ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 207 (2022). С. 37–47
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-207-37-47

УДК 517.928.2

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЛИНЕЙНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

© 2022 г. Д. П. ЕМЕЛЬЯНОВ, И. С. ЛОМОВ

Аннотация. Метод разделения переменных в задачах для линейно вырождающегося уравнения $u''_{xx} + yu''_{yy} + c(y)u'_y - a(x)u = f(x,y)$ в прямоугольнике приводит к задачам для обыкновенного сингулярно возмущённого дифференциального уравнения с вырождением $yY'' + c(y)Y' - (\pi^2k^2 + a(y))Y = f_k(y)$, $k \in \mathbb{N}$. В данной работе исследуется асимптотическое поведение решения данного уравнения с заданными начальными данными в точке 0 и нулевой правой частью при $k \to +\infty$. Главный член асимптотики выписывается в квадратурах.

Ключевые слова: вырождающееся дифференциальное уравнение, сингулярно возмущённое дифференциальное уравнение.

ASYMPTOTIC ESTIMATES FOR THE SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR A DIFFERENTIAL EQUATION WITH LINEAR DEGENERATION

© 2022 D. P. EMEL'YANOV, I. S. LOMOV

Abstract. Application of the method of separation of variables to problems for the linearly degenerate equation $u''_{xx} + yu''_{yy} + c(y)u'_y - a(x)u = f(x,y)$ in a rectangle leads to problems for the singularly perturbed ordinary differential equation with degeneration $yY'' + c(y)Y' - (\pi^2k^2 + a(y))Y = f_k(y)$, $k \in \mathbb{N}$. In this paper, we examine the asymptotic behavior of solutions of this equation with given initial data at 0 and zero right-hand side as $k \to +\infty$ and obtain the leading term of the asymptotics in the explicit form.

Keywords and phrases: degenerate differential equation, singularly perturbed differential equation.

AMS Subject Classification: 34E15

1. Введение.

Рассмотрим следующую задачу для дифференциального уравнения с линейным вырождением:

$$\begin{cases} xy''_k + c(x)y'_k - (a(x) + \pi^2k^2)y_k = 0, & x \in (0,b), \\ y_k(0) = 1, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Коэффициенты уравнения $a(x)$, $c(x)$ — непрерывно дифференцируемые на $[0,b]$ функции, при этом производная функции $\bar{c}(x) = (c(x) - c(0))/x$ непрерывна на $(0,b]$ и может иметь интегрируемую особенность в точке 0. $a(x) \geqslant 0$, $c(0) \equiv c_0 \geqslant 1$. Цель данной работы состоит в отыскании равномерной асимптотики последовательности решений $y_k(x)$ данной задачи при $k \to +\infty$.

Подобные вырождающиеся уравнения возникают в том числе при разделении переменных в задачах, рассмотренных М. В. Келдышем в [4] и [5, с. 299–301]. В работах [7, 8], [9, глава X] и [3] с помощью метода спектрального выделения особенностей строится решение упомянутых задач с квадратичным вырождением в виде ряда. При доказательстве сходимости данного ряда важную роль играют асимптотические свойства решения краевых задач для уравнения вида (1).

Некоторые аналоги результатов этой работы для задачи, аналогичной (1) в случае без вырождения следуют из [6, с. 17, лемма 2.2], или же могут быть получены с использованием теоремы Тихонова [1, § 7]. Наличие вырождения существенно затрудняет доказательство.

В данной работе априорно полагается, что решение данной задачи (1) существует и единственно при каждом $k > 0$.

2. Вспомогательные утверждения. В соответствии с методом спектрального выделения особенностей [7, 8], [9, глава X], [3], рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{cases} x\bar{y}_k'' + c(0)\bar{y}_k' - \pi^2 k^2 \bar{y}_k = 0, \quad x \in (0, b), \\ \bar{y}_k(0) = 1. \end{cases}$$

Разложив $\bar{y}_k(x)$ в ряд по степеням x и приравняв коэффициенты при равных степенях, легко показать [2, с. 51], что

$$\bar{y}_k(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\pi k i\sqrt{x})^\alpha} J_\alpha(2\pi k i\sqrt{x}),$$

где J_α — функция Бесселя первого рода, i — мнимая единица, $\alpha = c_0 - 1$.

Перейдём в задаче (1) к малому параметру $\mu = 1/\pi k$ и будем искать её решение в следующем виде

$$y(x, \mu) = \bar{y}(x, \mu) \cdot z(x, \mu),$$

где $z(x, \mu)$ — новая неизвестная функция. Подставим данное соотношение в уравнение (1) и поделим полученное выражение на $\bar{y}(x)$. Введём вспомогательные обозначения $\bar{c}(x) = (c(x) - c_0)/x$, $R_\mu(x) = -iJ_{\alpha+1}(2i\sqrt{x}/\mu)/J_\alpha(2i\sqrt{x}/\mu)$, $\tilde{R}_\mu(x) = \bar{y}'(x, \mu)/\bar{y}(x, \mu)$. В силу формул дифференцирования функций Бесселя [2, с. 56] имеет место соотношение $\tilde{R}_\mu(x) = R_\mu(x)/(\mu\sqrt{x})$ и полученную для $z(x, \mu)$ задачу можно записать в виде

$$\begin{cases} \mu x \dfrac{d^2 z}{dx^2} + 2\sqrt{x} R_\mu(x) \dfrac{dz}{dx} + \mu c(x) \dfrac{dz}{dx} + \bar{c}(x)\sqrt{x} R_\mu(x) z - \mu a(x) z = 0, \quad x \in (0, b), \\ z(0, \mu) = 1. \end{cases} \tag{2}$$

Принимая во внимание тот факт, что $R_\mu(x) \to 1$ при $\mu \to 0 + 0$, $x > 0$ (см. асимптотики $J_\alpha(ix)$ в [2, с. 222] при $x \to +\infty$), выпишем предельную задачу (2) при $\mu = 0$:

$$\begin{cases} 2\dfrac{d\bar{z}}{dx} + \bar{c}(x)\bar{z} = 0, \quad x \in (0, b), \\ \bar{z}(0) = 1. \end{cases} \tag{3}$$

Далее докажем, что $z(x, \mu) \to \bar{z}(x)$ при $\mu \to 0 + 0$, $x \in (0, b]$. Введём функцию

$$\varphi(x, \mu) = \frac{\mu a(x) - \bar{c}(x)\sqrt{x} R_\mu(x)}{\mu c(x) + 2\sqrt{x} R_\mu(x)}.$$

Функция $\varphi(x, \mu)$ определяет начальное значение $z'(x, \mu)$ при $x = 0$: $z'(0, \mu) = \varphi(0, \mu)$, $\varphi(x, \mu)$ непрерывна при $(x, \mu) \in [0, b] \times [0, \mu_0] \setminus \{(0, 0)\}$, и, вообще говоря, имеет разрыв в точке $(0, 0)$. Исследуем её свойства при $(x, \mu) \to (0, 0)$. Для начала отметим, что $R_\mu(x) \sim \mathrm{const} \cdot \sqrt{x}/\mu$ при $(x, \mu) \to (0, 0)$, $R_\mu(x) \leqslant 1$, $x \in [0, b]$, $\mu > 0$, а $a(x)$ и $\bar{c}(x)$ — непрерывно дифференцируемые на $(0, b]$, непрерывные и интегрируемые на $[0, b]$ функции, $c(0) \geqslant 1$, следовательно, в достаточно малой окрестности точки $(0, 0)$ справедливы неравенства

$$|\varphi(x, \mu)| \leqslant \left| \frac{\mu a(x)}{\mu c(x) + 2\sqrt{x} R_\mu(x)} \right| + \left| \frac{\bar{c}(x)\sqrt{x} R_\mu(x)}{\mu c(x) + 2\sqrt{x} R_\mu(x)} \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left| \frac{\mu a(x)}{\mu c(x)} \right| + \left| \frac{\bar{c}(x)\sqrt{x} R_\mu(x)}{2\sqrt{x} R_\mu(x)} \right| \leqslant \left| \frac{a(x)}{c(x)} \right| + \left| \frac{\bar{c}(x)}{2} \right| \leqslant \mathrm{const},$$

т.е. $\varphi(x,\mu)$ ограничена в некоторой окрестности точки $(0,0)$, а значит, и в $[0,b]\times[0,\mu_0]$. Далее,

$$R'_\mu(x)=\frac{1}{\mu\sqrt{x}}\left(1-\mu\frac{2\alpha+1}{2\sqrt{x}}R_\mu(x)-R^2_\mu(x)\right),\quad |R'_\mu(x)|\leqslant\frac{\mathrm{const}}{\mu\sqrt{x}},$$

следовательно, $\varphi'_x(x,\mu)$ можно оценить следующим образом:

$$|\varphi'_x(x,\mu)|\leqslant\left|\frac{\mu a'(x)-\bar c'(x)\sqrt{x}R_\mu(x)-\bar c(x)R_\mu(x)/2\sqrt{x}-\bar c(x)\sqrt{x}R'_\mu(x)}{\mu c(x)+2\sqrt{x}R_\mu(x)}\right|+$$
$$+\left|\frac{(\mu a(x)-\bar c(x)\sqrt{x}R_\mu(x))\cdot(\mu c'(x)+R_\mu(x)/\sqrt{x}+2\sqrt{x}R'_\mu(x))}{(\mu c(x)+2\sqrt{x}R_\mu(x))^2}\right|.$$

Оценивая данные дроби аналогично $\varphi(x,\mu)$ в достаточно малой окрестности точки $(0,0)$, получим

$$|\varphi'_x(x,\mu)|\leqslant\frac{\mathrm{const}}{x}.$$

Таким образом, функция $x\varphi'_x(x,\mu)$ является ограниченной в прямоугольнике $[0,b]\times[0,\mu_0]$.

Сведём уравнение второго порядка (2) к системе дифференциальных уравнений, положив $w(x,\mu)=z'_x(x,\mu)$.

$$\begin{cases}\mu x\dfrac{dw}{dx}+2\sqrt{x}R_\mu(x)w+\mu c(x)w+\bar c(x)\sqrt{x}R_\mu(x)z-\mu a(x)z=0,\\ \dfrac{dz}{dx}=w,\\ z(0,\mu)=1,\end{cases}\qquad x\in(0,b)\tag{4}$$

При этом $w(0,\mu)=\varphi(0,\mu)$. Сделаем в задаче (4) замену неизвестных функций таким образом, чтобы начальные условия стали нулевыми. Пусть

$$z=\hat z+1,\quad w=\varphi(x,\mu)+\varphi(x,0)\hat z+\hat w.$$

Тогда задача (4) будет преобразована к виду

$$\begin{cases}\mu x\dfrac{d\hat w}{dx}+\mu x\varphi'_x(x,\mu)+\mu x\varphi'_x(x,0)\hat z+\mu x\varphi(x,0)\dfrac{d\hat z}{dx}+2\sqrt{x}R_\mu(x)\hat w+\mu c(x)\hat w+\\ \qquad+\bar c(x)\sqrt{x}R_\mu(x)\hat z-\mu a(x)\hat z+\hat z\varphi(x,0)(2\sqrt{x}R_\mu(x)+\mu c(x))=0,\qquad x\in(0,b)\\ \dfrac{d\hat z}{dx}=\varphi(x,\mu)+\varphi(x,0)\hat z+\hat w,\\ \hat z(0,\mu)=\hat w(0,\mu)=0.\end{cases}$$

Подставим $d\hat z/dx$ из второго уравнения в первое. Введём для удобства следующие обозначения

$$A(x)=-x\frac{\bar c(x)}{2}+c(x),\quad B(x)=-x\frac{\bar c'(x)}{2}+x\frac{\bar c^2(x)}{4}-a(x)-\frac{\bar c(x)c(x)}{2},$$
$$D(x)=-\frac{\bar c(x)}{2},\quad \Phi(x,\mu)=-x\varphi'_x(x,\mu)+x\frac{\bar c(x)}{2}\varphi(x,\mu).$$

После подстановки получим окончательный вид задачи (4) в новых неизвестных

$$\begin{cases}\mu x\dfrac{d\hat w}{dx}+2\sqrt{x}R_\mu(x)\hat w+\mu A(x)\hat w+\mu B(x)\hat z=\mu\Phi(x,\mu),\\ \dfrac{d\hat z}{dx}=D(x)\hat z+\hat w+\varphi(x,\mu),\\ \hat z(0,\mu)=\hat w(0,\mu)=0.\end{cases}\qquad x\in(0,b)\tag{5}$$

Коэффициенты $A(x)$, $B(x)$ и $D(x)$ являются непрерывными на $[0,b]$, при этом $A(x)$ — непрерывно дифференцируемая и $A(0)=c(0)$, функции $\Phi(x,\mu)$, $\varphi(x,\mu)$ — ограниченными в $[0,b]\times[0,\mu_0]$ и интегрируемыми по x при любом $\mu\geqslant 0$.

Сформулируем и докажем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть семейство функций* $v_\mu(x)$ *удовлетворяет неравенствам*

$$0 \leqslant v_\mu(x) \leqslant A + \varkappa \int\limits_0^x \ln\frac{x}{\xi} v_\mu(\xi)d\xi, \quad x \in [0, b], \tag{6}$$

равномерно по μ; *постоянные* A, $\varkappa > 0$. *Тогда существует такая постоянная* $C > 0$, *не зависящая от* μ *и* x, *что*

$$0 \leqslant v_\mu(x) \leqslant C, \quad \forall x \in [0, b], \ \forall \mu.$$

Доказательство. Заменим (6) на более слабое неравенство

$$0 \leqslant v_\mu(x) \leqslant A + \varkappa \int\limits_0^x \ln\frac{b}{\xi} v_\mu(\xi)d\xi, \quad x \in [0, b].$$

Положим

$$V_\mu(x) = \int\limits_0^x \ln\frac{b}{\xi} v_\mu(\xi)d\xi \geqslant 0, \quad V'_\mu(x) = \ln\frac{b}{x} v_\mu(x), \quad V_\mu(0) = 0.$$

$$0 \leqslant \frac{V'_\mu(x)}{\ln(b/x)} \leqslant A + \varkappa V_\mu(x), \tag{7}$$

$$0 \leqslant V'_\mu(x) \leqslant A\ln\frac{b}{x} + \varkappa V_\mu(x)\ln\frac{b}{x}.$$

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \bar{V}'(x) = A\ln\dfrac{b}{x} + \varkappa\bar{V}(x)\ln\dfrac{b}{x}, \\ \bar{V}(0) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Её решение имеет вид

$$\bar{V}(x) = \bar{V}_0(x) \int\limits_0^x \frac{A\ln(b/\xi)}{\bar{V}_0(\xi)}d\xi, \quad \bar{V}_0(x) = e^{b\varkappa x}\left(\frac{x}{b}\right)^{-\varkappa x},$$

так как $0 < C_0 \leqslant \bar{V}_0(x) \leqslant C_1$, то очевидно, что $\bar{V}(x)$ — ограниченная и положительная функция. Покажем, что $0 \leqslant V_\mu(x) \leqslant \bar{V}(x)$. Действительно, существует такая функция $\rho_\mu(x)$, что

$$V'_\mu(x) = \rho_\mu(x)\left(A\ln\frac{b}{x} + \varkappa\ln\frac{b}{x}V_\mu(x)\right), \quad 0 \leqslant \rho_\mu(x) \leqslant 1.$$

Обозначив разность $\bar{V}(x) - V_\mu(x) = d_\mu(x)$, получим, совмещая последнее уравнение и (8), следующую задачу:

$$\begin{cases} d'_\mu(x) = \bar{\rho}_\mu(x)\left(A\ln\dfrac{b}{x} + \varkappa\ln\dfrac{b}{x}d_\mu(x)\right), \\ d_\mu(0) = 0. \end{cases}$$

где $0 \leqslant \bar{\rho}_\mu(x) = 1 - \rho_\mu(x) \leqslant 1$. Последняя задача решается в квадратурах. С учётом свойств коэффициентов уравнения, анализируя полученный интеграл, имеем $d_\mu(x) \geqslant 0$, что равносильно $V_\mu(x) \leqslant \bar{V}(x) \leqslant \bar{C} = \mathrm{const}$.

Выразим $V'_\mu(x)$ через $v_\mu(x)$ и подставим данное соотношение и полученную оценку в (7):

$$0 \leqslant \ln\frac{b}{x}v_\mu(x) \leqslant A\ln\frac{b}{x} + \varkappa\ln\frac{b}{x}\bar{C},$$

$$0 \leqslant v_\mu(x) \leqslant A + \varkappa\bar{C} = C.$$

Лемма доказана. □

Лемма 2. *Рассмотрим задачу*

$$\begin{cases} \mu x\dfrac{d\hat{w}}{dx} + 2\sqrt{x}R_\mu(x)\hat{w} + \mu A(x)\hat{w} + \mu B(x)\hat{z}(x) = \mu\Phi(x,\mu), \\ \hat{w}(0,\mu) = 0, \end{cases} \tag{9}$$

где $\hat{z}(x)$ — некоторая ограниченная и интегрируемая на $[0,b]$ функция. Тогда решение (классическое) $\hat{w}(x)$ задачи (9) существует, единственно и для любого $x \in [0,b]$ справедливы оценки:

$$|\hat{w}(x)| \leqslant W_1 + W_2 \max_{\xi\in[0,x]} |\hat{z}(\xi)|, \quad |\hat{w}(x)| \leqslant W_1 + W_2\frac{1}{x}\int\limits_0^x |\hat{z}(\xi)|d\xi, \tag{10}$$

где константы W_1 и W_2 не зависят от x, μ и $\hat{z}(x)$.

Доказательство. **I.** Найдём решение однородного уравнения (9):

$$\mu x\frac{d\overset{\circ}{w}}{dx} + 2\sqrt{x}R_\mu(x)\overset{\circ}{w} + \mu A(x)\overset{\circ}{w} = 0, \quad \frac{d\overset{\circ}{w}}{\overset{\circ}{w}} = \left(-\frac{2}{\sqrt{x}}R_\mu(x) - \frac{A(x)}{x}\right)dx,$$

$$\overset{\circ}{w}(x) = \exp\left(-\int\limits_b^x \frac{2R_\mu(\xi)}{\mu\sqrt{\xi}}d\xi\right)\exp\left(-\int\limits_b^x \frac{A(\xi)}{\xi}d\xi\right).$$

Введём обозначение

$$P(x,\mu) = -\int\limits_b^x \frac{2R_\mu(\xi)}{\sqrt{\xi}}d\xi.$$

Функция $P(x,\mu)$ при каждом фиксированном $\mu > 0$ является непрерывной, монотонно убывающей на $[0,b]$ функцией переменного x.

Разложим $A(x) = c_0 + \bar{A}(x)$. Заметим, что $\bar{A}(x)/x$ является непрерывной функцией на $[0,b]$. Тогда

$$\exp\left(-\int\limits_b^x \frac{A(\xi)}{\xi}d\xi\right) = \exp\left(-\int\limits_b^x \frac{c_0}{\xi}d\xi\right)\exp\left(-\int\limits_b^x \frac{\bar{A}(\xi)}{\xi}d\xi\right) =$$

$$= \exp\left(c_0\ln b - c_0\ln x\right)\exp\left(-\int\limits_b^x \frac{\bar{A}(\xi)}{\xi}d\xi\right) = x^{-c_0}\hat{A}(x),$$

где

$$0 < C_1 \leqslant \hat{A}(x) = b^{c_0}\exp\left(-\int\limits_b^x \frac{\bar{A}(\xi)}{\xi}d\xi\right) \leqslant C_2.$$

Объединяя оценки воедино, получим

$$C_1 e^{P(x,\mu)/\mu}x^{-c_0} \leqslant \overset{\circ}{w}(x) \leqslant C_2 e^{P(x,\mu)/\mu}x^{-c_0}.$$

II. Методом вариации произвольной постоянной получим решение задачи (9):

$$\hat{w}(x) = \overset{\circ}{w}(x)\int\limits_0^x \frac{\Phi(\xi,\mu) - B(\xi)\hat{z}(\xi)}{\xi\,\overset{\circ}{w}(\xi)}d\xi.$$

Для получения равномерной оценки (10) вынесем максимум модуля $\hat{z}(x)$ из интеграла. Положим $M = \max\limits_{\xi\in[0,x],\mu\in[0,\mu_0]}(|\Phi(\xi,\mu)|, |B(\xi)|)$.

$$|\hat{w}(x)| \leqslant \int\limits_0^x \frac{|\Phi(\xi,\mu)| \overset{\circ}{w}(x)}{\xi \overset{\circ}{w}(\xi)} d\xi + \max_{\xi\in[0,x]} |\hat{z}(\xi)| \int\limits_0^x \frac{|B(\xi)| \overset{\circ}{w}(x)}{\xi \overset{\circ}{w}(\xi)} d\xi \leqslant$$
$$\leqslant M\left(1 + \max_{\xi\in[0,x]}|\hat{z}(\xi)|\right) \int\limits_0^x \frac{C_2 e^{P(x,\mu)/\mu} x^{-c_0}}{\xi C_1 e^{P(\xi,\mu)/\mu}\xi^{-c_0}} d\xi =$$
$$= \frac{MC_2}{C_1}\left(1 + \max_{\xi\in[0,x]}|\hat{z}(\xi)|\right) x^{-c_0} \int\limits_0^x e^{(P(x,\mu)-P(\xi,\mu))/\mu}\xi^{c_0-1} d\xi \leqslant$$
$$\leqslant \frac{MC_2}{C_1}\left(1 + \max_{\xi\in[0,x]}|\hat{z}(\xi)|\right) x^{-c_0} \int\limits_0^x \xi^{c_0-1} d\xi = \frac{MC_2}{C_1 c_0}\left(1 + \max_{\xi\in[0,x]}|\hat{z}(\xi)|\right).$$

Теперь получим интегральную оценку (10). Отметим, что $x \overset{\circ}{w}(x)/\xi \overset{\circ}{w}(\xi) \leqslant C_2/C_1$ при $0 \leqslant \xi \leqslant x$. Обозначим как $\bar{M}$ следующую величину

$$\bar{M} = \max\left(\frac{x \overset{\circ}{w}(x)|B(\xi)|}{\xi \overset{\circ}{w}(\xi)}\right),$$

где максимум берётся по всем $\mu \in [0,\mu_0]$, $x \in [0,b]$, $\xi \in [0,x]$.

Оценим $\hat{w}(x)$ иначе:

$$|\hat{w}(x)| \leqslant \int\limits_0^x \frac{|\Phi(\xi,\mu)| \overset{\circ}{w}(x)}{\xi \overset{\circ}{w}(\xi)} d\xi + \frac{1}{x}\int\limits_0^x \frac{x \overset{\circ}{w}(x)|B(\xi)||\hat{z}(\xi)|}{\xi \overset{\circ}{w}(\xi)} d\xi \leqslant \frac{MC_2}{C_1 c_0} + \bar{M}\frac{1}{x}\int\limits_0^x |\hat{z}(\xi)| d\xi.$$

Лемма доказана. □

Лемма 3. *Рассмотрим задачу*

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{z}}{dx} = D(x)\hat{z} + \hat{w}(x) + \varphi(x,\mu), \\ \hat{z}(0,\mu) = 0, \end{cases} \tag{11}$$

где $\hat{w}(x)$ — некоторая ограниченная и интегрируемая на $[0,b]$ функция. Тогда (классическое) решение $\hat{z}(x)$ задачи (11) существует, единственно и для любого $x \in [0,b]$ справедлива оценка

$$|\hat{z}(x)| \leqslant Z_1 + Z_2 \int\limits_0^x |\hat{w}(\xi)| d\xi, \tag{12}$$

где константы Z_1 и Z_2 не зависят от x, μ и выбора $\hat{w}(x)$.

Доказательство. **I.** Аналогично доказательству леммы 2 найдём решение однородного уравнения

$$\frac{d \overset{\circ}{z}}{dx} = D(x) \overset{\circ}{z}, \quad 0 < \bar{Z}_1 \leqslant \overset{\circ}{z}(x) = \exp\left(\int\limits_0^x D(\xi) d\xi\right) \leqslant \bar{Z}_2.$$

II. Решение задачи (11) имеет вид

$$\hat{z}(x) = \overset{\circ}{z}(x) \int\limits_0^x \frac{\hat{w}(\xi) + \varphi(\xi,\mu)}{\overset{\circ}{z}(\xi)} d\xi,$$

применяя полученные оценки $\overset{\circ}{z}(x)$, придём к неравенству

$$|\hat{z}(x)| \leqslant \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1}\left(\max_{\xi\in[0,x],\mu\in[0,\mu_0]}|\varphi(\xi,\mu)| + \int\limits_0^x |\hat{w}(\xi)|d\xi\right),$$

что и требовалось доказать. □

Лемма 4. *Решение* $\{\hat{z}(x),\hat{w}(x)\}$ *системы* (5) *равномерно ограничено по* $x\in[0,b]$, $\mu\in[0,\mu_0]$, *если существует.*

Доказательство. Система (5) является объединением задач (9) и (11). Её решение существует, следовательно, является непрерывным на $[0,b]$ при каждом фиксированном $\mu>0$. Применяя лемму 2 и второе соотношение (10), а также лемму 3 и соотношение (12), получим

$$|\hat{w}(x)| \leqslant W_1 + W_2\frac{1}{x}\int\limits_0^x |\hat{z}(\xi)|d\xi. \quad |\hat{z}(x)| \leqslant Z_1 + Z_2\int\limits_0^x |\hat{w}(\xi)|d\xi.$$

Совместим данные неравенства:

$$|\hat{z}(x)| \leqslant Z_1 + Z_2\int\limits_0^x\left(W_1 + W_2\frac{1}{\xi}\int\limits_0^\xi |\hat{z}(\zeta)|d\zeta\right)d\xi \leqslant$$

$$\leqslant Z_1 + bZ_2W_1 + Z_2W_2\int\limits_0^x |\hat{z}(\zeta)|\int\limits_\zeta^x \frac{1}{\xi}d\xi d\zeta = Z_1 + bZ_2W_1 + Z_2W_2\int\limits_0^x |\hat{z}(\zeta)|\ln\frac{x}{\zeta}d\zeta.$$

Таким образом, для $|\hat{z}(x)|$ выполнены все условия леммы 1, следовательно, существует такая постоянная $C_1>0$, что $|\hat{z}(x)|\leqslant C_1$ равномерно по всем $x\in[0,b]$, $\mu\in[0,\mu_0]$.

Используя первое неравенство (10) леммы 2, оценим $\hat{w}(x)$.

$$|\hat{w}(x)| \leqslant W_1 + W_2\max_{\xi\in[0,x]}|\hat{z}(\xi)| \leqslant W_1 + W_2C_1 = C_2.$$

Лемма доказана. □

3. Основная теорема. Сформулируем и докажем теорему о предельном переходе в задаче (2) при $\mu\to 0+0$.

Теорема 1. *Пусть решение задачи* (2) *существует. Тогда найдётся такая постоянная* $M>0$, *не зависящая от* μ, *что* $|z(x,\mu)|, |z'_x(x,\mu)|\leqslant M$, $|z''_{xx}(x,\mu)|\leqslant M/\mu x$, $x\in[0,b]$, $\mu\in(0,\mu_0]$. *Кроме того, решение* $z(x,\mu)$ *задачи* (2) *сходится к решению* $\bar{z}(x)$ *предельной задачи* (3) *при* $\mu\to 0+0$ *равномерно по* $x\in[0,b]$. *Для любого* $\varepsilon\in(0,b)$ $z'_x(x,\mu)$ *сходится к* $\bar{z}'(x)$ *при* $\mu\to 0+0$ *равномерно по* $x\in[\varepsilon,b]$.

Доказательство. Из леммы 4 следует равномерная ограниченность $|\hat{z}(x,\mu)|$ и $|\hat{w}(x,\mu)|$.

$$z(x) = \hat{z}(x)+1, \quad z'(x) = w(x) = \varphi(x,\mu) + \varphi(x,0)\hat{z}(x) + \hat{w}(x),$$

$$z''(x) = w'(x) = -\frac{2\sqrt{x}R_\mu(x)w(x) + \mu c(x)w(x) + \bar{c}(x)\sqrt{x}R_\mu(x)z(x) - \mu a(x)z(x)}{\mu x},$$

из чего, очевидно, следуют оценки теоремы. Кроме того, из этого факта следует предкомпактность множества решений $\{z(x,\mu)\}_{\mu>0}$ в $C[0,b]$, а значит, и $\{\hat{z}(x,\mu)\}_{\mu>0}$.

В доказательстве леммы 2 было получено интегральное выражение для $\hat{w}(x)$:

$$\hat{w}(x) = \overset{\circ}{w}(x)\int\limits_0^x \frac{\Phi(\xi,\mu) - B(\xi)\hat{z}(\xi)}{\xi\,\overset{\circ}{w}(\xi)}d\xi = \int\limits_0^x \frac{\overset{\circ}{w}(x)}{\xi\,\overset{\circ}{w}(\xi)}L(\xi,\mu)d\xi,$$

где $|L(x,\mu)|<C_3$ в силу доказанной ограниченности $\hat{z}(x)$.

Применим в данном неравенстве оценки $\overset{\circ}{w}(x)$ сверху и снизу из доказательства леммы 2.

$$|\hat{w}(x)| \leqslant C_3 \int\limits_0^x \frac{C_2 x^{-c_0} \exp(P(x,\mu)/\mu)}{\xi C_1 \xi^{-c_0} \exp(P(\xi,\mu)/\mu)} d\xi \leqslant \frac{C_3 C_2}{C_1} \cdot \frac{1}{x} \int\limits_0^x \frac{x \exp(P(x,\mu)/\mu)}{\xi \exp(P(\xi,\mu)/\mu)} d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_3 C_2}{C_1 \varepsilon} \int\limits_0^x \exp\left(\frac{1}{\mu}(P(x,\mu) - P(\xi,\mu))\right) d\xi = \frac{C_3 C_2}{C_1 \varepsilon} \int\limits_0^x \exp\left(-\frac{1}{\mu} \int\limits_\xi^x \frac{2R_\mu(\zeta)}{\sqrt{\zeta}} d\zeta\right) d\xi.$$

При достаточно малых μ имеет место оценка снизу $2R_\mu(x) \geqslant x/b$. Таким образом,

$$|\hat{w}(x)| \leqslant \frac{C_3 C_2}{C_1 \varepsilon} \int\limits_0^x \exp\left(-\frac{1}{\mu} \int\limits_\xi^x \frac{2p\zeta}{b\sqrt{\zeta}} d\zeta\right) d\xi = \frac{2pC_3 C_2}{C_1 \varepsilon} \int\limits_0^x \exp\left(-\frac{2}{3b\mu} \frac{x^3 - \xi^3}{x^{3/2} + \xi^{3/2}}\right) d\xi \leqslant$$

$$= \frac{2pC_3 C_2}{C_1 \varepsilon} \int\limits_0^x \exp\left(-\frac{1}{3b^{5/2}\mu}(x-\xi)(x^2 + x\xi + \xi^2)\right) d\xi \leqslant \frac{2pC_3 C_2}{C_1 \varepsilon} \int\limits_0^x \exp\left(-\frac{1}{\mu} \frac{\varepsilon^2}{3b^{5/2}}(x-\xi)\right) d\xi.$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon \in (0,b)$ и введём величины $C_4 = \varepsilon^2/3b^{5/2} \geqslant 0$, $C_5 = 2pC_3C_2/C_1\varepsilon \geqslant 0$. Тогда

$$|\hat{w}(x)| \leqslant C_5 \int\limits_0^x \exp\left(-\frac{C_4}{\mu}(x-\xi)\right) d\xi \leqslant \mu \frac{C_5}{C_4} \exp\left(-\frac{C_4}{\mu} x\right) \exp\left(\frac{C_4}{\mu} x\right) = C\mu \longrightarrow 0,$$

т.е. $\hat{w}(x) \to 0$ равномерно на любом $[\varepsilon, b]$ при $\mu \to 0+0$. Так как $\hat{w}(x)$ равномерно ограничена на $[0,b]$, то она сходится на нём к 0 в среднем.

Выделим из $\{z(x,\mu)\}_{\mu>0}$ произвольную последовательность, имеющую равномерный предел. Пусть $\hat{z}(x,\mu_l) \to \tilde{z}(x)$ при $\mu_l \to 0+0$. Перейдём от задачи (5) к эквивалентной ей системе интегральных уравнений и подставим в неё $\hat{z}(x,\mu_l)$ и $\hat{w}(x,\mu_l)$.

$$\begin{cases} \int\limits_0^x \mu\xi \frac{d\hat{w}}{dx}(\xi) d\xi \equiv \mu x \hat{w}(x) - \int\limits_0^x \mu \hat{w}(\xi) d\xi = \\ \qquad = \int\limits_0^x [\mu\Phi(\xi,\mu) - 2\sqrt{\xi} R_\mu(\xi)\hat{w}(\xi) - \mu A(\xi)\hat{w}(\xi) - \mu B(\xi)\hat{z}(\xi)] d\xi, \\ \hat{z}(x) = \int\limits_0^x [D(\xi)\hat{z}(\xi) + \hat{w}(\xi) + \varphi(\xi,\mu)] d\xi. \end{cases}$$

Данная система допускает предельный переход при $\mu_l \to 0+0$. Первое уравнение обратится в тождество $0 = 0$, из второго будет получено

$$\tilde{z}(x) = \int\limits_0^x [D(\xi)\tilde{z}(\xi) + \varphi(\xi,0)] d\xi. \tag{13}$$

Решение $\tilde{z}(x)$ этого уравнения существует и единственно. Таким образом, множество $\{\hat{z}(x,\mu)\}_{\mu>0}$ имеет единственную в $C[0,b]$ предельную точку $\tilde{z}(x)$, являющуюся решением интегрального уравнения (13). Мы доказали, что при $\mu \to 0+0$ $\hat{z}(x,\mu) \to \tilde{z}(x)$ равномерно на $[0,b]$, для любого $\varepsilon \in (0,b]$ $\hat{w}(x,\mu) \to 0$ равномерно на $[\varepsilon,b]$. Так как $\varphi(x,0) = -\bar{c}(x)/2 = D(x)$, то уравнение (13) примет вид

$$\tilde{z}(x) = -\int\limits_0^x \frac{\bar{c}(x)}{2}(\tilde{z}(\xi) + 1) d\xi.$$

Отметим, что при $\mu \to 0+0$, $z(x,\mu)$ сходится равномерно к $\bar{\bar{z}}(x) = \tilde{z}(x) - 1$. Тогда

$$\bar{\bar{z}}(x) = 1 - \int\limits_0^x \frac{\bar{c}(x)}{2}\bar{\bar{z}}(\xi)d\xi.$$

Дифференцируя это уравнение, получаем для $\bar{\bar{z}}(x)$ задачу (3), т.е. именно решение (3) $\bar{z}(x)$ является равномерным пределом $z(x,\mu)$.

$$z'(x,\mu) = w(x,\mu) = \varphi(x,\mu) + \varphi(x,0)\hat{z}(x,\mu) + \hat{w}(x,\mu) \to \varphi(x,0)\cdot(1+\tilde{z}(x)) = -\frac{\bar{c}(x)}{2}\bar{z}(x) = \bar{z}'(x),$$

указанная сходимость — равномерная на $[\varepsilon, b]$ для любого $b \geqslant \varepsilon > 0$. Теорема доказана. □

Приведём следствия теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть решение задачи* (1) $y_k(x)$ *существует. Тогда*

$$y_k(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\pi k i\sqrt{x})^\alpha} J_\alpha(2\pi k i\sqrt{x})\left(\exp\left(-\int\limits_0^x \frac{\bar{c}(\xi)}{2}d\xi\right) + \bar{o}(1)\right)$$

при $k \to +\infty$ *равномерно на* $[0,b]$.

Для доказательства достаточно найти решение задачи (3) $\bar{z}(x)$, применить теорему 1 о равномерной сходимости $z(x,\mu)$ к $\bar{z}(x)$ и вернуться к изначальным обозначениям задачи (1).

Теорема 3. *Пусть решение задачи* (1) $y_k(x)$ *существует. Тогда найдутся такие не зависящие от* $x \in [0,b]$ *и* $k > 0$ *постоянные* $C_1 > 0$ *и* $C_2 > 0$, *что при достаточно больших* k *имеют место неравенства*

$$0 < C_1 \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}} \leqslant y_k(x) \leqslant C_2 \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}, \tag{14}$$

$$0 < C_1 \cdot k \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}} \leqslant y_k'(x) \leqslant C_2 \cdot \frac{k}{\sqrt{x}} \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}, \tag{15}$$

$$|y_k''(x)| \leqslant C_2 \cdot \frac{k^2}{x} \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}. \tag{16}$$

Доказательство. **I.** Воспользуемся разложением $y_k(x) = \bar{y}_k(x)z_k(x)$, где $z_k(x) = z(x, \mu = 1/\pi k)$. При $t \to +\infty$ имеет место следующая асимптотическая формула (см. [2, с. 222]):

$$J_\alpha(it) = \frac{\text{const}}{\sqrt{t}}e^t\left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right).$$

Применим её к $\bar{y}_k(x)$. Существуют такие постоянные $A > 0$, $B_1 > 0$ и $B_2 > 0$, что выполнены неравенства

$$0 < B_1\frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}} \leqslant \bar{y}_k(x) \leqslant B_2\frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}, \quad k\sqrt{x} \geqslant A.$$

При $0 \leqslant k\sqrt{x} \leqslant A$ можно выбрать постоянные $B_3 > 0$ и $B_4 > 0$ так, что

$$0 < B_3 \leqslant \bar{y}_k(x) \leqslant B_4, \quad 0 \leqslant k\sqrt{x} \leqslant A.$$

Совмещая их воедино, имеем

$$0 < B_5\frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}} \leqslant \bar{y}_k(x) \leqslant B_6\frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}, \quad B_5, B_6 > 0. \tag{17}$$

Аналогично могут быть оценены производные:

$$
\begin{gathered}
\bar{y}_k'(x) = -\frac{\pi k i}{\sqrt{x}}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\pi k i\sqrt{x})^{\alpha}} J_{\alpha+1}(2\pi k i\sqrt{x}), \\
0 < B_5 k \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}} \leqslant \bar{y}_k'(x) \leqslant B_6\frac{k}{\sqrt{x}} \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}, \quad B_5, B_6 > 0.
\end{gathered} \tag{18}
$$

$$
\begin{gathered}
\bar{y}_k''(x) = -\frac{\pi^2 k^2}{x}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\pi k i\sqrt{x})^{\alpha}} J_{\alpha+2}(2\pi k i\sqrt{x}), \\
\bar{y}_k''(x) \leqslant B_6\frac{k^2}{x} \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}.
\end{gathered} \tag{19}
$$

II. В силу теоремы 1

$$
z_k(x) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \bar{z}(x),
$$

где $\bar{z}(x)$ — решение задачи (3). Тогда найдётся достаточно большой номер k_0 и такие постоянные $D_1 > 0$ и $D_2 > 0$, что

$$
0 < D_1 \leqslant z_k(x) \leqslant D_2, \quad |z_k'(x)| \leqslant D_2, \quad |z_k''(x)| \leqslant D_2 \cdot \frac{k}{x}
$$

при $k \geqslant k_0$. В совокупности с неравенствами (17) эти оценки дают (14). Далее,

$$
y_k'(x) = \bar{y}_k'(x) z_k(x) + \bar{y}_k(x) z_k'(x),
$$

В силу неравенств (17) и (18)

$$
|y_k'(x)| \leqslant D_2 B_6 \frac{k}{\sqrt{x}} \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}} + D_2 B_6 \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}} \leqslant C_2 \frac{k}{\sqrt{x}} \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}.
$$

$$
\begin{aligned}
|y_k'(x)| &\geqslant D_1 B_5 k \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}} - D_2 B_6 \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}} = \\
&= k \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}} \left(D_1 B_5 - \frac{D_2 B_6}{k}\right) \geqslant C_1 k \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}
\end{aligned}
$$

при $(D_1 B_5 - D_2 B_6/k) \geqslant C_1 > 0$, что выполнено при $k \geqslant k_0$. Оценки (15) доказаны. Аналогично, применяя в оценке $y_k''(x)$ неравенства (17), (18) и (19), получим неравенство (16).

$$
|y_k''(x)| \leqslant D_2 B_6 \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}} \left(\frac{k^2}{x} + \frac{2k}{\sqrt{x}} + \frac{k}{x}\right) \leqslant C_2 \frac{k^2}{x} \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}.
$$

Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущённых уравнений. — М.: Наука, 1973.
2. *Ватсон Дж. Н.* Теория бесселевых функций. — М.: ИЛ, 1949.
3. *Емельянов Д. П., Ломов И. С.* Построение точных решений нерегулярно вырождающихся эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами// Диффер. уравн. — 2019. — *55*, № 1. — С. 45–58.
4. *Келдыш М. В.* О некоторых случаях вырожденных уравнений эллиптического типа на границе области// Докл. АН СССР. — 1951. — *77*, № 2. — С. 181–183.
5. *Келдыш М. В.* Избранные труды. Математика. — М.: Наука, 1985.
6. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Введение в спектральную теорию (самосопряжённые обыкновенные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1970.
7. *Ломов И. С.* Малые знаменатели в аналитической теории вырождающихся дифференциальных уравнений// Диффер. уравн. — 1993. — *29*, № 12. — С. 1090–1090.

8. *Ломов И. С.* Метод спектрального разделения переменных для нерегулярно вырождающихся эллиптических дифференциальных операторов// Докл. РАН. — 2001. — *376*, № 5. — С. 593–596.
9. *Ломов С. А., Ломов И. С.* Основы математической теории пограничного слоя. — М.: Изд-во МГУ, 2011.

Емельянов Дмитрий Павлович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: `emelianov@cs.msu.ru`

Ломов Игорь Сергеевич
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: `lomov@cs.msu.ru`