ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 207 (2022). С. 16–26
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-207-16-26

УДК 517.95

ГИПЕРБОЛИЧНОСТЬ КЛАССА КВАЗИЛИНЕЙНЫХ КОВАРИАНТНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ДИВЕРГЕНТНОГО ТИПА

© 2022 г. Ю. П. ВИРЧЕНКО, А. Э. НОВОСЕЛЬЦЕВА

Аннотация. Рассмотрен специальный класс систем квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка. Рассматриваемые системы имеют дивергентный тип, инвариантны относительно трансляций времени и пространства, а также преобразуется ковариантным образом при преобразованиях группы вращений пространства. Приведено описание класса нелинейных дифференциальных операторов первого порядка, соответствующих системам рассматриваемого класса. Доказана теорема об эквивалентности понятий гиперболичности и гиперболичности по Фридрихсу.

Ключевые слова: дифференциальный оператор первого порядка, квазилинейная система уравнений, гиперболичность, векторное поле, ковариантность, дивергентность, плотность потока поля, симметричный тензор.

HYPERBOLICITY OF A CLASS OF FIRST-ORDER QUASILINEAR COVARIANT EQUATIONS OF DIVERGENT TYPE

© 2022 Yu. P. VIRCHENKO, A. E. NOVOSELTSEVA

Abstract. A special class of systems of first-order quasilinear partial differential equations is considered. These divergent-type systems are invariant under time and space translations; they are transformed covariantly under the action of the rotation group. We give a description of the class of nonlinear first-order differential operators corresponding to the systems of the considered class and prove a theorem on the equivalence of the concepts of hyperbolicity and hyperbolicity in the sense of Friedrichs.

Keywords and phrases: first-order differential operator, quasilinear system, hyperbolicity, vector field, covariance, divergence, field flux density, symmetric tensor.

AMS Subject Classification: 35L02

1. Введение. Распределенные физические системы описываются полями $\mathsf{a}(\boldsymbol{x},t)$ на $\mathbb{R}^3$, $t\in\mathbb{R}$ — временной параметр, которые принимают значения в $\mathbb{R}^n$, $n\in\mathbb{N}^n$. Обычно математическим инструментом, посредством которого решается задача описания изменения со временем этих полей, являются системы дифференциальных уравнений с частными производными «эволюционного типа», которые имеют вид

$$\dot{\mathsf{a}}(\boldsymbol{x},t)=(\mathsf{L}[\mathsf{a},\boldsymbol{x},t])(\boldsymbol{x},t), \tag{1}$$

где $\mathsf{L}[\cdot,\boldsymbol{x},t]$ — некоторый зависящий от параметра t, вообще говоря, нелинейный дифференциальный оператор по $\boldsymbol{x}$, действующий в пространстве достаточное число раз непрерывно дифференцируемых полей. Поэтому такие системы уравнений являются объектом исследования в математической физике.

С точки зрения физических приложений, ввиду того, что замкнутые физические системы обладают т. н. фундаментальными симметриями — однородности и изотропности, наибольший интерес представляют дифференциальные операторы первого порядка, которые генерируют эволюционные уравнения (1), обладающие такими же симметриями (см. по этому поводу, например, [8, 9]). Применяемый в настоящей работе подход для изучения уравнений (1), обладающих фундаментальными симметриями, использовался нами в работах [1–4].

Во-первых, уравнения (1) должны быть инвариантны относительно сдвигов начала отсчета времени $t \Rightarrow t+s$, $s \in \mathbb{R}$. В этом случае дифференциальные операторы $\mathsf{L}[\cdot, \boldsymbol{x}, t]$ должны обладать свойством $\mathsf{L}[\mathsf{a}, \boldsymbol{x}, t+s] = \mathsf{L}[\mathsf{a}, \boldsymbol{x}, t]$, $s \in \mathbb{R}$ и, очевидно, что требование инвариантности относительно сдвига времени приводит к независимости коэффициентов оператора от t, $\mathsf{L}[\cdot, \boldsymbol{x}, t] \equiv \mathsf{L}[\cdot, \boldsymbol{x}]$. Во-вторых, уравнения должны быть инвариантны относительно пространственных сдвигов $\boldsymbol{x} \Rightarrow \boldsymbol{z} + \boldsymbol{x}$, т.е. $\mathsf{L}[\cdot, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}, t] = \mathsf{L}[\cdot, \boldsymbol{x}]$ для любого $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$. Таким образом, требование пространственной однородности приводит к тому, что коэффициенты оператора $\mathsf{L}[\cdot]$ не зависят явно от $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$.

Наконец, фундаментальной симметрией физической системы является инвариантность ее относительно поворотов пространства $\mathbb{R}^3$. Требование симметрии такого рода для уравнений (1) с операторами $\mathsf{L}[\cdot]$, не зависящими явно от t и $\boldsymbol{x}$, означает ковариантность этих уравнений относительно действия преобразований группы $\mathbb{O}_3$. В свою очередь, это требование ковариантности приводит к тому, что набор полей $\mathsf{a}(\boldsymbol{x}, t)$ должен преобразовываться по представлению $\mathcal{U}$ группы $\mathbb{O}_3$ (см., например, [13]) и при этом набор полей $\mathsf{L}[\mathsf{a}]$ преобразуется по этому же представлению. Таким образом, обозначив посредством $\mathsf{L}^{(\mathcal{A})}[\cdot]$ дифференциальный оператор, преобразованный в результате поворота пространства $\mathbb{R}^3$ матрицей $\mathcal{A} \in \mathbb{O}_3$, требование ковариантности уравнения (1) приводит к тому, что оператор $\mathsf{L}[\cdot]$ обладает свойством $\mathsf{L}^{(\mathcal{A})}[\mathcal{U}\mathsf{a}] = \mathcal{U}\mathsf{L}[\mathsf{a}]$.

Сформулированное свойство ковариантности уравнения (1) накладывает уже довольно значительные ограничения на общий вид операторов $\mathsf{L}[\cdot]$ и, в связи с этим, возникает важная, с точки зрения физических приложений, задача (см. по этому поводу [4]) об описании классов допустимых дифференциальных уравнений (1). Так как неприводимые представления группы $\mathbb{O}_3$ образуют бесконечную серию спин-тензорных представлений (см. [13]), то такая задача оказывается все же довольно необозримой, даже при ограничении порядка операторов $\mathsf{L}[\cdot]$, например, не выше второго. Поэтому важно, на первом этапе, изучить допустимые операторы, когда поля $\mathsf{a}(\boldsymbol{x}, t)$ преобразуются по простейшим неприводимым представлениям, а именно, когда значения поля $\mathsf{a}(\boldsymbol{x}, t)$ являются векторами или тензорами второго ранга в $\mathbb{R}^3$.

В дальнейшем будем мыслить системы (1) как уравнения в подходящем функциональном пространстве. В настоящей работе рассматриваем эволюционные уравнения вида (1) с дифференциальными операторами $\mathsf{L}[\cdot]$ первого порядка. Поэтому далее предполагаем, что поля $\mathsf{a}(\boldsymbol{x}, t)$ непрерывно дифференцируемы. Кроме того, так как мы не касаемся вопроса о существовании решений конкретных начально-краевых задач, связанных с уравнениями (1), то в качестве функционального пространства, на котором действуют операторы $\mathsf{L}[\cdot]$, выбираем самое широкое из возможных пространств, на которых разумно их изучение, а именно, $C^n_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$. Опишем общий вид дифференциальных операторов первого порядка, обладающих описанными выше свойствами симметрии, в том случае, когда поле $\mathsf{a}(\boldsymbol{x}, t)$ представляется векторным полем $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$, а сами операторы $\mathsf{L}[\cdot]$ имеют дивергентный тип. Результат действия каждого такого оператора $\mathsf{L}[\cdot]$ на поле $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ также представляет собой векторное поле $\mathsf{L}[\boldsymbol{u}]$. Вводя покомпонентное описание векторного поля $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \langle u_j(\boldsymbol{x}, t); j = 1, 2, 3\rangle$ и соответствующего ему образа $\mathsf{L}[\boldsymbol{u}] = \langle \mathsf{L}_j[\boldsymbol{u}]; j = 1, 2, 3\rangle$, получаемого в результате действия оператора первого порядка дивергентного типа, запишем

$$\mathsf{L}_j[\boldsymbol{u}] = \nabla_k S_{jk}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)), \quad j = 1, 2, 3, \tag{2}$$

где $\nabla_j \equiv \partial/\partial x_j$, $S_{jk}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t))$; $j, k = 1, 2, 3$ — значение тензор-функции $S_{jk}(\boldsymbol{u})$ для значения поля $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ в фиксированной текущей пространственно временной точке $\langle \boldsymbol{x}, t\rangle$. Это значение представляет собой плотность потока векторного поля $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$. Здесь и далее принимается соглашение тензорной алгебры о суммировании по повторяющимся индексам $k = 1, 2, 3$ (см., например, [15]).

Также не будем делать различия между ковариантными и контравариантными тензорами. Соответственно, уравнение (1) записывается в виде системы уравнений для компонент поля $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$:

$$\dot{u}_j(\boldsymbol{x},t) = (\nabla_k S_{jk}(\boldsymbol{u}))(\boldsymbol{x},t), \quad j=1,2,3. \tag{3}$$

Класс всех дифференциальных операторов $\mathsf{L}[\cdot]$, соответствующих таким уравнениям, будем обозначать как $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$. Описание пространства всех уравнений вида (3) сводится, таким образом, к описанию возможных непрерывно дифференцируемых тензор-функций $S_{jk}(\boldsymbol{u})$ от векторного аргумента $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ и решение этой задачи представляется в разд. 2.

Ковариантность уравнения (2) еще не обеспечивает его «разумность» с точки зрения правильности описания эволюции поля. Корректное описание эволюции возникает в том случае, когда система уравнений (2) является гиперболической (см. разд. 5). В связи с этим основной целью настоящего исследования является выделение в классе $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$ подкласса операторов, соответствующих системам гиперболических уравнений.

2. Класс $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$. Для описания класса $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$ необходимо указать общий вид всех возможных непрерывно дифференцируемых по $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ тензор-функций $S_{jk}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))$ (здесь опущена зависимость от параметра t). Такие функции называются *комитантами* (см. [7]) или *форм-инвариантами* (см. [17]). Их общий вид записывается в виде линейного разложения по *базисным форм-инвариантным функциям* $S^{(r)}_{jk}(\boldsymbol{u})$, порождаемым вектором $\boldsymbol{u}$ с коэффициентами в виде произвольных функций f_r, $r = 1,\ldots,s$, от инвариантов, составляющих т. н. *целый рациональный базис* [17]. Так как вектор $\boldsymbol{u}$ обладает единственным инвариантом $\boldsymbol{u}^2$ относительно группы $\mathbb{O}_3$, то целый рациональный базис состоит только из этого одного инварианта и, следовательно, требуемое линейное разложение имеет вид

$$S_{jk}(\boldsymbol{u}) = \sum_{r=1}^{s} S^{(r)}_{jk}(\boldsymbol{u}) f_r(\boldsymbol{u}^2). \tag{4}$$

Наконец, так как на тензор-функцию $S_{jk}(\boldsymbol{u})$ накладывается условие непрерывной дифференцируемости по $\boldsymbol{u}$, то функции $f_r(\eta)$, $\eta \in \mathbb{R}_+$, должны быть непрерывно дифференцируемы по η при условии непрерывной дифференцируемости по $\boldsymbol{u}$ базисных форм-инвариантных функций $S^{(r)}_{jk}(\boldsymbol{u})$, $r = 1,\ldots,s$.

Так как каждая функция вида (4) может быть представлена в виде предела таких функций, которые представляются полиномами от компонент вектора $\boldsymbol{u}$, то базисные функции $S^{(r)}_{jk}(\boldsymbol{u})$ достаточно построить в виде линейно независимых мономов в тензорной алгебре с одной образующей $\boldsymbol{u}$, определяемых с точностью до произвольного множителя инвариантного относительно преобразований группы $\mathbb{R}^3$. На этом пути получаются только два линейно независимых тензора второго ранга: универсальный тензор δ_{jk} — символ Кронекера и диада $u_j u_k$. Тогда $s = 2$ и, обозначив $f = f_1$, $g = f_2$, разложение (4) запишем в виде

$$S_{jk}(\mathbf{u}) = \delta_{jk} f(\mathbf{u}^2) + u_j u_k g(\mathbf{u}^2). \tag{5}$$

Таким образом, класс всех функций $S_{jk}(\boldsymbol{u})$ и, следовательно, класс $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$ всех операторов $\mathsf{L}[\cdot]$ полностью описывается формулой (5) с парой произвольно выбираемых непрерывно дифференцируемых функций f и g на $\mathbb{R}_+$.

3. Гиперболические системы уравнений первого порядка. В этом разделе будет установлена связь между понятиям гиперболичности систем квазилинейных уравнений первого порядка и связанным с ним понятием гиперболичности по Фридрихсу — так называемой t-гиперболичности, в частности, для систем дивергентного типа.

Сопоставим уравнению (3) следующее линеаризованное уравнение, которому подчиняется векторное поле $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) = \langle v_j(\boldsymbol{x},t); j = 1,2,3\rangle$ при фиксации поля $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$:

$$\dot{v}_j(\boldsymbol{x},t) = \left(\frac{\partial S_{jk}(\boldsymbol{u})}{\partial u_l} \cdot \nabla_k v_l\right)_{\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)} (\boldsymbol{x},t) \tag{6}$$

и сформулируем в его терминах определение понятия гиперболичности.

Определение 1 (см. [14, с. 25]). Уравнение (3) назовем гиперболическим, если в соответствующем ему уравнении (6) матрица $\mathcal{T}$ с матричными элементами

$$T_{jl} = q_k \frac{\partial S_{jk}(\boldsymbol{u})}{\partial u_l}$$

диагонализируема и имеет только вещественные собственные числа $\omega^{(m)}$, $m = 1, 2, 3$, для любого вектора $\boldsymbol{q} = \langle q_j; j = 1, 2, 3\rangle \in \mathbb{R}^3$ и для любого поля $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$.

Учитывая выражение (5) для функции $S_{jk}(\boldsymbol{u})$, выразим явную зависимость матрицы $\mathcal{T}$ от функций f и g

$$T_{jl} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{q})[g\delta_{jl} + 2g' u_j u_l] + g u_j q_l + 2f' q_j u_l, \tag{7}$$

где мы опустили указание аргументов у функций f', g', g. Таким образом, условие гиперболичности уравнения (5) состоит в вещественности корней $\omega^{(m)}$, $m = 1, 2, 3$, кубического уравнения

$$\det(\omega - \mathcal{T}) = 0 \tag{8}$$

относительно ω.

Проверка факта гиперболичности систем квазилинейных уравнений первого порядка в том случае, когда коэффициенты уравнения (8) являются конкретными числами, осуществляется по несложному алгоритму. Наоборот, если коэффициенты зависят от большого числа параметров, которые могут изменяться в широких пределах, и, более того, если коэффициенты являются функционалами от некоторого набора функций, то исследование на гиперболичность уравнения требует установления в области их изменения той подобласти, в которой, действительно, имеет место его гиперболичность. Решение такой задачи может представлять довольно трудоемкую процедуру (см., например, [10–12]). В связи с этим, в таких случаях прибегают к проверке выполнимости более сильного свойства (см. Теорема 1, *Достаточность*), чем гиперболичность, а именно, так называемой t-гиперболичности (гиперболичности по Фридрихсу) (см., например, [6, 16]).

Дадим следующее, несколько модернизированное определение t-гиперболичности уравнения в такой трактовке, которая применима для решения поставленной во введении задачи.

Определение 2. Уравнение (5) назовем t-гиперболическим, если для любого вектора $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^3$ и для любого поля $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ матрица $\mathcal{T}$ диагонализируема и существует такая симметричная положительная матрица $\mathcal{B}$, что матрица $\mathcal{BT}$ симметрична.

Докажем, что определенное таким образом понятие t-гиперболичности эквивалентно понятию гиперболичности, данному в определении 1. (Здесь и далее при формулировке и доказательстве утверждений следуем терминологии монографии [5].)

Теорема 1. *Если матрица $\mathcal{B}$ оператора, действующего в $\mathbb{R}^n$, диагонализируема, то для того чтобы все ее собственные числа $\langle \lambda_1, \ldots, \lambda_n\rangle$ были вещественны, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая симметричная положительная матрица $\mathcal{D}$, для которой матрица $\mathcal{DB}$ симметрична.*

Доказательство. Необходимость. Пусть все собственные числа матрицы $\mathcal{B}$ вещественны. Доказательство существования матрицы $\mathcal{D}$ состоит из следующих пп. 1–5.

1. Пусть вещественная матрица $\mathcal{B}$ представляет оператор в стандартном базисе $\{\mathsf{e}_r^{(0)} \in \mathbb{R}^n;\ r = 1, \ldots, n\}$, $(\mathsf{e}_j^{(0)})_k = \delta_{jk}$, действующий в $\mathbb{R}^n$. Пусть $\langle \xi_1, \ldots, \xi_n\rangle \in \mathbb{R}^n$ — собственный вектор, соответствующий вещественному собственному числу λ. Тогда этот собственный вектор всегда можно выбрать так, чтобы все его компоненты были вещественны. В самом деле, при указанном условии, по крайней мере один из вещественных векторов $\langle \mathrm{Re}(\xi_1), \ldots, \mathrm{Re}(\xi_n)\rangle$, либо $\langle \mathrm{Im}(\xi_1), \ldots, \mathrm{Im}(\xi_n)\rangle$ не равен тождественно нулю и поэтому является собственным вектором, соответствующим тому же самому собственному числу. Тогда, так как вещественная матрица $\mathcal{B}$ диагонализируема и все ее собственные числа $\langle \lambda_1, \ldots, \lambda_n\rangle$ вещественны, то она имеет полный набор собственных векторов $\{\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_n\}$ с вещественными компонентами.

2. В пространстве $\mathbb{R}^n$ для любого базисного набора векторов $\{\mathsf{e}_1, \dots, \mathsf{e}_n\}$ найдется такой неособенный оператор $\mathcal{V}$, что набор векторов $\{\mathcal{V}^{-1}\mathsf{e}_1, \dots, \mathcal{V}^{-1}\mathsf{e}_n\}$ является ортонормированным. Матрица этого оператора может быть построена, например, на основе коэффициентов разложения векторов ортонормированного базиса, получаемого в результате процесса ортогонализации Сонина—Шмидта набора векторов $\{\mathsf{e}_1, \dots, \mathsf{e}_n\}$ по векторам этого набора.

3. Из пп. 1 и 2 следует, что для любой диагонализируемой вещественной матрицы $\mathcal{B}$, все собственные числа которой вещественны, существует такая матрица $\mathcal{V}$, для которой матрица $\mathcal{V}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{V}$ диагонализируема, имеет только вещественные собственные числа и собственные векторы образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$. Это связано с тем, что набор векторов $\{\mathcal{V}^{-1}\mathsf{e}_1, \dots, \mathcal{V}^{-1}\mathsf{e}_n\}$ является ортонормированным и для каждого вектора $\mathcal{V}^{-1}\mathsf{e}_r$, $r = 1, \dots, n$, из этого набора имеет место

$$(\mathcal{V}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{V})\mathcal{V}^{-1}\mathsf{e}_r = \mathcal{V}^{-1}\mathcal{B}\mathsf{e}_r = \lambda_r\mathcal{V}^{-1}\mathsf{e}_r, \quad r = 1, \dots, n,$$

так как векторы $\{\mathsf{e}_1, \dots, \mathsf{e}_n\}$ являются собственными для матрицы $\mathcal{B}$ с собственными числам $\langle\lambda_1, \dots, \lambda_n\rangle$, $\mathcal{B}\mathsf{e}_r = \lambda_r\mathsf{e}_r$.

4. Тогда матрица $\mathcal{C} = \mathcal{V}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{V}$ симметрична, $\mathcal{C}^\top = \mathcal{C}$, как любая матрица, имеющая полный ортонормированный набор собственных векторов с вещественными собственными числами.

5. Следовательно, $(\mathcal{V}^{-1})^\top\mathcal{C}\mathcal{V}^{-1}$ — симметричная матрица. Так как

$$((\mathcal{V}\mathcal{V}^\top)^{-1})^\top = ((\mathcal{V}\mathcal{V}^\top)^\top)^{-1} = (\mathcal{V}\mathcal{V}^\top)^{-1}$$

и $\mathcal{V}\mathcal{V}^\top$ — положительная симметричная матрица, то $\mathcal{D} = (\mathcal{V}\mathcal{V}^\top)^{-1}$ — также положительная симметричная матрица. Тогда

$$\mathcal{D}\mathcal{B} = (\mathcal{V}\mathcal{V}^\top)^{-1}\mathcal{B} = (\mathcal{V}^{-1\top}\mathcal{V}^{-1})\mathcal{B} = \mathcal{V}^{-1\top}\mathcal{C}\mathcal{V}^{-1},$$

откуда следует, что $\mathcal{D}\mathcal{B}$ — симметричная матрица.

Достаточность. Пусть теперь, наоборот, известно, что существует вещественная симметричная положительная матрица $\mathcal{D}$, для которой матрица $\mathcal{D}\mathcal{B}$ вещественна и симметрична. Доказательство диагонализируемости матрицы $\mathcal{B}$ и вещественности ее собственных чисел состоит из следующих пп. 6–10.

6. В заданных условиях существует ортонормированный набор $\{\mathsf{e}_r;\ r = 1, \dots, n\}$, с каждым вектором которого связано положительное собственное число $\lambda_r > 0$, $r = 1, \dots, n$. При этом, согласно п. 1, векторы набора могут быть выбраны вещественными. Кроме того, существует унитарная и, следовательно, неособенная матрица $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}\mathcal{U}^+ = \mathbf{1}$ ($+$ обозначает эрмитовское сопряжение), которая диагонализирует матрицу $\mathcal{D}$, т.е. $\mathcal{U}\mathsf{e}_r^{(0)} = \mathsf{e}_r$, $r = 1, \dots, n$, где $\{\mathsf{e}_r^{(0)};\ r = 1, \dots, n\}$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$ и $\mathcal{U}\mathcal{D}\mathcal{U}^+ = \operatorname{diag}\langle\lambda_r;\ r = 1, \dots, n\rangle$. Матрица $\mathcal{U}$ вещественная. Это следует из того, что из выполнимости для каждого $r = 1, \dots, n$ равенства $\mathcal{U}\mathsf{e}_r^{(0)} = \mathsf{e}_r$ и вещественности векторов e_r и $\mathsf{e}_r^{(0)}$ получается $(\operatorname{Im}\mathcal{U})\mathsf{e}_r^{(0)} = 0$, $r = 1, \dots, n$. Так как это равенство имеет место для всех векторов $\mathsf{e}_r^{(0)}$, $r = 1, \dots, n$, стандартного базиса, то матрица $\operatorname{Im}\mathcal{U} = 0$. Из унитарности и вещественности матрицы $\mathcal{U}$ следует, что она ортогональна $\mathcal{U}^\top\mathcal{U} = \mathbf{1}$.

7. Определим неособенную вещественную матрицу $\mathcal{V}^\top = \mathcal{U}^\top \operatorname{diag}\langle\lambda_r^{1/2}; r = 1, \dots, n\rangle$ как произведение неособенных вещественных матриц. Тогда из равенства $\mathcal{U}\mathcal{D}\mathcal{U}^+ = \operatorname{diag}\langle\lambda_r; r = 1, \dots, n\rangle$ и вещественности матрицы $\mathcal{U}$ следует, что матрица $\mathcal{D}$ симметрична и положительна, так как

$$\mathcal{D} = \mathcal{U}^\top \operatorname{diag}\langle\lambda_r; r = 1, \dots, n\rangle\mathcal{U} = \mathcal{V}^\top\mathcal{V}.$$

8. Так как матрица $\mathcal{V}$ неособенная, то определим матрицу $\mathcal{C}$ посредством равенства $\mathcal{D}\mathcal{B} = \mathcal{V}^\top\mathcal{C}\mathcal{V}$. Из него равенства следует, что матрица $\mathcal{C}$ симметрична, так как матрица $\mathcal{D}\mathcal{B}$ симметрична и, кроме того,

$$\mathcal{V}^\top\mathcal{V}\mathcal{B} = \mathcal{V}^\top\mathcal{C}\mathcal{V}, \quad \mathcal{B} = \mathcal{V}^{-1}\mathcal{C}\mathcal{V}.$$

9. Рассмотрим характеристическое уравнение для симметричной матрицы $\mathcal{C}$, $\det(\mathcal{C}-\mu)=0$. Все решения этого уравнения вещественны. Но так как

$$\det(\mathcal{B}-\mu)=\det\mathcal{V}\cdot\det(\mathcal{B}-\mu)\cdot\det\mathcal{V}^{-1}=\det(\mathcal{V}\mathcal{B}\mathcal{V}^{-1}-\mu)=\det(\mathcal{C}-\lambda),$$

то все эти решения являются собственными числами матрицы $\mathcal{B}$ и, следовательно, вещественными числами.

10. Если e'_r, $r=1,\dots,n$, — набор собственных векторов симметричной матрицы $\mathcal{C}$ и μ_r, $r=1,\dots,n$, — набор соответствующих им собственных чисел, $\mathcal{C}\mathsf{e}'_r=\mu_r\mathsf{e}'_r$, то $\mathcal{V}^{-1}\mathsf{e}'_r$, $r=1,\dots,n$, — набор собственных векторов матрицы $\mathcal{B}$, так как, после подстановки выражения $\mathcal{V}\mathcal{B}\mathcal{V}^{-1}$ для матрицы $\mathcal{C}$, получаем

$$\mathcal{V}\mathcal{B}\mathcal{V}^{-1}\mathsf{e}'_r=\mu_r\mathsf{e}'_r,\quad \mathcal{B}(\mathcal{V}^{-1}\mathsf{e}'_r)=\mu_r\mathcal{V}^{-1}\mathsf{e}'_r,\quad r=1,\dots,n.$$

Таким образом, матрица $\mathcal{B}$ имеет ровно n собственных векторов, т.е. матрица $\mathcal{B}$ диагонализируема. □

Замечание 1. Выбор матрицы $\mathcal{D}$, существование которой утверждается как необходимое условие в теореме, не является, вообще говоря, единственным. Класс возможных матриц $\mathcal{D}$ существенно зависит от вида матрицы $\mathcal{B}$, даже в случае, когда она является невырожденной.

Рассмотрим системы квазилинейных уравнений (1) первого порядка общего вида (см. [14]), описывающие эволюцию полей $\mathsf{a}(\boldsymbol{x},t)$ при $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^m$ со значениями в $\mathbb{R}^n$, $\mathsf{a}(\boldsymbol{x},t)=\langle a_r(\boldsymbol{x},t);\ r=1,\dots,n\rangle$. Вводя набор полей $\mathsf{b}_{\boldsymbol{x}}=\langle \mathsf{b}_j(\boldsymbol{x},t)=\nabla_j\mathsf{a}(\boldsymbol{x},t);\ j=1,\dots,m\rangle$, оператор $\mathsf{L}[\cdot]\colon\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^n$ — генератор эволюции таких систем определяется непрерывно дифференцируемой вектор-функцией $F_r(\mathsf{a},\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x},t)$, $r=1,\dots,r$, на $\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}$ так, что

$$\dot a_r(\boldsymbol{x},t)=F_r(\mathsf{a},\nabla_{\boldsymbol{x}}\mathsf{a},\boldsymbol{x},t),\quad r=1,\dots,n. \tag{9}$$

Вводя линеаризованную систему уравнений

$$\dot\varphi_r(\boldsymbol{x},t)=\left(\frac{\partial F_r(\mathsf{a},\mathsf{b}_{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x},t)}{\partial b_{r',j}}\nabla_j\varphi_{r'}\right)(\boldsymbol{x},t)$$

для поля $\varphi(\boldsymbol{x},t)$ на $\mathbb{R}^m$, условие гиперболичности системы (9) формулируется как диагонализируемость матрицы

$$T_{r,r'}=\frac{\partial F_r(\mathsf{a},\mathsf{b}_{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x},t)}{\partial b_{r',j}}q_j,\quad \mathsf{b}_j=\langle b_{r,j};j=1,\dots,m\rangle,\quad r,r'=1,\dots,n, \tag{10}$$

и вещественность ее собственных значений при произвольном выборе вектора $\boldsymbol{q}=\langle q_j;j=1,\dots,m\rangle$ и поля $\mathsf{a}(\boldsymbol{x},t)$.

Из доказанной теоремы непосредственно следует

Теорема 2. *Для того чтобы система (9) квазилинейных уравнений была системой гиперболического типа, необходимо и достаточно, чтобы она была t-гиперболической.*

Доказательство.

Исходя из определения гиперболичности систем квазилинейных уравнений первого порядка (см. [14, с. 25]), доказательство получается применением утверждения теоремы 1 к матрице $\mathcal{T}$ с матричными элементами (10). □

4. Гиперболические системы класса $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$. Этот раздел посвящен решению основной задачи, поставленной во введении, описанию общего вида гиперболических уравнений (3) для векторного поля $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$. Доказанная в разд. 3 теорема существенно упрощает процедуру описания класса всех таких уравнений. Совпадение понятий гиперболичности и t-гиперболичности для систем квазилинейных уравнений позволяет не анализировать коэффициенты характеристического уравнения, а сосредоточиться только на возможности построения подходящей матрицы $\mathcal{D}$.

Принадлежность уравнения (3) к классу $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$ позволяет существенно сократить число параметров матрицы $\mathcal{D}$, подлежащих определению. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Если для любого значения параметра $t \in \mathbb{R}$, в любой точке $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ и для любой координатной системы в $\mathbb{R}^3$ существует такая симметричная матрица $\mathcal{D}$ с матричными элементами D_{jk}, $j,k = 1,2,3$, для которой матрица $\mathcal{DT}$ симметрична, то среди всех матриц такого типа обязательно существует такая, которая не зависит от t и $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ и которая представляет симметричный тензор второго ранга и, следовательно, она представима следующим разложением*

$$D_{jk} = c_1\delta_{jk} + c_2 u_j u_k + c_3 q_j q_k + c_4(u_j q_k + q_j u_k), \tag{11}$$

где коэффициентные функции c_a, $a = 1,\dots,4$, зависят от инвариантов $\eta = \boldsymbol{u}^2$, $\zeta = \boldsymbol{q}^2$, $\xi = (\boldsymbol{q},\boldsymbol{u})$ преобразований группы $\mathbb{O}_3$ и непрерывно дифференцируемы по этим переменным.

Доказательство. Так как матрица $\mathcal{T}$ не зависит явно от t и $\boldsymbol{x}$, то достаточно построить матрицу $\mathcal{D}$ для каких-либо фиксированных значений t_0 и $\boldsymbol{x}_0$ и эта матрица будет удовлетворять условиям теоремы для любых t и $\boldsymbol{x}$. Построив матрицу $\mathcal{D}$ для какой-либо фиксированной ортогональной системы координат, произведем преобразование этой системы посредством произвольной ортогональной матрицы $\mathcal{A}$. Тогда матрица $\mathcal{ADA}^{-1}$ также будет вещественной симметричной и положительной. При указанном изменении системы координат, принимая во внимание тот факт, что матрица $\mathcal{T}$ является координатным представлением тензора второго ранга, то она преобразуется в $\mathcal{ATA}^{-1}$. Тогда получаем выражение для матрицы $\mathcal{DT}$ в новой системе координат $\mathcal{ADA}^{-1}\mathcal{ATA}^{-1} = \mathcal{ADTA}^{-1}$. Следовательно, полученная матрица является симметричной, так как получена ортогональным преобразованием симметричной матрицы $\mathcal{DT}$. Из вида преобразования следует, что $\mathcal{DT}$ является координатным представлением тензора второго ранга.

Разложение (11) для тензора $\mathcal{D}$ аналогично разложению (4). Поэтому оно получается посредством аналогичных рассуждений с той лишь разницей, что базисные форм-инвариантные функции должны теперь строиться в тензорной алгебре с двумя образующими векторами $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{q}$ с учетом симметрии тензора $\mathcal{D}$. В этом случае имеется 4 базисных функции: δ_{jk}, $u_j u_k$, $q_j q_k$, $u_j q_k + q_j u_k$. При этом целый рациональный базис состоит из трех инвариантов $\boldsymbol{u}^2$, $\boldsymbol{q}^2$, $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{u})$. $\square$

Определение 3. Оператор $\mathsf{L}[\cdot]$ и связанную с ним систему класса $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$, определяемую (3), (5), назовем невырожденной, если $2f' + g \neq 0$, $g \neq 0$, $f' \neq 0$.

Следующее утверждение отвечает на основной вопрос о гиперболичности систем (3). Используя эквивалентность понятий гиперболичности и t-гиперболичности, доказывается возможность выбора не равного нулю тождественно набора коэффициентов c_j, $j = 1,\dots,4$, удовлетворяющих равенству (12).

Теорема 4. *Невырожденные системы уравнений* (3) *класса $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$, определяемые тензором* (5) *с непрерывно дифференцируемыми функциями $f(\eta)$ и $g(\eta)$ являются гиперболическими в том и только в том случае, если $f'g > 0$.*

Доказательство. Доказательство состоит из следующих пп. 1–6.

1. Заметим, что при $g = 2f'$ матрицу $\mathcal{D}$ можно положить единичной, так как в этом случае матрица $\mathcal{T}$ симметрична. Поэтому далее будем полагать $g \neq 2f'$. По той же причине будем считать, что $\eta = \boldsymbol{u}^2 \neq 0$ и $\zeta = \boldsymbol{q}^2 \neq 0$.

На основании Теоремы 3 выберем матрицу $\mathcal{D}$ в виде (11) и вычислим, в рамках тензорной алгебры, произведение $\mathcal{DT}$,

$$\begin{aligned} D_{jk}T_{kl} = [c_1\delta_{jk} + c_2 u_j u_k + c_3 q_j q_k + c_4(u_j q_k + q_j u_k)] \cdot [g u_k q_l + 2f' q_k u_l + \xi(g\delta_{kl} + 2g' u_k u_l)] = \\ = \alpha_1\delta_{jl} + \alpha_2 u_j u_l + \alpha_3 q_j q_l + u_j q_l[gc_1 + \eta g c_2 + 2\xi g c_4] + \\ + q_j u_l[2f'c_1 + 2(\zeta f' + \xi^2 g')c_3 + \xi(g + 2(f' + \eta g'))c_4], \end{aligned}$$

где коэффициенты α_1, α_2, α_3 являются функциями от введенных ранее инвариантов ξ, η, ζ целого рационального базиса. Учитывая, что первые слагаемые представляют собой симметричные тензоры, находим, что для симметричности тензора $D_{jk}T_{kl}$ необходимо и достаточно совпадения коэффициентов, заключенных в квадратные скобки. Это эквивалентно выполнению равенства

$$c_1(g-2f')+\eta g c_2-2(\zeta f'+\xi^2 g')c_3+\xi(g-2(f'+\eta g'))c_4=0.$$

Так как $g-2f'\neq 0$, то

$$c_1=(2f'-g)^{-1}[\eta g c_2-2(\zeta f'+\xi^2 g')c_3+\xi(g-2(f'+\eta g'))c_4]. \tag{12}$$

В общем случае набор из коэффициентов c_j, $j=1,\dots,4$, на основе которого получается матрица $\mathcal{D}$, необходимая для t-гиперболичности системы (3) с тензором (5), получается выбором в правой части (12) не тождественно равного нулю набора $\langle c_2,c_3,c_3\rangle$.

2. Коэффициенты c_r, $r=1,\dots,4$, являются, в общем случае, функциями от инвариантов ξ, η, ζ. Нужно найти необходимые и достаточные условия для значений этих функций, при выполнении которых симметричная матрица (11) является строго положительной при любом выборе векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{q}$, если система (3), (5) является невырожденной.

Введем матрицу $\mathcal{D}_1=\mathcal{D}-c_1\mathcal{I}$, $\mathcal{I}$ — единичная матрица. Матрица $\mathcal{D}_1$ имеет по крайней мере одно собственное число, равное нулю, с собственным вектором $[\boldsymbol{u},\boldsymbol{q}]$, ортогональным векторам $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{q}$ (скобками $[\cdot,\cdot]$ обозначена операция векторного произведения в $\mathbb{R}^3$). В самом деле, используя полную антисимметрию символа Леви-Чивиты ε_{klm}, находим

$$(\mathcal{D}_1)_{jk}[\boldsymbol{u},\boldsymbol{q}]_k=(c_2u_ju_k+c_3q_jq_k+c_4(u_jq_k+q_ju_k)\varepsilon_{klm}u_lq_m=0.$$

Следовательно,

$$\det\mathcal{D}_1=0.$$

С учетом этого равенства запишем характеристическое уравнение для матрицы $\mathcal{D}_1$,

$$\det(\lambda\mathcal{I}-\mathcal{D}_1)=\lambda^3-p_1\lambda^2-p_2\lambda=0, \tag{13}$$

где

$$p_1=\operatorname{Sp}\mathcal{D}_1=\boldsymbol{u}^2c_2+\boldsymbol{q}^2c_3+2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q})c_4. \tag{14}$$

Вычислим коэффициент p_2. Так как

$$(\mathcal{D}_1^2)_{jk}=[c_2^2\boldsymbol{u}^2+c_4^2\boldsymbol{q}^2+2c_2c_4(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q})]u_ju_k+[c_4^2\boldsymbol{u}^2+c_3^2\boldsymbol{q}^2+2c_3c_4(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q})]q_jq_k+$$
$$+[c_4(c_2\boldsymbol{u}^2+c_3\boldsymbol{q}^2)+(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q})(c_4^2+c_2c_3)](u_jq_k+q_ju_k);$$
$$(\mathcal{D}_1\operatorname{Sp}\mathcal{D}_1)_{jk}=c_2[c_2\boldsymbol{u}^2+c_3\boldsymbol{q}^2+2c_4(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q})]u_ju_k+c_3[c_2\boldsymbol{u}^2+c_3\boldsymbol{q}^2+2c_4(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q})]q_jq_k+$$
$$+c_4[c_2\boldsymbol{u}^2+c_3\boldsymbol{q}^2+2c_4(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q})](u_jq_k+q_ju_k).$$

то

$$(\mathcal{D}_1^2-\mathcal{D}_1\operatorname{Sp}\mathcal{D}_1)_{jk}=(c_4^2-c_2c_3)[\boldsymbol{q}^2u_ju_k+\boldsymbol{u}^2q_jq_k-(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q})(u_jq_k+q_ju_k)]$$

и, следовательно, согласно [5], коэффициент p_2 характеристического уравнения для матрицы $\mathcal{D}_1$ равен

$$p_2=\frac{1}{2}[\operatorname{Sp}\mathcal{D}_1^2-(\operatorname{Sp}\mathcal{D}_1)^2]=-D[\boldsymbol{u},\boldsymbol{q}]^2,\quad D\equiv c_2c_3-c_4^2. \tag{15}$$

Таким образом, собственные числа матрицы $\mathcal{D}_1$ равны $\lambda_1=0$ и

$$\lambda_\pm=\frac{1}{2}(\operatorname{Sp}\mathcal{D}_1\pm[(\operatorname{Sp}\mathcal{D}_1)^2-4D[\boldsymbol{u},\boldsymbol{q}]^2]^{1/2}). \tag{16}$$

При этом дискриминант $(\operatorname{Sp}\mathcal{D}_1)^2-4D[\boldsymbol{u},\boldsymbol{q}]^2$ неотрицателен, так как $\lambda_\pm$ — вещественные собственные числа симметричной матрицы $\mathcal{D}_1$.

Согласно связи между матрицами $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}_1$, собственные числа матрицы $\mathcal{D}$ равны c_1 и $c_1+\lambda_\pm$.

3. Докажем, что можно построить такую вектор-функцию

$$\boldsymbol{c}(\xi,\eta,\zeta)=\langle c_2(\xi,\eta,\zeta),c_3(\xi,\eta,\zeta),c_4(\xi,\eta,\zeta)\rangle\in\mathbb{R}^3,$$

для которой функции $c_1(\xi,\eta,\zeta)$ и $c_1(\xi,\eta,\zeta)+\lambda_\pm(\xi,\eta,\zeta)$, которые являются собственными числами матрицы $\mathcal{D}$, строго положительны. Для этого необходимо и достаточно найти в $\mathbb{R}^3$ непустую область допустимых значений $\boldsymbol{c}=\langle c_2,c_3,c_4\rangle$ этой вектор-функции.

В искомой области расположения допустимых векторов $\boldsymbol{c}$ необходимо и достаточно, чтобы были положительными c_1 и $c_1+\lambda_-$, так как $\lambda_+ \geqslant \lambda_-$. Тогда согласно (12) должно выполняться

$$(2f'-g)^{-1}[\eta g c_2 - 2(\zeta f' + \xi^2 g')c_3 + \xi(g-2(f'+\eta g'))c_4] > 0. \tag{17}$$

Неравенство же $c_1+\lambda_- > 0$ дает

$$c_1 + \frac{1}{2}\operatorname{Sp}\mathcal{D}_1 - \frac{1}{2}((\operatorname{Sp}\mathcal{D}_1)^2 - 4D[\boldsymbol{u},\boldsymbol{q}]^2)^{1/2} > 0 \tag{18}$$

и поэтому необходимо, чтобы имело место

$$2c_1 + \operatorname{Sp}\mathcal{D}_1 = (2f'-g)^{-1}[\eta(2f'+g)c_2 - ((2f'+g)\zeta + 4\xi^2 g')c_3 - 4\xi\eta g' c_4] \geqslant 0, \tag{19}$$

где знак равенства недопустим при

$$(\operatorname{Sp}\mathcal{D}_1)^2 = 4D[\boldsymbol{u},\boldsymbol{q}]^2. \tag{20}$$

Кроме того, необходимо, чтобы имело место следующее неравенство, которое получается из (18) посредством несложного преобразования,

$$c_1(c_1 + \operatorname{Sp}\mathcal{D}_1) + D[\boldsymbol{u},\boldsymbol{q}]^2 > 0. \tag{21}$$

На основании (12) и (14) находим, что должно иметь место

$$c_1 + \operatorname{Sp}\mathcal{D}_1 = (2f'-g)^{-1}[2\eta f' c_2 - (\zeta g + 2\xi^2 g')c_3 + \xi(2f' - g - 2\eta g')c_4] \geqslant 0. \tag{22}$$

Учитывая также (21) и равенства $[\boldsymbol{u},\boldsymbol{q}]^2 = \eta\zeta - \xi^2$ и $D = c_2c_3 - c_4^2$, получаем

$$[\eta g c_2 - 2(\zeta f' + \xi^2 g')c_3 + \xi(g-2(f'+\eta g'))c_4]\cdot[2\eta f' c_2 - (\zeta g + 2\xi^2 g')c_3 + \xi(2f'-g-2\eta g')c_4] + \\ + D(2f'-g)^2(\eta\zeta - \xi^2) > 0. \tag{23}$$

Заметим, что в (17) и (19) можно, не ограничивая общности, считать $2f'-g>0$, так как, в противном случае, если $2f'-g<0$, нужно, при определении вектора $\boldsymbol{c}$, обратить знаки всех его компонент c_j, $j=2,3,4$. При учете этого замечания, из (17) и (19) получаем неравенства

$$\eta g c_2 - 2(\zeta f' + \xi^2 g')c_3 + \xi(g - 2(f'+\eta g'))c_4 > 0. \tag{24}$$

$$(2f'+g)\eta c_2 - ((2f'+g)\zeta + 4\xi^2 g')c_3 - 4\xi\eta g' c_4 \geqslant 0, \tag{25}$$

где равенство в (25) недопустимо при

$$(c_2\eta + c_3\zeta + 2c_4\xi)^2 = 4(c_2c_3 - c_4^2)(\eta\zeta - \xi^2). \tag{26}$$

Таким образом, для определения области возможных значений вектор-функции $\boldsymbol{c}(\xi,\eta,\zeta)$ достаточно показать, что при всех значениях наборов $\langle\xi,\eta\geqslant 0,\zeta\geqslant 0\rangle$ не пуста область в $\mathbb{R}^3$, в которой должны одновременно выполняться неравенства (23), (24) и (25) с учетом (26).

4. Так как f и g зависят только от η, то для того, чтобы квадратные относительно ξ неравенства (24), (25) выполнялись при любом значении $\xi\in\mathbb{R}$, независимо от значений η и ζ. Следовательно, если $g'c_3 \neq 0$, то из (24) с необходимостью следует $g'c_3 < 0$, а из (25) — $g'c_3 > 0$. Ввиду полученного противоречия, необходимо считать, что $g'c_3 = 0$. При этом условии из (24), ввиду произвольности $\xi\in\mathbb{R}$, получаем

$$[g - 2(f'+\eta g')]c_4 = 0, \quad \eta g c_2 - 2\zeta f' c_3 > 0, \tag{27}$$

а из неравенства (25), по той же причине, следует $g'c_4 = 0$ и $(\eta c_2 - \zeta c_3)(2f'+g) \geqslant 0$, откуда, в силу условия теоремы $2f'+g\neq 0$, следует

$$\begin{cases} \eta c_2 \geqslant \zeta c_3 & \text{при } 2f'+g>0; \\ \eta c_2 \leqslant \zeta c_3 & \text{при } 2f'+g<0. \end{cases} \tag{28}$$

Учитывая независимость изменения $\eta>0$ и $\zeta>0$ в формуле (28), находим, что:

(i) либо обе компоненты c_2 и c_3 имеют одинаковые знаки;
(ii) либо одна из компонент обязательно равна нулю.

Случай же, когда компоненты имеют разные знаки, но значение одной из функций f' или g равно нулю, исключен условием невырожденности. Опять же, ввиду независимости $\eta > 0$ и $\zeta > 0$ в неравенстве (27), получаем, с необходимостью, что: в случае (i) f' и g имеют одинаковые знаки, т.е. $f'g > 0$ и поэтому необходимость условия $f'g > 0$ доказана.

Наконец, заметим, что в случае, если $g' \neq 0$, то в силу равенств $g'c_3 = g'c_4 = 0$ получаем $c_3 = c_4 = 0$ и поэтому $c_2 \neq 0$, так как из условия $c_1 > 0$ следует, что набор $\langle c_2, c_3, c_4 \rangle$ не может быть равным нулю тождественно. Если же $g' = 0$, то из (27), ввиду предположения $2f' \neq g$, следует, что так же, как и первом случае, $c_4 = 0$.

5. Проанализируем неравенство (23) в случае (ii) п. 4. Так как $c_4 = 0$ и, согласно (ii), имеет место $c_2 c_3 = 0$. Тогда $D = c_2 c_3 - c_4^2 = 0$ и поэтому (23) записывается в виде

$$[\eta g c_2 - 2(\zeta f' + \xi^2 g')c_3] \cdot [2\eta f' c_2 - (\zeta g + 2\xi^2 g')c_3] > 0. \tag{29}$$

Далее, в силу $c_2 c_3 = 0$ при $c_3 = 0$ из (29) следует $2\eta^2 g f' c_2^2 > 0$, а при $c_2 = 0$, что возможно только при $g' = 0$, получаем $2\zeta^2 f' g c_3^2 > 0$. Так как в первом случае $c_2 \neq 0$, а во втором — $c_3 \neq 0$, то в обоих случаях следствием является указанное в формулировке теоремы необходимое условие $f'g > 0$.

6. Докажем достаточность условия $gf' > 0$. Положим $c_2 \neq 0$, $c_3 = c_4 = 0$. В этом случае $c_1 = (2f' - g)^{-1}\eta g c_2$, $D = 0$ и поэтому $\lambda_- = 0$, $\lambda_+ = \operatorname{Sp} \mathcal{D}_1 = \eta c_2$, так что $c_1 + \lambda_+ = (2f' - g)^{-1} 2\eta f' c_2$. Допуская, что $2f' > g$, как указано в п. 3, и выбрав $c_2 = \operatorname{sgn} f' = \operatorname{sgn} g$ получим набор положительных собственных чисел c_1, c_1, $c + \lambda_+$ матрицы $\mathcal{D}$. □

Замечание 2. Тот факт, что при выполнении условия $f'g > 0$ функции c_j, $j = 1, \ldots, 4$, можно выбрать зависящими только от инварианта η, положив в (12) $c_3 = c_4 = 0$ и $c_2 \neq 0$ при $g \neq 0$, а если $g = 0$ (и $g' = 0$), то $c_3 = 0$ и $c_4 \neq 0$, означает, что собственные числа матрицы $\mathcal{D}\mathcal{T}$ линейно зависят от $\boldsymbol{q}$.

5. Заключение. В работе установлено описание класса всех гиперболических уравнений квазилинейных уравнений первого порядка для векторного поля на $\mathbb{R}^3$, генераторами сдвига по времени у которых являются нелинейные дифференциальные операторы $\mathsf{L}[\cdot]$, принадлежащие классу $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$. Решение этой задачи основано на доказанной в работе эквивалентности понятий гиперболичности и t-гиперболичности. При этом существенно использование описания класса всех тензор-функций $S_{jk}(\boldsymbol{u})$ на основе базиса δ_{jk}, $u_j u_k$ форм-инвариантных тензоров второго ранга, порождаемых вектором $\boldsymbol{u}$. Это позволило существенно сократить число произвольных функций f и g, параметризующих класс $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$, и сократить до четырех число произвольных функций от инварианта $\boldsymbol{u}^2$, параметризующих класс возможных матриц $\mathcal{T}$, на основе которых устанавливается принадлежность уравнения к гиперболическому типу.

Установление условий гиперболичности квазилинейных систем уравнений, предназначенных для моделирования физических процессов, направлено на то, чтобы выделить среди них такие, которые могли бы описывать физические эволюционные процессы, например, в сплошных средах при отсутствии механизмов диссипации. Это положение основано на следующем рассуждении. Выбор локального решения уравнения (6) поля $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ в виде «плоской волны» $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) \sim \boldsymbol{v}_0 \exp[i\omega t + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q})]$, на основании требования существования такого решения, приводит к уравнению (8) — т. н. «дисперсионному уравнению» с физической точки зрения, связывающего частоту волны ω с волновым вектором $\boldsymbol{q}$. При этом все ветви $\omega_j(\boldsymbol{q})$, $j = 1, 2, 3$, решения алгебраического уравнения (8) обязаны быть вещественными при вещественности $\boldsymbol{q}$, так как наличие мнимой части у какой-либо из них, при некоторых значениях вектора $\boldsymbol{q}$, обязательно приводит, ввиду вещественности уравнения, к наличию комплексно сопряженного ему решения $\omega_j^*(\boldsymbol{q})$. В этом случае наличие мнимой части у $\omega_j(\boldsymbol{q})$ приводит не только к наличию решений $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ уравнения (6), стремящихся асимптотически к какому-то стационарному эволюционному режиму, но также и к обязательному наличию решений $\boldsymbol{v}(\mathbf{x}, t)$, обладающих ничем физически необусловленным, неограниченным возрастанием в некоторых областях изменения пространственной переменной $\boldsymbol{x}$, что физически не разумно.

Таким образом, при отборе физически разумных уравнений необходимо потребовать вещественность решений уравнения (8). Далее, возрастание решений $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ линеаризованного уравнения степенным образом относительно t, возникает также в условиях вещественности всех решений $\omega_j(\boldsymbol{q})$, $j = 1, 2, 3$, в том случае, когда матрица $\mathcal{T}$ не является диагонализируемой. Поэтому при отборе физически разумных эволюционных уравнений необходимо потребовать ее диагонализируемости. В результате приходим к выводу, что условие гиперболичности (см. Определение 1) систем квазилинейных уравнений первого порядка является естественным требованием, предъявляемым к ним с точки зрения физики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вирченко Ю. П., Субботин А. В.* Математические задачи конструирования эволюционных уравнений динамики конденсированных сред// Мат. Междунар. науч. конф. «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы» (Стерлитамак, 25—29 июня 2018 г.). — Уфа, 2018. — С. 262—264.
2. *Вирченко Ю. П., Субботин А. В.* Уравнения динамики конденсированных сред с локальным законом сохранения// Мат. V Междунар. науч. конф. «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (Нальчик, 4–7 декабря 2018 г.). — Нальчик: ИПМА КБНЦ РАН, 2018. — С. 59.
3. *Вирченко Ю. П., Субботин А. В.* Описание класса эволюционных уравнений дивергентного типа для векторного поля// Мат. IV Всеросс. науч.-практ. конф. с междунар. участием «Современные проблемы физико-математических наук» (Орёл, 22–25 ноября 2018 г.). — Орёл, 2018. — С. 83—86.
4. *Вирченко Ю. П., Субботин А. В.* Описание класса эволюционных уравнений ферродинамики// Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2019. — *170*. — С. 15—30.
5. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Физматлит, 2004.
6. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1979.
7. *Гуревич Г. Б.* Основы теории алгебраических инвариантов. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1948.
8. *Исаев А. А., Ковалевский М. Ю., Пелетминский С. В.* О гамильтоновом подходе к динамике сплошных сред// Теор. мат. физ. — 1995. — *102*, № 2. — С. 283—296.
9. *Исаев А. А., Ковалевский М. Ю., Пелетминский С. В.* Гамильтонов подход в теории конденсированных сред со спонтанно нарушенной симметрией// Физ. элем. част. атом. ядра. — 1996. — *27*, № 2. — С. 431–492.
10. *Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — М.: Физматлит, 2001.
11. *Куликовский А. Г., Слободкина Ф. А.* Равновесие произвольных стационарных течений в трансзвуковых точках// Прикл. мат. мех. — 1968. — *31*. — С. 593—602.
12. *Куликовский А. Г., Слободкина Ф. А.* Об устойчивости одномерных стационарных решений гиперболических систем дифференциальных уравнений при наличии точек обращения в нуль одной из характеристических скоростей// Прикл. мат. мех. — 1984. — *48*, № 3. — С. 414—419.
13. *Любарский Г. Я.* Теория групп и ее приложения в физике. — М.: ГИФМЛ, 1958.
14. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука, 1978.
15. *Mac-Connell A. J.* Application of Tensor Analysis. — New York: Dover, 1957.
16. *Majda A.* The existence of multi-dimensional shock fronts// Mem. Am. Math. Soc. — 1983. — *43*, № 281. — P. 1—94.
17. *Spencer A. G. M.* Theory of Invariants// in: Continuum Physics. — New York: Academic Press, 1971. — P. 239–353.

Вирченко Юрий Петрович
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
E-mail: `virch@bsu.edu.ru`

Новосельцева Алина Эдуардовна
Белгородский государственный технологический университет
E-mail: `novoseltseva@gmail.com`