ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 207 (2022). С. 3–9
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-207-3-9

УДК 517.95

КРАЕВЫЕ И ВНЕШНИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА НА НЕКОМПАКТНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

© 2022 г. **К. А. БЛИЗНЮК, Е. А. МАЗЕПА**

Аннотация. В работе изучаются вопросы существования и принадлежности к заданному функциональному классу решений уравнений Пуассона на некомпактном римановом многообразии M без края. Для описания асимптотического поведения решения вводится понятие φ-эквивалентности на множестве непрерывных на римановом многообразии функций и устанавливается взаимосвязь между разрешимостью краевых задач для уравнений Пуассона на многообразии M и вне некоторого компактного подмножества $B \subset M$ с тем же ростом «на бесконечности». При этом понятие φ-эквивалентности непрерывных функций на M позволяет оценить скорость асимптотической сходимости решений краевой и внешней краевой задач к граничным данным.

***Ключевые слова*:** краевая задача, уравнение Пуассона, некомпактное риманово многообразие, асимптотическое поведение.

BOUNDARY AND OUTER BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR THE POISSON EQUATION ON NONCOMPACT RIEMANNIAN MANIFOLDS

© 2022 **K. A. BLIZNYUK, E. A. MAZEPA**

Abstract. In this paper, we examine the existence of solutions of the Poisson equations on a noncompact Riemannian manifold M without boundary. To describe the asymptotic behavior of a solution, we is introduce the notion of φ-equivalence on the set of continuous functions on a Riemannian manifold and establish a relationship between the solvability of boundary-value problems for the Poisson equations on the manifold M and outside some compact subset $B \subset M$ with the same growth “at infinity.” Moreover, the notion of φ-equivalence of continuous functions on M allows one to estimate the rate of asymptotic convergence of solutions of boundary-value and outer boundary-value problems to boundary data.

***Keywords and phrases*:** boundary-value problem, Poisson equation, noncompact Riemannian manifold, asymptotic behavior.

***AMS Subject Classification*:** 31C12

1. Введение. Данная статья посвящена исследованию асимптотического поведения решений уравнения Пуассона на некомпактном римановом многообразии без края. Подобного рода задачи часто возникают в классификационной теории некомпактных римановых поверхностей и многообразий (см. [22]). Для некомпактной римановой поверхности хорошо известная задача идентификации конформного типа может быть сформулирована следующим образом: существует ли

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (государственное задание № 0633-2020-0003).

на этой поверхности нетривиальная положительная супергармоническая функция? Именно это свойство послужило основой для расширения понятия параболичности для произвольных некомпактных римановых многообразий. В работе [3] показано, что параболичность типа полного риманова многообразия эквивалентна тому, что емкость любого его компактного подмножества равна нулю. Кроме того, емкостная методика показала высокую эффективность при изучении поведения решений эллиптических уравнений и неравенств на некомпактных римановых многообразиях (см. [1,2,5,14]). Было показано, что отличительным свойством многообразий параболического типа является выполнение для них теоремы Лиувилля, утверждающей, что всякая положительная супергармоническая функция на данном многообразии является тождественной постоянной.

С другой стороны, оказалось, что класс многообразий, на которых существуют нетривиальные решения различных эллиптических уравнений, достаточно широк. Например, в работах [12,13,21,23] были найдены условия, обеспечивающие разрешимость задачи Дирихле с непрерывными граничными данными «на бесконечности» для гармонических функций на некоторых некомпактных многообразиях, допускающих естественную геометрическую компактификацию. Аналогичные вопросы для ограниченных решений стационарного уравнения Шредингера изучались в [9,10]).

Заметим, что большая часть статей по данной проблематике посвящена исследованию решений однородных эллиптических уравнений. Однако в последние годы появились первые работы, посвященные изучению асимптотического поведения решений неоднородных эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях (см., например, [8,16,19,20]).

В исследованиях, посвященных разрешимости краевых задач, наряду с вопросом существования решения часто параллельно изучаются вопросы: в каком смысле (в какой метрике) понимать близость решения к граничным данным, с какой скоростью идет сближение (см. [4,7,18]). Также вызывает интерес получение количественных характеристик, оценивающих эту скорость. Данная работа выполнена в указанном направлении. В частности, даны некоторые функциональные оценки скорости приближения решений краевых задач для уравнения Пуассона к своим граничным данным на произвольных некомпактных римановых многообразиях.

2. Основные определения и постановка задачи. Постановка краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений (в частности, задачи Дирихле) на некомпактном римановом многообразии M и в неограниченных областях этого многообразия может оказаться достаточно проблематичной, поскольку неясно, как интерпретировать граничные данные. Естественная геометрическая компактификация некоторых некомпактных римановых многообразий (например, поверхности вращения, псевдосферы и др.), позволяет в этих случаях осуществлять постановку краевых задач аналогично классической постановке задачи Дирихле в ограниченных областях $\mathbb{R}^n$ (см., например, [9,10,12,13,21,23]).

В [11] предложен новый подход к постановке краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений на произвольных некомпактных римановых многообразиях, основанный на рассмотрении классов эквивалентности непрерывных функций на M. Опишем его подробнее.

Пусть M — произвольное гладкое связное некомпактное риманово многообразие без края и $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — исчерпание M, т.е. последовательность таких предкомпактных непустых открытых подмножеств в M, что $\overline{B_k} \subset B_{k+1}$ и $M = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$. Всюду далее предполагаем, что границы ∂B_k являются гладкими подмногообразиями.

Обозначим через v_k гармоническую функцию в $B_k \setminus B$, удовлетворяющую условиям $v_k|_{\partial B} = 1$, $v_k|_{\partial B_k} = 0$. Используя принцип максимума для гармонических функций, легко показать, что последовательность v_k равномерно ограничена на любом компактном подмножестве в $M \setminus B$. Более того, при $k \to \infty$ она монотонно возрастает и, следовательно, сходится на $M \setminus B$ к гармонической функции

$$v = \lim_{k\to\infty} v_k$$

и удовлетворяет условиям $0 < v \leqslant 1$, $v|_{\partial B} = 1$. Функция v не зависит от выбора исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ и является емкостным потенциалом компакта B относительно многообразия M (см. также [2,11]).

Определение 1 (см. [2]). Многообразие M будем называть многообразием *параболического типа*, если для некоторого компакта B его емкостный потенциал тождественно равен 1. Многообразие, на котором существует нетривиальный емкостный потенциал v, будем называть многообразием *непараболического типа.*

Определение 2 (см. [11]). Непрерывные функции f_1 и f_2 будем называть *эквивалентными* на M (обозначение $f_1 \sim f_2$), если для некоторого исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ многообразия M имеем

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{M\setminus B_k} |f_1 - f_2| = 0.$$

Замечание 1. Это отношение эквивалентности характеризует асимптотическое поведение функций вне произвольного компактного подмножества $B \subset M$ и обеспечивает приближение функций друг к другу на «бесконечности» в равномерной норме. Ясно, что если изменить значения функции f на компакте B, то вновь полученная функция будет эквивалентна исходной.

С помощью такого подхода была установлена взаимосвязь между разрешимостью краевых задач и разрешимостью внешних краевых задач для стационарного уравнения Шредингера на некомпактном римановом многообразии (см. [11]). Аналогичный результат для неоднородных эллиптических уравнений был получен в [16].

Описанный выше подход был развит в дальнейшем в ряде работ. В частности, в работах [6, 15] было введено понятие слабой эквивалентности решений однородных эллиптических уравнений и получена некоторая оценка скорости асимптотической сходимости этих решений к граничным данным в терминах слабой эквивалентности. В работе [17] было введено понятие φ-эквивалентности (где $\varphi > 0$ — непрерывная на M функция, $\varphi \sim 0$) и исследовано асимптотическое поведение решений краевых и внешних краевых задач для уравнения Лапласа—Бельтрами в терминах φ-эквивалентности.

В данной статье исследуются вопросы существования и принадлежности к заданному функциональному классу решений $u \in C^2(M)$ уравнения Пуассона

$$\Delta u = g(x), \tag{1}$$

где $g \in C^{0,\alpha}(M)$, $0 < \alpha < 1$ на некомпактном римановом многообразии M на основе понятия φ-эквивалентности.

Пусть $B \subset M$ — произвольное связное предкомпактное подмножество с гладкой границей и $B \subset B_k$ для всех k, $\varphi > 0$ — такая непрерывная на M функция, что $\varphi \sim 0$. Из определения 2 эквивалентных функций следует, что функция φ будет ограничена на M.

Определение 3 (см. также [17]). Будем говорить, что непрерывные функции f_1 и f_2 *φ-эквивалентны на M* и обозначать $f_1 \overset{\varphi}{\sim} f_2$, если существует такая константа $C > 0$, что

$$|f_1(x) - f_2(x)| \leqslant C \cdot \varphi(x),$$

для любого $x \in M$.

Легко показать, что введенное отношение является отношением эквивалентности и разбивает множество всех непрерывных на M функций на классы эквивалентности. Будем обозначать класс φ-эквивалентных f функций через $[f]_\varphi$.

Отношение φ-эквивалентности также как и отношение эквивалентности характеризует поведение функций вне произвольного компактного подмножества $B \subset M$, и если изменить значения функции f на компакте B, то вновь полученная функция будет φ-эквивалентна исходной. Ясно также, что если $f_1 \overset{\varphi}{\sim} f_2$, то $f_1 \sim f_2$.

Определение 4 (см. также [17]). Будем говорить, что для уравнения (1) на M *разрешима краевая задача с граничными условиями из класса* $[f]_\varphi$, если на M существует такое решение $u(x)$ уравнения (1), что $u \in [f]_\varphi$.

Определение 5 (см. [17]). Будем говорить, что для уравнения (1) на $M \setminus B$ *разрешима внешняя краевая задача с граничными условиями из класса* $[f]_\varphi$, если для любой непрерывной на ∂B функции $\Phi(x)$ на $M \setminus B$ существует такое решение $u(x)$ уравнения (1), что $u \in [f]_\varphi$ и $u|_{\partial B} = \Phi|_{\partial B}$.

Таким образом, понятие φ-эквивалентности, с одной стороны, обобщает понятия эквивалентности, а с другой стороны, позволяет более точно оценить скорость асимптотического приближения решения краевой задачи к граничным условиям.

В [17] также были доказаны некоторые свойства φ-эквивалентных функций, в частности, получен принцип сравнения и теорема единственности для решений краевых и внешних краевых задач для уравнения Лапласа—Бельтрами с граничными данными из класса $[f]_\varphi$.

Теорема 1 (принцип сравнения, [17]). *Пусть $\Delta w \leqslant \Delta u$ на $M \setminus B$, $w|_{\partial B} \geqslant u|_{\partial B}$ и $w \overset{\varphi}{\sim} u$. Тогда $w \geqslant u$ на $M \setminus B$. Пусть $\Delta w \leqslant \Delta u$ на M и $w \overset{\varphi}{\sim} u$. Тогда $w \geqslant u$ на M.*

Теорема 2 (теорема единственности, [17]). *Пусть $\Delta w = \Delta u$ на $M \setminus B$, $w|_{\partial B} = u|_{\partial B}$ и $w \overset{\varphi}{\sim} u$, тогда $w = u$ на $M \setminus B$. Пусть $\Delta w = \Delta u$ на M и $w \overset{\varphi}{\sim} u$, тогда $w = u$ на M.*

Доказательство этих теорем основано на классических утверждениях теории уравнений с частными производными: принципе максимума, теоремах сравнения и единственности для линейных эллиптических дифференциальных уравнений (подробнее см. в [17]).

3. Основной результат. Следующая теорема устанавливает взаимосвязь между разрешимостью краевой и внешней краевой задачами с граничными условиями из класса $[f]_\varphi$ для уравнения Пуассона на некомпактном римановом многообразии.

Теорема 3. *Пусть M — произвольное гладкое связное некомпактное риманово многообразие, $B \subset M$ произвольное связное предкомпактное подмножество с гладкой границей ∂B, f — непрерывная на M функция. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *На $M \setminus B$ для уравнения* (1) *разрешима внешняя краевая задача с граничными условиями из класса $[f]_\varphi$,*

(ii) *На непараболическом многообразии M для уравнения* (1) *разрешима краевая задача с граничными условиями из класса $[f]_\varphi$.*

Доказательство. Докажем импликацию (i)⇒(ii).

Пусть u_0 решение внешней краевой задачи для уравнения Пуассона из условий п. (i) данной теоремы. Рассмотрим функцию $U = u_0 \cdot \zeta$, где ζ — такая гладкая функция на M, что $\zeta = 0$ на предкомпактном множестве $B' \subset B$ и $\zeta = 1$ вне $\overline{B}$. Тогда $U \in C^{2,\alpha}(M)$ и $\Delta U = \Delta(u_0 \cdot \zeta) = g^*$, где $g^* \in C^{0,\alpha}(M)$, $g^*(x) = 0$ на B', $g^*(x) = g(x)$ вне $\overline{B}$.

Рассмотрим теперь последовательность функций ζ_k — решений задач

$$\Delta \zeta_k = g \quad \text{в} \quad B_k, \quad \zeta_k|_{\partial B_k} = u_0|_{\partial B_k}$$

и последовательность функций $\psi_k = \zeta_k - U$. Для этих функций имеем

$$\Delta \psi_k = g - g^* \quad \text{в} \quad B_k, \quad \psi_k|_{\partial B_k} = 0.$$

Далее покажем, что многообразие M является непараболическим, т.е. на $M \setminus B$ существует нетривиальный емкостный потенциал. Для этого рассмотрим функции v_1 и v_2 — решения следующих внешних краевых задач:

$$\begin{cases} \Delta v_1 = g \quad \text{в} \quad M \setminus B, \\ v_1|_{\partial B} = 1, \\ v_1 \in [f]_\varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta v_2 = g \quad \text{в} \quad M \setminus B, \\ v_2|_{\partial B} = 2, \\ v_2 \in [f]_\varphi \end{cases}.$$

Существование этих функций следует из условия п. (i) теоремы. Тогда разность $v = v_2 - v_1$ является по теореме единственности нетривиальным емкостным потенциалом на $M \setminus B$, так как для гармонической на $M \setminus B$ функции v выполнены следующие условия $0 < v \leqslant 1$, $v|_{\partial B} = 1$.

На каждом множестве B_k существует функция Грина, т.е. такая функция $G_k(x, y)$, что

$$\Delta_x G_k(x, y) = -\delta_y(x), \quad G_k|_{x \in \partial B_k} = 0$$

для любого $y \in B_k$, где $\delta_y(x)$ — δ-функция Дирака. По формуле Грина в B_k, имеем

$$\psi_k(x) = -\int\limits_{B_k} G_k(x,y)(g(y) - g^*(y))dy.$$

Непараболичность многообразия M влечет существование конечной функции Грина

$$G(x,y) = \lim_{k\to\infty} G_k(x,y)$$

на всем M, что в свою очередь влечет существование предела последовательности $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Пусть

$$\psi = \lim_{k\to\infty} \psi_k,$$

тогда $\Delta\psi = g - g^*$ на M (см. также [2]).

Покажем, что $\psi \in [0]_\varphi$. В силу непрерывности функции $\psi(x)$ существует

$$A^* = \max_{\partial B} |\psi(x)|.$$

Очевидно, что

$$-(A^*+1) \leqslant \psi|_{\partial B} \leqslant A^* + 1$$

и для любого достаточно большого номера k

$$-(A^*+1) \leqslant \psi_k|_{\partial B} \leqslant A^* + 1.$$

Рассмотрим функции $u_1 = -(A^*+1)v$ и $u_2 = (A^*+1)v$ на $M \setminus B$, где v — емкостный потенциал подмножества B, $v \in [0]_\varphi$. Функции u_1 и u_2 являются гармоническими функциями на $M \setminus B$ и удовлетворяют условиям

$$u_1|_{\partial B} = -(A^*+1), \quad -(A^*+1) \leqslant u_1 \leqslant 0, \quad u_1 \in [0]_\varphi,$$
$$u_2|_{\partial B} = A^*+1, \quad 0 \leqslant u_2 \leqslant A^*+1, \quad u_2 \in [0]_\varphi.$$

Тогда $u_1 \leqslant u_2$ на $M \setminus B$ и, по принципу сравнения для гармонических функций на $B_k \setminus B$ для любого достаточно большого номера k выполнены неравенства

$$u_1 \leqslant \psi_k \leqslant u_2.$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$, получим $u_1 \leqslant \psi \leqslant u_2$. Учитывая, что $u_1 \overset{\mathcal{L}}{\sim} u_2 \overset{\mathcal{L}}{\sim} 0$, имеем $\psi \in [0]_\varphi$.

Из существования функции

$$\psi = \lim_{k\to\infty} \psi_k$$

следует существование предельной функции

$$u = \lim_{k\to\infty} \zeta_k = \lim_{k\to\infty}(\psi_k + U) = \psi + U,$$

причем $\Delta u = \Delta\psi + \Delta U = g - g^* + g^* = g$ на M и на $M \setminus B$ выполнено

$$|u - f| = |\psi + U - f| = |\psi + u_0 - f| \leqslant |\psi| + |u_0 - f| \leqslant C_1\varphi + C_2\varphi = C\varphi,$$

отсюда $u \overset{\mathcal{L}}{\sim} u_0 \overset{\mathcal{L}}{\sim} f$. Первая часть теоремы доказана.

Докажем импликацию (ii)$\Rightarrow$(i). Пусть теперь u_0 — решение краевой задачи для уравнения Пуассона на всем M из условий п. (ii) данной теоремы. Сначала покажем, что для каждой непрерывной на ∂B функции Φ существует такая гармоническая функция w на $M \setminus B$, что $w|_{\partial B} = \Phi$ и $w \in [0]_\varphi$. Рассмотрим последовательность функций w_k, являющихся решением следующих краевых задач:

$$\begin{cases} \Delta w_k = 0 \text{ в } B_k \setminus B, \\ w_k|_{\partial B} = \Phi(x), \\ w_k|_{\partial B_k} = \varphi(x). \end{cases}$$

По принципу максимума для гармонических функций для каждого k имеем

$$|w_k| \leqslant \sup_{\partial(B_k \setminus B)} |w_k| \leqslant \sup_{\partial B} |\Phi| + \sup_{M\setminus B} \varphi,$$

т.е. последовательность $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно ограничена на $M \setminus B$ и, следовательно, компактна в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций на каждом компактном подмножестве в $M \setminus B$ (см., например, [7, с. 37]). Пусть

$$w = \lim_{k\to\infty} w_k$$

— предельная функция. Ясно, что w — гармоническая функция и $w|_{\partial B} = \Phi$.

Как и в [17] можно показать, что $w \in [0]_\varphi$, т.е. для некоторой константы $C > 0$ выполнено $|w(x)| \leqslant C\varphi(x)$, для любого $x \in M \setminus B$. Так как

$$w = \lim_{k\to\infty} w_k,$$

то достаточно показать, что $|w_k(x)| \leqslant C\varphi(x)$, для любого $x \in B_k \setminus B$.

Пусть сначала $x \in \partial B_k$. Так как $w_k|_{\partial B_k} = \varphi|_{\partial B_k}$, то неравенство $|w_k(x)| \leqslant C\varphi(x)$ выполнено при $C \geqslant 1$. Если же $x \in \partial B$, то $w_k|_{\partial B} = \Phi|_{\partial B}$. Покажем, что $|w_k(x)| \leqslant C^*\varphi(x)$, где константа

$$C^* = \frac{\max_{\partial B} |\Phi(x)|}{\min_{\partial B} \varphi(x)}.$$

Действительно, в силу непрерывности функций $\Phi(x)$ и $\varphi(x) > 0$ на ∂B выполнено

$$|w_k| = |\Phi(x)| \leqslant \max_{\partial B} |\Phi(x)| \cdot 1 \leqslant \max_{\partial B} |\Phi(x)| \frac{\varphi(x)}{\min_{\partial B} \varphi(x)} \leqslant \varphi(x) \frac{\max_{\partial B} |\Phi(x)|}{\min_{\partial B} \varphi(x)} = C^*\varphi(x).$$

Тогда согласно принципу максимума для гармонических функций в $B_k \setminus B$ имеем

$$|w_k(x)| \leqslant C^{**}\varphi(x), \quad \text{где} \quad C^{**} = \max\{C^*, 1\}.$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$ в последнем неравенстве, получаем, что выполнено $w \in [0]_\varphi$.

Далее, возьмем $u_0 \in [f]_\varphi$ — решение краевой задачи для уравнения Пуассона на M, и рассмотрим непрерывную на ∂B функцию $\Phi^* = u_0 - \Phi$, где Φ — произвольная непрерывная на ∂B функция из определения краевой задачи. Как доказано выше, на $M \setminus B$ существует такая гармоническая функция w, что $w|_{\partial B} = \Phi^*$ и $w \in [0]_\varphi$. Тогда функция $u = u_0 - w$ будет искомым решением внешней краевой задачи на $M \setminus B$ с граничными условиями из класса $[f]_\varphi$. Действительно,

$$\Delta(u_0 - w) = g, \quad (u_0 - w)|_{\partial B} = u_0|_{\partial B} - (u_0 - \Phi)|_{\partial B} = \Phi.$$

Кроме того, на $M \setminus B$ выполнено неравенство $|u - f| = |u_0 - w - f| \leqslant |u_0 - f| + |w| \leqslant (C + C^{**})\varphi$, где C и C^{**} некоторые положительные константы. Следовательно, по определению $u \in [f]_\varphi$. Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Григорьян А. А., Лосев А. Г.* О размерности пространств решений стационарного уравнения Шредингера на некомпактных римановых многообразиях// Мат. физ. компьют. модел. — 2017. — *20*, № 3. — С. 34–42.
2. *Григорьян А. А., Надирашвили Н. С.* Лиувиллевы теоремы и внешние краевые задачи// Изв. вузов. Мат. — 1987. — № 5. — С. 25—33.
3. *Григорьян А. А.* О существовании положительных фундаментальных решений уравнения Лапласа на римановых многообразиях// Мат. сб. — 1985. — *128*, № 3. — С. 354–363.
4. *Гущин А. К.* Некоторое усиление свойства внутренней непрерывности по Гельдеру решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка// Теор, мат. физ. — 2008. — *157*, № 3. — С. 345–363.
5. *Кесельман В. М.* Понятия и критерии емкостного типа некомпактного риманового многообразия на основе обобщенной емкости// Мат. физ. компьют. модел. — 2019. — *22*, № 2. — С. 21–32.
6. *Корольков С. А.* О разрешимости краевых задач для стационарного уравнения Шредингера в неограниченных областях римановых многообразий// Диффер. уравн. — 2015. — *51*, № 6. — С. 726–732.
7. *Ландис Е. М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. — М.: Наука, 1971.
8. *Лосев А. Г.* О разрешимости задачи Дирихле для уравнения Пуассона на некоторых некомпактных римановых многообразиях// Диффер. уравн. — 2017. — *53*, № 12. — С. 1643–1652.

9. *Лосев А. Г., Мазепа Е. А.* Об асимптотическом поведении решений некоторых уравнений эллиптического типа на некомпактных римановых многобразиях// Изв. вузов. Мат. — 1999. — № 6. — С. 41–49.
10. *Лосев А. Г., Мазепа Е. А.* Ограниченные решения уравнения Шредингера на римановых произведениях// Алгебра и анализ. — 2001. — *13*, № 1. — С. 84–110.
11. *Мазепа Е. А.* Краевые задачи для стационарного уравнения Шрёдингера на римановых многообразиях// Сиб. мат. ж. — 2002. — *43*, № 3. — С. 591–599.
12. *Ancona A.* Negative curved manifolds, elliptic operators, and the Martin boundary// Ann. Math. (2). — 1987. — *125*, № 3. — P. 495–536.
13. *Anderson M. T.* The Dirichlet problem at innity for manifolds of negative curvature// J. Differ. Geom. — 1983. — *18*. — P. 701–721.
14. *Grigor'yan A.* Analitic and geometric background of recurence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds// Bull. Am. Math. Soc. — 1999. — *36*. — P. 135–249.
15. *Korolkov S. A., Losev A. G.* Generalized harmonic functions of Riemannian manifolds with ends// Math. Z. — 2012. — *272*, № 1–2. — P. 459–472.
16. *Losev A. G., Mazepa E. A.* On solvability of the boundary value problems for the inhomogeneous elliptic equations on noncompact Riemannian manifolds// Probl. Anal. Issues Anal. — 2018. — *7 (25)*. — P. 101–112.
17. *Losev A. G., Mazepa E. A.* On solvability of the boundary value problems for harmonic function on noncompact Riemannian manifolds// Probl. Anal. Issues Anal. — 2019. — *8 (26)*, № 3. — P. 73–82.
18. *Losev A., Mazepa E., Romanova I.* Eigenfunctions of the Laplace operator and harmonic functions on model Riemannian manifolds// Lobachevskii J. Math. — 2020. — *41*, № 11. — P. 2190–2197.
19. *Mastrolia P., Monticelli D. D., Punzo F.* Elliptic and parabolic equations with Dirichlet conditions at infinity on Riemannian manifolds// Adv. Differ. Equations. — 2018. — *23*, № 1/2. — P. 89–108.
20. *Munteanu O., Sesum N.* The Poisson equation on complete manifolds with positive spectrum and applications// Adv. Math. — 2010. — *223*. — P. 198–219.
21. *Murata M.* Positive harmonic functions on rotationary symmetric Riemannian manifolds// Proc. Int. Conf. on Potential Theory (Nagoya (Japan), August 30 – September 4, 1990). — Berlin–New York: De Gruyter, 1991. — P. 251–260.
22. *Sario L., Nakai M., Wang C., Chang L. O.* Classification Theory of Riemannian Manifolds. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1977.
23. *Sullivan D.* The Dirichlet problem at innity for a negatively curved manifold// J. Differ. Geom. — 1983. — *18*. — P. 723–732.

Близнюк Кристина Алексеевна
Волгоградский государственный университет
E-mail: `bliznjukka@volsu.ru`

Мазепа Елена Алексеевна
Волгоградский государственный университет
E-mail: `elena.mazepa@volsu.ru`