// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1988. — *182*. — С. 57–67.
106. *Севастьянов Б. А.* Курс теории вероятностей и математической статистики. — М.: Наука, 1982.
107. *Сенатов В. В.* Некоторые равномерные оценки скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме// Теор. вероят. примен. — 1980. — *25*, № 4. — С. 757–770.

108. *Сираждинов С. Х., Азларов Т. А., Зупаров Т. М.* Аддитивные задачи с растущим числом слагаемых. — Ташкент: Фан, 1975.
109. *Скороход А. В.* Элементы теории вероятностей и случайных процессов. — Киев: Вища школа, 1980.
110. *Ушаков Н. Г.* Некоторые неравенства для характеристических функций одновершинных распределений// Теор. вероят. примен. — 1981. — *26*, № 3. — С. 606–609.
111. *Ушаков Н. Г.* Верхние оценки максимальной вероятности для сумм независимых случайных векторов// Теор. вероят. примен. — 1985. — *30*, № 1. — С. 33–43.
112. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. — М.: Мир, 1984.
113. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. — М.: Наука, 1966.
114. *Фрейман Г. А.* Элементарный метод доказательства предельных теорем теории вероятностей// Вестн. Ленинград. ун-та. — 1956. — № 1. — С. 57–73.
115. *Ширяев А. Н.* Вероятность. — М.: Наука, 2011.
116. *Хенгартнер В., Теодореску Р.* Функции концентрации. — М.: Наука, 1980.
117. *Хинчин А. Я.* Предельные законы для сумм независимых случайных величин. — М.-Л.: ОНТИ, 1938.
118. *Хинчин А. Я.* Математические основания статистической механики. — М.-Л.: ОГИЗ, 1943.
119. *Хинчин А. Я.* Математические основания квантовой статистики. — М.-Л.: Гостехиздат, 1951.
120. *Bahr B.* On the central limit theorem in R_k// Ark. Mat. — 1967. — *7*, № 1. — P. 61–69.
121. *Bahr B.* Multi-dimensional integral limit theorems// Ark. Mat. — 1967. — *7*, № 1. — P. 71–88.
122. *Bergström H.* On the central limit theorem in the case of not equally distributed random variables// Scand. Act. J. — 1949. — № 33. — P. 37–62.
123. *Bergström H.* On the central limit theorem in the space R_k, k// Scand. Act. J. — 1945. — № 28. — P. 106–127.
124. *Bergström H.* On the central limit theorem// Scand. Act. J. — 1944. — № 27. — P. 139–153.
125. *Bretagnolle I., Dacuna-Castelle D.* Théorèmes limites à distance finite pour les marches aléatoires// Ann. Inst. H. Poincaré. — 1968. — *4*, № 1. — P. 25–73.
126. *Dvoretzky A., Wolfowitz J.* Sums of random integers reduced modulo m// Duke Math. J. — 1951. — *18*, № 2. — P. 501–507.
127. *Esseen C. G.* Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study the Laplace–Gaussian law// Acta Math. — 1945. — *77*. — P. 1–125.
128. *Gamkrelidze N. G.* On a measure of the smoothness of lattice distribution of random vectors// IV USSR–Japan Symp. on Probability Theory and Mathematical Statistics. Part 1, 1982. — P. 217–218.
129. *Gamkrelidze N. G.* On the function of smoothness and local limit theorem for lattice distribution// V Int. Vilnius Conf. on Probability Theory and Mathematical Statistics — 1989.
130. *Gamkrelidze N. G.* On a local limit theorem for lattice distribution// in: Report/Centrum voor wiskunde en informatica; BS-R9004. — Amsterdam, 1990.
131. *Gamkrelidze N. G.* On a probabilistic property of the Fibonacci sequence// Fibonacci Quart. J. — 1995. — *33*, № 2. — P. 147–152.
132. *Hardy G. H.* Weierstrass non-differentiable functions// Trans. Am. Math. Soc. — 1916. — *17*, № 3. — P. 301–325.
133. *Itatsu S.* Differentiability of Riemann's function// Proc. Jpn. Acad. Sci. — 1981. — *A57*, № 10. — P. 491–495.
134. *Jacod J., Shiryayev A. N.* item Limit theorems for stochastic processes. — Berlin: Springer, 1987.
135. *Kolmogoroff A.* Über das Gesetz des iterierten Logarithmus// Math. Ann. — 1929. — *101*. — P. 126–135.
136. *Kesten H.* A sharper form of the Doeblin–Lévy–Kolmogorov–Rogozin inequality for concentration functions// Math. Scand. — 1969. — *25*. — P. 133–144.
137. *Laplace P. S.* Théorie analytique des probabilités. — Paris, 1812.
138. *Levy P.* Théorie de l'addition des variables aléatoires. — Paris: Gauthier-Villars, 1954.
139. *von Mises R.* Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre anwendung in der Statistik und theoretischen Physik. — Leipzig, 1933.
140. *von Mises R.* Generalizzazione di un theorema sulla probabilita della sorama di un numero illimitato di variabili casuali// Giorn. Ist. Ital. Attuari. — 1934. — *5*, № 4. — P. 483–495.
141. *Moivre A.* The Doctrine of Chances, or A Method of Calculating the Probability of Events in Play. — London, 1718.

142. *Pearson K.* Historical note on the origin of normal curve of errors// Biometrika. — 1924. — *16*, № 3–4. — P. 402–404.
143. *Poisson S. D.* Recherches sur la probabilit'e. — Paris, 1837.
144. *Salem R., Zygmund A.* On lacunary trigonometric series, I// Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. — 1947. — *33*, № 11. — P. 333–338.
145. *Salem R., Zygmund A.* On lacunary trigonometric series, II// Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. — 1948. — *34*, № 2. — P. 54–62.
146. *Sazonov V. V.* Normal Approximation: Some Recent Advances. — Berlin: Springer, 1981.
147. *Stone C. J.* A local limit theorem for non lattice multidimensional distribution functions// Ann. Math. Statist. — 1965. — *36*, № 2. — P. 546–551.
148. *Todhunter I.* History of the Mathematical Theory of Probability from Time of Pascal to That of Laplace. — London: Macmillan, 1865.
149. *Uspensky I. V.* Introduction to Mathematical Probability. — New York: McGraw-Hill, 1937.
150. *Weierstrass K.* Abhandlungen aus der Funktionenlehre. — Berlin, 1866.
151. *Weis M.* The law of iterated logarithm for lacunary trigonometric series// Trans. Am. Math. Soc. — 1959. — *91*, № 3. — P. 531–555.
152. *Wintner A.* Cauchy's stable distribution and an explicit formula of Mellin// Am. J. Math. — 1956. — *78*, № 3. — P. 819–861.
153. *Zolotarev V. M.* Théorèmes limites généraux pour les sommes de variables aléatoires indépendantes// C. R. Acad. Sci. — 1970. — *270*, № 14. — P. A899–A902.
154. *Zygmund A.* Smooth functions// Duke Math. J. — 1945. — *12*, № 1. — P. 47–76.

Гамкрелидзе Николай Георгиевич
Всероссийский институт научной и технической информации
Российской академии наук (ВИНИТИ РАН), Москва
E-mail: math@viniti.ru