ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 207 (2022). С. 61–67
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-207-61-67

УДК 517.521.5, 517.521.8

РАВНОСХОДИМОСТЬ И РАВНОСУММИРУЕМОСТЬ ПОЧТИ ВСЮДУ КРАТНОГО ОРТОГОНАЛЬНОГО РЯДА ПРИ РАЗНЫХ ВИДАХ СХОДИМОСТИ

© 2022 г. **Б. В. КОНОПЛЕВ**

Аннотация. Работа посвящена получению коэффициентных условий, обеспечивающих равносходимость и чезаровскую равносуммируемость почти всюду кратного ортогонального ряда при его суммировании по двум различным системам вложенных множеств, покрывающих целочисленную решётку арифметического пространства.

***Ключевые слова*:** кратный ортогональный ряд, частичная сумма, среднее Чезаро, сходимость почти всюду, суммируемость почти всюду, звёздное тело, гомотетия, кратный тригонометрический ряд.

EQUICONVERGENCE AND EQUISUMMABILITY ALMOST EVERYWHERE OF A MULTIPLE ORTHOGONAL SERIES FOR VARIOUS TYPES OF CONVERGENCE

© 2022 **B. V. KONOPLEV**

Abstract. In this paper, we obtain coefficient conditions that guarantee the equiconvergence and Cesaro equisummability almost everywhere of a multiple orthogonal series summed over two different systems of nested sets covering an integer lattice of the arithmetic space.

***Keywords and phrases*:** multiple orthogonal series, partial sum, Cesaro mean, convergence almost everywhere, summability almost everywhere, star body, homothety, multiple trigonomrtric series.

***AMS Subject Classification*:** 35L20, 35P10

1. Основные понятия. Пусть $\varphi_n(x)$, где $n = (n_1, n_2, \ldots, n_m) \in \mathbb{Z}^m$, — система комплексно-значных функций, ортонормированная в пространстве Лебега $L^2_\mu(\Omega)$ над измеримым пространством (Ω, Σ, μ) со счётно-аддитивной мерой μ:

$$\int\limits_{\Omega} \varphi_n(x)\overline{\varphi_{n'}(x)}d\mu = \prod_{j=1}^{m} \delta_{n_j n'_j},$$

где $\delta_{n_j n'_j}$ — символы Кронекера соответствующих координат мультииндексов n и n'. Рассмотрим m-кратный ортогональный ряд

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^m} a_n\varphi_n(x), \tag{1}$$

с комплексными коэффициентами. Частным случаем ряда (1) является кратный тригонометрический ряд

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^m} c_n e^{inx}, \quad nx = \sum_{j=1}^{m} n_j x_j, \tag{2}$$

на m-мерном торе $T_m = [0, 2\pi)^m$ с мерой Лебега.

Существует много различных способов определения частичных сумм ряда (1). Остановимся на следующем.

Определение 1. Назовём систему ограниченных и связных в $\mathbb{R}^m$ множеств $\{D_N\}_{N=0}^{\infty}$ суммирующей, если

$$D_0 \neq \varnothing, \quad D_N \subset D_{N+1}, \quad \mathbb{Z}^m \subset \bigcup_{N=1}^{\infty} D_N.$$

Из соображений «правильности» суммирования потребуем, чтобы начало координат $O \in D_0$, и D_1 содержало точки ± 1 на координатных осях.

Под частичными суммами ряда (1) по системе $\{D_N^{\infty}\}_{N=0}^{\infty}$ будем понимать

$$S(D_N, x) = \sum_{n\in D_N} a_n \varphi_n(x), \tag{3}$$

а под сходимостью этого ряда при $x_0 \in \Omega$ — существование предела

$$\lim_{N\to\infty} S(D_N, x_0).$$

Подобные способы суммирования кратного ряда удобны тем, что суммы (3) совпадают с частичными суммами однократно ортогонального ряда. В самом деле, поскольку

$$D_N = D_0 \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{N} (D_j \backslash D_{j-1}) \right),$$

обозначим

$$\alpha_0^2 = \sum_{N\in D_0} |a_n|^2, \quad \alpha_j^2 = \sum_{n\in D_j\backslash D_{j-1}} |a_n|^2,$$

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\alpha_0} \sum_{n\in D_0} a_n\varphi_n(x), \quad \Phi_j(x) = \frac{1}{\alpha_j} \sum_{n\in D_j\backslash D_{j-1}} a_n\varphi_n(x).$$

Тогда

$$S(D_N, x) = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j \Phi_j(x)$$

— частичная сумма однократного ортогонального в $L^2_\mu(\Omega)$ ряда по ортонормированный системе $\{\Phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$. Данное наблюдение позволяет применять к частичным суммам (3) результаты, известные для однократных рядов.

Наряду с частичными суммами (3) ряда (1) будем рассматривать также их средние Чезаро

$$\sigma^{\alpha}(D_N, X) = \frac{1}{A_N^{\alpha}} \sum_{j=0}^{N} A_{N-j}^{\alpha-1} S(D_j, x),$$

где

$$A_j^{\alpha} = \binom{j+\alpha}{j}, \quad \alpha \neq -1, -2, \ldots$$

При $\alpha = 1$

$$\sigma^1(D_N, x) = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^{N} S(D_j, x),$$

совпадают со средними арифметическими сумм (3).

Под (C, α)-суммируемостью ряда (1) при $x_0 \in \Omega$ будем понимать существование предела

$$\lim_{N\to\infty} \sigma^{\alpha}(D_N, x_0).$$

Рассмотрим важный случай построения суммирующей системы множеств.

Определение 2. Назовём область (замкнутую область) D евклидова пространства $\mathbb{R}^m$, внутренней точкой которой является начало O, звёздным телом (с центром O), если выполнено свойство лучистости относительно O: при $x \in \overline{D}$ весь отрезок $[O, x) \subset D$ (здесь $O \in [O, x)$, $x \notin [O, x)$). Частным случаем звёздного тела является выпуклое тело.

Звёздные тела играют важную роль в геометрической теории чисел (см. [7,10]). В монографии Дж. В. С. Кассела (см. [7, с. 111]) в определении звёздного тела не предполагается открытость, лишь требуется, что O — его внутренняя точка. Далее в статье А. В. Малышева [10] звёздное тело предполагается открытым (или его замыканием. Считаем открытое звёздное тело областью, так как его связность (см. [6, с. 448–449]) является следствием свойства лучистости: две точки $x', x'' \in D$ можно соединить непрерывной линией, проходящей через объединение отрезков $[O, x'] \cup [O, x'']$. Параметрические уравнения этой линии легко выписываются.

Пусть теперь D — такое ограниченное звёздное тело, что точки ± 1 на осях принадлежат D. Рассмотрим систему гомотетий D с центром O: $\{ND\}_{N=0}^{\infty}$. Здесь $0D = \{O\}$, $1D = D$. Тогда это суммирующая система множеств, так как эти множества непустые, связные, в совокупности покрывающие все пространство; в нашем случае гомотетия D с большим коэффициентом содержит в себе его гомотетию с меньшим коэффициентом.

Частным случаем сходимости ряда (1) при суммировании по системе гомотетий является его сходимость по нормированным шарам $B_N = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| \leqslant N\}$, $N = 0, 1, \ldots$, где $\|\cdot\|$ — любая норма в $\mathbb{R}^m$. В частности, обозначив

$$\|x\|_p = (x_1^p + x_2^p + \ldots + x_m^p)^{1/p}, \quad 0 < p \leqslant +\infty; \quad \|x\|_\infty = \max_{j=\overline{1,m}} |x_j|,$$

получаем суммирующую систему гомотетий $\{B_N^p\}_{N=0}^{\infty}$, где $B_N^p = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\|_p \leqslant N\}$, звёздного тела B_1^p (для $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ — выпуклого тела). При $p = 2$ это суммирование по (евклидовым) шарам, $p = \infty$ — по кубам; при $m = 2$ для $p = 1$ частичные суммы по $\{B_N^1\}_{N=0}^{\infty}$ называют треугольными.

Определение 3. Традиционно назовем возрастающую последовательность $\{\nu_j\}$ натуральных чисел лакунарной, если найдется такое число q, что

$$1 < q \leqslant \frac{\nu_{j+1}}{\nu_j}, \quad j = 1, 2, \ldots$$

2. Равносходимость почти всюду при суммировании по двум различным суммирующим системам. Пусть $\{D_N\}_{N=0}^{\infty}$ и $\{F_N\}_{N=0}^{\infty}$ — две различные суммирующие системы множеств. Обозначим при $N = 0, 1, 2, \ldots$

$$D_N \Delta F_N = (D_N \cup F_N) \setminus (D_N \cap F_N) = (D_N \setminus F_N) \cup (F_N \setminus D_N)$$

симметрическую разность множеств D_N и F_N. Имеем для частичных сумм (3) ряда (1) по этим системам

$$S(D_N, x) = \left(\sum_{n \in D_N \setminus F_N} + \sum_{n \in D_N \cap F_N} \right) a_n \varphi_n(x), \quad S(F_N, x) = \left(\sum_{n \in F_N \setminus D_N} + \sum_{n \in D_N \cap F_N} \right) a_n \varphi_n(x)$$

(сумму по пустому множеству, если оно получается, считаем равной нулю). Разность этих сумм равна

$$\left(\sum_{n \in D_N \setminus F_N} - \sum_{n \in F_N \setminus D_N} \right) a_n \varphi_n(x)$$

Теорема 1. *Если выполняется условие*

$$\sum_{N=0}^{\infty}\left(\sum_{n\in D_N\Delta F_N}|a_n|^2\right)<+\infty, \tag{4}$$

то почти всюду на Ω

$$\lim_{N\to\infty}\left(S(D_N,x)-S(F_N,x)\right)=0, \tag{5}$$

т.е. последовательности частичных сумм кратного ортогонального ряда (1) *по системам множеств* $\{D_N\}_{N=0}^{\infty}$ *и* $\{F_N\}_{N=0}^{\infty}$ *либо одновременно сходится почти всюду на* Ω, *либо одновременно не обладают этим свойством.*

Доказательство. Рассмотрим

$$I_N=\int\limits_{\Omega}|S(D_N,x)-S(F_N,x)|^2d\mu=$$

$$=\int\limits_{\Omega}\left(\sum_{n\in D_N\setminus F_n}\alpha_n\varphi_n(x)-\sum_{n\in F_n\setminus D_N}\alpha_n\varphi_n(x)\right)\overline{\left(\sum_{n\in D_N\setminus F_n}\alpha_n\varphi_n(x)-\sum_{n\in F_n\setminus D_N}\alpha_n\varphi_n(x)\right)}d\mu.$$

Используя свойство комплексного сопряжения и ортонормированность функций $\varphi_n(x)$, получаем

$$I_N=\sum_{n\in D_N\Delta F_N}|a_n|^2,\quad N=0,1,2,\ldots$$

По условию теоремы ряд $\sum\limits_{N=0}^{\infty}I_N$ сходится, а следовательно, по теореме Б. Леви (см. [8, с. 348–350]) ряд из подынтегральных выражений

$$\sum_{N=0}^{\infty}|S(D_N,x)-S(F_N,x)|^2$$

сходится почти всюду на Ω, откуда его общий член стремится к нулю почти всюду но Ω, что и доказывает утверждение (5). □

Замечание 1. Условие (4), вообще говоря, не вытекает из условия суммируемости коэффициентов ряда (1) в квадрате: $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^m}|a_n|^2<+\infty$, однако при определенном взаиморасположении множеств D_N и F_N, это возможно.

Следствие 1. *Пусть две суммирующие системы множеств* $\{D_N\}_{N=0}^{\infty}$ *и* $\{F_N\}_N^{\infty}=0$ *обладают свойством*

$$F_N\subset D_N\subset F_{N+1},\quad N=1,2,\ldots$$

Тогда для любого кратного ортогонального ряда (1) *с коэффициентами, суммируемыми в квадрате, почти всюду на* Ω *имеет место* (5).

Доказательство. Ряд (4) приобретает в условиях следствия вид

$$\sum_{N=0}^{\infty}\left(\sum_{n\in D_N\setminus F_N}|a_n|^2\right), \tag{6}$$

где множества $D_N\setminus F_N$ при разных N попарно не пересекаются. Тогда выполнение условия

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^m}|a_n|^2<+\infty$$

влечёт сходимость ряда (6). □

Замечание 2. Следствие 1, в частности, доказывает равносходимость почти всюду подпоследовательностей частичных сумм кратного ортогонального ряда (1) с коэффициентами, суммируемыми в квадрате, по любой суммирующей системе множеств B с чётными и нечётными номерами:

$$\lim_{N\to\infty}(S(D_{2N},x)-S(D_{2N+1},x))=0$$

почти всюду на Ω.

Приведённые результаты позволяют установить равносходимость почти всюду одинаковых лакунарных подпоследовательностей частичных сумм кратного ортогонального ряда с квадратично суммируемыми коэффициентами по гомотетиям двух вложенных ограниченных звёздных тел.

Теорема 2. *Пусть два ограниченных звёздных тела D и F связаны соотношением $F\subset D$. Тогда почти всюду на Ω*

$$\lim_{j\to\infty}(S(\nu_j D,x)-S(\nu_j F,x))=0 \tag{7}$$

для любой лакунарной последовательности индексов $\{\nu_j\}$ и последовательностей соответствующих частичных сумм кратного ортогонального ряда (1) *с коэффициентами, суммируемыми в квадрате.*

Доказательство. Найдется такое число $q>1$, что $F\subset D\subset qF$. Преобразование гомотетии обладает свойством инцидентности (сохраняет принадлежность объектов), поэтому отношение включения сохраняется при гомотетии. Значит, для любой последовательности $\{\nu_j\}$, где $q\nu_j\leqslant\nu_{j+1}$, $j=1,2,\ldots$, имеем

$$\nu_j F\subset\nu_j D\subset\nu_{j+1}F$$

и, согласно следствию 1, почти всюду на Ω выполняется (7). Как известно (см. [3, с. 681]), всякую лакунарную последовательность $\{\nu_j\}$ можно разбить на конечное число попарно непересекающихся подпоследовательностей $\{\mu_i\}$, для которых $q\mu_i\leqslant\mu_{i+1}$, $i=1,2,\ldots$ □

В случае частичных сумм кратного ортогонального ряда по шарам и кубам соответствующий результат получен А. И. Буадзе (см. [4]).

3. Чезаровская равносуммируемость почти всюду по системам гомотетий двух различных звёздных тел. Рассмотрим суммирующие системы гомотетий $\{ND\}_{N=0}^{\infty}$, $\{NF\}_{N=0}^{\infty}$ двух различных ограниченных звёздных тел D и F и средние Чезаро частичных сумм ряда (1) по этим системам множеств $\sigma^\alpha(ND,x)$ и $\sigma^\alpha(NF,x)$, $N=0,1,\ldots$

Теорема 3. *Для любого кратного ортогонального ряда* (1) *с коэффициентами, суммируемыми в квадрате, и любых двух ограниченных звёздных тел $D,F\subset\mathbb{R}^m$, ряд почти всюду на Ω либо одновременно $(C,\alpha>0)$-суммируется по гомотетиям D и F, либо одновременно не обладает этим свойством.*

Доказательство. Найдутся такие коэффициенты гомотетии $k,l>1$, что $F\subset kD\subset klF$. Тогда можно записать $\mu_jF\subset\nu_jD\subset\mu_{j+1}F$, $j=1,2,\ldots$, где $\mu_j=k^{j-1}l^{j-1}$, $\nu_j=k^jl^{j-1}$ — геометрические прогрессии с одинаковым знаменателем $q=kl>1$.

Учитывая однократную природу частичных сумм кратного ряда по суммирующим системам множеств и используя критерий $(C,\alpha>0)$-суммируемости почти всюду ортогонального ряда, принадлежащий С. Качмажу и А. Зигмунду (см. [1, с. 127]), получаем, что сходимость каждой подпоследовательности частичных сумм $\{S(\mu_jF,X)\}$ и $\{S(\nu_jD,X)\}$ почти всюду на Ω обеспечивает $(C,\alpha>0)$-суммируемость ряда (1) почти всюду на Ω по соответствующей системе гомотетий, а её расходимость на множестве меры большей нуля, как лакунарной подпоследовательности частичных сумм ортогонального ряда, в силу соответствующей теоремы, принадлежащей А. Н. Колмогорову (см. [1, с. 125]) — отсутствие $(C,\alpha>0)$-суммируемости почти всюду на Ω по данной системе гомотетий.

Согласно следствию 1, подпоследовательности $S(\mu_jF,X)$ и $S(\nu_jD,X)$ сходятся или расходятся почти всюду на Ω одновременно, что и доказывает утверждение теоремы. □

Применим теорему 3 к кратным тригонометрическим рядам (2). Известно, что кратный тригонометрический ряд сходится почти всюду на T_m при суммировании по кубам $\{B_N^\infty\}_{N=0}^\infty$, если его коэффициенты суммируемы в квадрате. При $m = 1$ этот результат принадлежит Л. Карлесону [13], для $m = 2$ — Н. Р. Тевзадзе [12], причем обобщение результата Н. Р. Тевзадзе на случай рядов произвольной кратности не представляет труда (см. [2, с. 34]). Отметим также, что П. Шёлин [16] получим для данного вида сходимости более общий результат, обобщив на случай произвольной кратности результат Р. А. Ханта [14].

Здесь для нас важно, что в случае суммируемости коэффициентов ряда (2) в квадрате, этот ряд $(C, \alpha > 0)$-суммируется почти всюду на T_m по мере Лебега по системе кубов $\{B_N\}_{N=0}^\infty$. Это позволяет сформулировать следующее следствие теоремы 3.

Следствие 2. *Кратный тригонометрический ряд* (2) *с коэффициентами, суммируемыми в квадрате почти всюду на T_m по мере Лебега, $(C, \alpha > 0)$-суммируется по гомотетиям любого ограниченного звёздного тела.*

Для случая шаров $\{B_N^2\}_{N=0}^\infty$ это результат В. А. Ильина [5]. При $m = 2$ $(C, 1)$-суммируемость почти всюду тригонометрического ряда по треугольникам установлена А. Д. Нахманом [11].

Следствие 3. *Пусть коэффициенты кратного тригонометрического ряда* (2) *суммируемыми в квадрате. Тогда для любой лакунарной последовательности $\{\nu_j\}$ для любого ограниченного звёздного тела D соответствующая подпоследовательность частичных сумм ряда* (2) *$\{S(\nu_j D, x)\}$ по гомотетиям D сходится почти всюду на T_m по мере Лебега.*

Данное утверждение непосредственно вытекает из следствия 2, учитывая однократную структуру данных частичных сумм результат А. Н. Колмогорова (см. [1, с. 125]).

В случае частичных сумм ряда (2) по шарам $\{B_N^2\}_{N=0}^\infty$ подобный результат получил М. Кодзима [15] (см. также [11]).

Следующая теорема даёт достаточные коэффициентные условия $(C, \alpha > 0)$-суммируемости почти всюду ряда (1) по гомотетиям ограниченных звёздных тел.

Теорема 4. *Если коэффициенты ряда* (1) *удовлетворяют условию*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^m} |a_n|^2 \left(\ln\ln\left(\max_{j=\overline{1,m}} |n_j| + 3\right)\right)^2 < \infty, \tag{8}$$

то ряд $(C, \alpha > 0)$-суммируется почти всегда на Ω по гомотетиям любого ограниченного звёздного тела.

Доказательство. Учитывая теорему 3, достаточно получить результат для случая суммирования ряда по кубам $\{B_N^\infty\}_{N=0}^\infty$. Он будет верен для гомотетий любых ограниченных звёздных тел. Применяя результат Д. Е. Меньшова и С. Качмажа (см. [1, с. 132]), с учетом однократной структуры кубических частичных сумм ряда (1), можно записать условие $(C, \alpha > 0)$-суммируемости почти всюду как

$$\sum_{N=0}^{\infty} \left(\sum_{\max\limits_{j=\overline{1,m}} |n_j| = N} |a_n|^2 \right) (\ln\ln(N+3))^2 < +\infty.$$

Частичные суммы последнего ряда

$$\sum_{i=0}^{N} \left(\sum_{\max\limits_{j=\overline{1,m}} |n_j| = i} |a_n|^2 \right) (\ln\ln(i+3))^2 = \sum_{i=0}^{N} \left(\sum_{\max\limits_{j=\overline{1,m}} |n_j| = i} |a_n|^2 \right) (\ln\ln(i+3))^2 =$$

$$= \sum_{i=0}^{N} \left(\sum_{\max\limits_{j=\overline{1,m}} |n_j| = i} |a_n| \right) \left(\ln\ln(\max_{j=\overline{1,m}} |n_j| + 3)\right)^2 = \sum_{\max\limits_{j=\overline{1,m}} |n_j| \leqslant N} |a_n|^2 \left(\ln\ln(\max_{j=\overline{1,m}} |n_j| + 3)\right)^2$$

совпадают с соответствующими по номеру частичными суммами сходящегося кратного числового ряда (8). ☐

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексич Г.* Проблемы сходимости ортогональных рядов. — М.: ИЛ, 1963.
2. *Алимов Ш. А., Ильин В. А., Никишин Е. М.* Вопросы сходимости кратных ортогональных рядов и спектральных разложений, I// Усп. мат. наук. — 1976. — *31*, № 6. — С. 28–83.
3. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. — М., 1964.
4. *Буадзе А. И.* О расходимости сферических частных сумм кратных рядов Фурье// Сообщ. АН Груз. ССР. — 1976. — *84*, № 3. — С. 561–563.
5. *Ильин В. А.* О суммируемости рядов Фурье по собственным функциям средними Рисса, Чезаро и Пуассона—Абеля// Диффер. уравн. — 1966. — *2*, № 6. — С. 816–827.
6. *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х.* Математический анализ. — М.: Изд-во МГУ, 1985.
7. *Касселс Дж. В. С.* Введение в геометрию чисел. — М.: Мир, 1965.
8. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1989.
9. *Коноплев Б. В.* О равносуммируемости почти всюду кратных ортогональных рядов// Мат. междунар. конф. «Современные методы теории функций и смежные проблемы. Воронежская зимняя математическая школа» (Воронеж, 28 января — 2 февраля 2021 г.). — Воронеж, 2021. — С. 146–148.
10. *Малышев А. В.* Основные понятия и теоремы геометрии чисел// Чебышев. сб. — 2019. — *20*, № 3. — С. 44–73.
11. *Нахман А. Д.* О средних треугольного типа двойных рядов Фурье. — Деп. в ВИНИТИ, №1907-79 Деп.
12. *Тевзадзе Н. Р.* О сходимости двойного ряда Фурье функции, суммируемой с квадратом// Сообщ. АН Груз. ССР. — 1970. — *58*, № 2. — С. 277–279.
13. *Carleson L.* On convergence and growth of partial sums of Fourier series// Acta Math. — 1966. — *116*, № 1-2. — P. 135–157.
14. *Hunt R. A.* On the convergence of Fourier series// in: Proc. Conf. “Ortogonal Expansions and Their Continuous Analogues”. — Carbndale, Illinois: South Illinois Univ. Press, 1968. — P. 235–255.
15. *Kojima M.* On the almost everywhere convergence of lacunary spherical partial sums of multiple Fourier series// Sci. Rep. Kanazawa Univ. — 1979. — *24*, № 1. — P. 9–12.
16. *Sjölin P.* Convergence almost everywhere of certain singular integrals and multiple Fourier series// Arkiv Mat. — 1971. — *9*, № 1. — P. 65–90.

Коноплев Борис Владимирович
Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: `borikon@bk.ru`