ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 207 (2022). С. 68–76
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-207-68-76

УДК 519.626

ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС ПОИСКА ТОЧЕК СОВПАДЕНИЯ В МОДЕЛИ «СПРОС-ПРЕДЛОЖЕНИЕ»

© 2022 г. **А. М. КОТЮКОВ**

Аннотация. Построен алгоритм поиска положения равновесия в модели «спрос-предложение», основанный на теории накрывающих отображений и задаче о точках совпадения двух отображений. Алгоритм поиска основан на методе Хука—Дживса. Осуществлена программная реализация алгоритма, для верификации проведены численные эксперименты для размерностей модели 1–4.

Ключевые слова: точка совпадения, спрос, предложение, накрывающее отображение, итерационный процесс, экономическое равновесие.

ITERATIVE PROCESS OF THE SEARCH FOR COINCIDENCE POINTS IN THE MODEL “SUPPLY-DEMAND”

© 2022 **A. M. KOTYUKOV**

Abstract. In this paper, we construct an algorithm for finding equilibrium positions in the “supply-demand” model based on the theory of covering mappings and the problem of coincidence points for two mappings. The search algorithm is based on the Hooke–Jeeves method. A software implementation of the algorithm is verified by numerical experiments for model dimensions 1–4.

Keywords and phrases: coincidence point, demand, supply, covering mapping, iterative process, economic equilibrium.

AMS Subject Classification: 65J15

1. Введение. В статье изучается вопрос о нахождении положения равновесия в экономической модели «спрос-предложение».

Рассмотрим экономическую модель, в которой присутствуют две группы участников: производители и потребители. Производители производят некоторый набор товаров, который затем приобретается потребителями. Предположим, что экспорт отсутствует, т.е. весь произведенный товар уходит на потребительский рынок. Производители, выбирая тот или иной процесс производства, стремятся произвести такое количество товаров, которое максимизирует их прибыль. Потребители в рамках собственного бюджета стремятся максимально удовлетворить собственные потребности, приобретая тот или иной набор товаров.

Для обеспечения социальной и политической стабильности в регионе, в которой моделируется рынок, суммарное производство (т.е. предложение) должно быть не меньше, чем суммарное потребление (т.е. спрос). В противном случае на рынке возникает дефицит товаров, что негативно сказывается на жизни и благосостоянии общества. С другой стороны, переизбыток товара на рынке влечет за собой потери для производителя, поскольку при сохранении расходов он получает меньшую прибыль. Это, в свою очередь, ведет к уменьшению дохода потребителей, из-за чего

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 20-11-20131).

падает спрос и профицит увеличивается. Таким образом, для жизнеспособности экономической системы необходимо, чтобы спрос на каждый товар был равен его предложению. Такое состояние рынка называется экономическим равновесием, а цены на товары называются равновесными.

Идея положения равновесия берет свое начало еще в XVIII веке, в труде Адама Смита «Исследование о природе и причинах богатства народов» [9]. В математической форме данная идея была представлена Леоном Вальрасом, в работе которого [10] впервые появляется понятие вектора равновесных цен. Первые полноценные результаты о существовании положения равновесия были получены лишь в 50-е годы прошлого столетия, например, в работе К. Эрроу и Г. Дебре [4]. Современное развитие математической теории, а именно теории накрывающих отображений, позволяет получить достаточные условия существования равновесия в случае, когда функции спроса и предложения являются нелинейными (см. [3, 6–8]). Этот результат основан на теореме о точке совпадения α-накрывающего и β-липшицевого отображений, действующих из одного метрического пространства в другое [2].

В настоящей работе проведена верификация достаточных условий существования положения равновесия в модели «спрос-предложение», полученных в [3]. Вектор равновесных цен рассматривается как точка совпадения функций спроса и предложения. Для нахождения положения равновесия построен алгоритм поиска, основанный на итерационном процессе, описанном в [2]. Полученные результаты свидетельствуют о состоятельности построенной модели и создают основу для дальнейшей модернизации используемого алгоритма.

2. Постановка задачи нахождения равновесия в модели «спрос-предложение». Перейдем к формализации поставленной выше задачи. Сначала рассмотрим модель поведения производителей, затем — модель поведения потребителей. Далее определим понятие положения равновесия в модели и определим условия, при котором данное положение существует.

2.1. Модель поведения производителей. Функция предложения. Пусть имеются n различных товаров, первые $m \leqslant n$ из которых производятся при потреблении всех n товаров. Оставшиеся $n-m$ товаров импортируются в систему извне. Цены каждого товара обозначим через p_j, $j=\overline{1,n}$. Для производства i-го товара производитель на приобретение необходимых ресурсов может потратить имеющийся у него объем финансовых средств, который обозначим через b_i $i=\overline{1,m}$. Объем j-го товара, используемый для производства i-го товара, обозначим через x_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$. Естественно предположить, что все $p_j>0$, $b_i>0$, $x_{ij}>0$. Пусть известная функция прибыли $\pi\colon \mathbb{R}_+^{m\times n}\to\mathbb{R}_+$, значениями $\pi(x)$ которой являются различные величины прибыли при определенном наборе ресурсов $x=(x_{11},x_{12},\ldots,x_{1n},\ldots,x_{m1},x_{m2},\ldots,x_{mn})$ и фиксированной цене $p=(p_1,\ldots,p_n)\in\mathbb{R}_+^n$. Производитель из всех наборов ресурсов $x\in\mathbb{R}_+^{m\times n}$, при которых стоимость производства i-го товара не превышает b_i для любого $i=\overline{1,m}$, выбирает тот, на котором его прибыль будет максимальной. Таким образом, приходим к следующей задаче условной минимизации:

$$\pi(x)\to\max,\quad \sum_{j=1}^{n}p_jx_{ij}=b_i,\quad x_{ij}>0,\quad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}.$$

Решение этой задачи было получено в [3]. А именно, обозначив через C_i коэффициенты нейтрального технического процесса, а через $\beta_{ij}>0$ — коэффициенты эластичности по ресурсам, получим, что решение этой задачи определяется формулами:

$$x_{ij}=\frac{b_i\beta_{ij}}{p_j\sum\limits_{k=1}^{n}\beta_{ik}},\quad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}.$$

В [3] было также показано, что функция спроса i-го товара S_i в данной экономической системе определяется формулой:

$$S_i(p)=K_i\prod_{j=1}^{n}p_j^{-\beta_{i}j}-L_ip_i^{-1}, i=\overline{1,m}, \tag{1}$$

где

$$K_i = \frac{C_i b_i^{\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_{ij}} \prod\limits_{j=1}^{n} \beta_{ij}^{\beta_{ij}}}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\beta_{ki}\right)^{-\sum\limits_{l=1}^{n}\beta_{kl}}}, \quad L_i = \sum_{s=1}^{m} \frac{b_s\beta_{si}}{\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_{sj}}, \quad i = \overline{1,m}. \tag{2}$$

2.2. Модель поведения потребителя. Функция спроса. Пусть имеется потребитель с заданным бюджетом $I > 0$. Через x_j обозначим количество j-го товара, который приобретает потребитель, а через $p_j > 0$ — стоимость j-го товара, $j = \overline{1,n}$. Приобретаемый набор товаров таким образом обозначим через $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Задано открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n_+$, $G = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_j > 0,\ j = \overline{1,n}\}$ наборов товаров, доступные для приобретения потребителям. Пусть задана некоторая функция полезности $u\colon G \to \mathbb{R}$, значения $u(x)$ которой являются численным выражением предпочтительности набора товаров $x \in G$, т.е. один набор товаров $u(x')$ считаем более предпочтительным для потребителя, чем другой набор товаров $u(x'')$, если $u(x') > u(x'')$. Из всех наборов $x \in G$, стоимость которых укладывается в бюджет потребителя, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \leqslant I,$$

потребитель выберет тот набор товаров, который максимизирует его функцию полезности. Поскольку накопления денежных средств у потребителя в данной модели не происходит, будем предполагать, что функция полезности u и множество доступных наборов товаров G выбраны так, что искомый максимум достигается лишь на тех наборах, на которых

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j = I.$$

Таким образом, получим следующую задачу условной оптимизации:

$$u(x) \to \max, \quad \sum_{j=1}^{n} p_j x_j = I, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in G.$$

Эта задача также была решена в [3]. А именно, если обозначить через a_j минимально необходимое потребителю количество j-го товара, которое приобретается независимо от выбора того или иного набора товаров, а через α_j — относительную предпочтительность j-го товара, то решение поставленной задачи будет выглядеть следующим образом:

$$x_i = a_i + \frac{\alpha_i\left(I - \sum\limits_{j=1}^{n} p_j a_j\right)}{p_i \sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j}, \quad i = \overline{1,n}.$$

В [3] также было получено, что функция спроса в данной модели определяется следующей формулой:

$$D_i(p_1, \ldots, p_n) = a_i + \frac{\alpha_i\left(I - \sum\limits_{j=1}^{n} p_j a_j\right)}{p_i \sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j}, \quad p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n_+. \tag{3}$$

2.3. Постановка задачи нахождения равновесия. Во введении было отмечено, что положению равновесия соответствует равенство суммарного спроса и предложения, или равенство значений функций спроса D и предложения S при определенных ценах на товары p. Другими словами, нам требуется найти такие цены $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n_+$, что выполняется следующее равенство:

$$S(p) = D(p).$$

Таким образом, задача нахождения положения равновесия в модели сводится к задаче отыскания точки совпадения отображений спроса и предложения.

2.4. Существование равновесия в модели «спрос-предложение». Перейдем к формулировке теоремы о существовании равновесия в модели, доказанной в [3]. Пусть заданы $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$; $I \in \mathbb{R}$, $I > 0$, векторы $a = (a_1, \ldots, a_n), \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $C = (C_1, \ldots, C_m) \in \mathbb{R}^m_+$ и такая матрица $\mathfrak{B}$ размерности $n \times m$ с компонентами $\beta_{ij} > 0$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, что

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} < 1 \quad \forall i = \overline{1, m}. \tag{4}$$

Пусть также даны такие векторы $c_1 = (c_{11}, \ldots, c_{n1}), c_2 = (c_{12}, \ldots, c_{n2}) \in \mathbb{R}^n_+$, что $c_{j1} < c_{j2}$, $j = \overline{1, n}$. Для произвольных векторов $x = (x_1, \ldots, x_m), \bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \in \mathbb{R}^n$ положим

$$\langle x, \bar{x} \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{x}_j.$$

Предположим, что

$$\langle c_2, a \rangle < I. \tag{5}$$

Математической моделью рынка назовем набор

$$\sigma = (I, a, \alpha, C, \mathfrak{B}, c_1, c_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^{n \times m}_+ \times \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+,$$

удовлетворяющий (4), (5), $c_{j1} < c_{j2}$, $j = \overline{1, n}$. Множество всех таких наборов обозначим через Σ.

В этом наборе c_1 и c_2 определяют ограничения на цены p_j, $j = \overline{1, n}$, т.е. $c_{j1} \leqslant p_j \leqslant c_{j2}$ для всех $j = \overline{1, n}$, а оставшиеся компоненты набора однозначно определяют функции спроса $D\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^m$ и предложения $S\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^m$ по формулам (1) и (3) соответственно.

Определение 1. Вектор $p \in P$ называется *вектором равновесных цен* в модели σ, если $S(p) = D(p)$.

Положим

$$\bar{\alpha}(\sigma) = \min_{i=\overline{1,m}} \left| \frac{L_i(c_{i2} - c_{i1})}{2c_{12}^2} \right| - \max_{i=\overline{1,m}} \left(K_i \left(\prod_{j=1}^{n} c_{j1}^{-\beta_{ij}} \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \frac{c_{j2} - c_{j1}}{2c_{ij}} \right) \right),$$

$$\bar{\beta}(\sigma) = \frac{\max\limits_{i=\overline{1,n}} \left[\frac{\alpha_i}{c_{i1}^2} (I - \langle c_1, a \rangle + c_{i1} a_i)(c_{i2} - c_{i1}) + \frac{\alpha_i}{c_{i1}} (\langle a, c_2 - c_1 \rangle - a_i(c_{i2} - c_{i1})) \right]}{2 \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k},$$

$$\bar{\gamma}(\sigma) = \max_{i=\overline{1,m}} \left| a_i + \frac{\alpha_i(2I - \langle a, c_2 + c_1 \rangle)}{(c_{i2} + c_{i1}) \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j} + \frac{2L_i}{c_{i2} + c_{i1}} - K_i \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{c_{j2} + c_{j1}}{2} \right)^{-\beta_{ij}} \right|.$$

В [3] была доказана следующая теорема.

Теорема 1 (достаточные условия существования равновесия)**.** *Пусть модель $\sigma \in \Sigma$ удовлетворяет условиям* (4), (5) *и, кроме того,*

(i) $\bar{\alpha}(\sigma) > \bar{\beta}(\sigma)$*;*

(ii) $\bar{\gamma}(\sigma) < \bar{\alpha}(\sigma) - \bar{\beta}(\sigma)$.

Тогда в исследуемой модели существует такой вектор равновесных цен $p = (p_1, \ldots, p_n)$, что $c_{j1} < p_j < c_{j2}$, $j = \overline{1, n}$.

3. Итерационный процесс поиска точек совпадения двух отображений.

3.1. Постановка задачи поиска точек совпадения двух отображений. Даны два метрических пространства X и Y с метриками ρ_X и ρ_Y соответственно. Пусть также даны два отображения S и D, действующие из X в Y. Рассмотрим уравнение

$$S(p) = D(p), \quad p \in \mathbb{R}^n_+. \tag{6}$$

Решение этого уравнения называется точкой совпадения отображений S и D. Задача состоит в отыскании точек совпадения.

Прежде непосредственного поиска необходимо указать условия, при которых существует хотя бы одна точка совпадения в уравнении (6). Для этого нам потребуется ввести понятие α-накрывающего отображения.

Обозначим через $B_X(r, x)$ замкнутый шар радиуса r с центром в точке x в пространстве X. Аналогичным образом определим $B_Y(r, y)$. Определим r-окрестность произвольного множества $M \subset Y$ через $B_Y(r, M) = \bigcup\limits_{y \in M} B_Y(r, y)$.

Определение 2. Пусть задано число $\alpha > 0$. Отображение $S\colon X \to Y$ называется *α-накрывающим*, если

$$S(B_X(r, x)) \supseteq B_Y(\alpha r, S(x)) \quad \forall r \geqslant 0, \quad \forall x \in X. \tag{7}$$

3.2. Итерационный процесс. Перейдем теперь к описанию итерационного процесса, описанного в [2], которым мы воспользуемся для нахождения положения равновесия.

Итак, пусть даны отображения $S, D\colon X \to Y$, где S — α-накрывающее, а D — β-липшицево. Зафиксируем произвольную точку $p_0 \in X$ и последовательность неотрицательных чисел $\{\delta_i\}$. Имеем

$$\rho_Y(S(p_{i+1}), D(p_i)) \leqslant \delta_i \rho_Y(S(p_i), D(p_i)), \tag{8}$$

$$\rho_X(p_{i+1}, p_i) \leqslant \alpha^{-1} \rho_Y(S(p_i), D(p_i)). \tag{9}$$

Теорема 2 (теорема о точках совпадения, см. [2])**.** *Пусть пространство X полно, отображение $S\colon X \to Y$ является α-накрывающим и его график* $\operatorname{gph} S = \{(x, y) \in X \times Y : y = S(x)\}$ *замкнут, а отображение $D\colon X \to Y$ удовлетворяет условию Липшица с константой $\beta < \alpha$ и*

$$\beta + \alpha \varlimsup_{i \to \infty} \delta_i < \alpha. \tag{10}$$

Тогда для любого $p_0 \in X$ существует последовательность $\{p_i\}$, которая удовлетворяет условиям (8), (9) *при всех i, и любая такая последовательность сходится к некоторой точке совпадения $\xi = \xi(x_0)$, для которой справедливо неравенство*

$$\rho_X(\xi, x_0) \leqslant \alpha^{-1} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{i} \left(\delta_i + \frac{\beta}{\alpha} \right) \right) \rho_Y(S(x_0), D(x_0)).$$

На начальном этапе была рассмотрена экономическая модель без импорта товаров, т.е. при $m = n$.

В качестве пространств X, Y здесь выступают евклидовы пространства $\mathbb{R}^n_+$ и $\mathbb{R}^n$ соответственно. На этих пространствах в качестве ρ_X и ρ_Y возьмем естественную метрику

$$\rho_X(x, y) = \rho_Y(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (y_j - x_j)^2}; \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{11}$$

Для создания алгоритма поиска точек совпадения необходимо указать явный способ нахождения точки x_{i+1}. Построим процесс поиска точки на базе метода прямого поиска Хука—Дживса.

Из условия (9) можно определить шаги по координатам. Это условие задает радиус поиска точки x_{i+1}. Поскольку в обеих частях неравенства стоят неотрицательные величины, величина, стоящая в левой части этого неравенства и определяющая радиус поиска новой точки, будет максимальной тогда и только тогда, когда в этом неравенстве будет достигаться равенство. Используя (11), получим, что для точки $x_{i+1} = x_i + h_i$:

$$\left(\sum_{j=1}^{n}(p_{ij} + h_j - p_{ij})^2\right)^{1/2} = \alpha^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n}(S_j(p_i) - D_j(p_i))^2\right)^{1/2}.$$

Здесь $S(p_i) = (S_1(p_i), \ldots, S_n(p_i))$, $D(p_i) = (D_1(p_i), \ldots, D_n(p_i))$. Возводя это равенство в квадрат, получим:

$$\sum_{j=1}^{n} h_j^2 = \alpha^{-2}\sum_{j=1}^{n}(S_j(p_i) - D_j(p_i))^2.$$

Внесем α^{-2} внутрь суммы и приравняем слагаемые при соответствующих индексах j:

$$h_j^2 = \alpha^{-2}(S_j(p_i) - D_j(p_i))^2.$$

Извлечем корень из этого уравнения, учитывая, что левая и правая части уравнения всегда неотрицательны:

$$h_j = \alpha^{-1}|S_j(p_i) - D_j(p_i)|.$$

Таким образом, искомые шаги найдены.

Далее необходимо определить последовательность $\{\delta_i\}$. Элементы этой последовательности можно определить из (10):

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\,\delta_i < 1 - \frac{\beta}{\alpha}.$$

Будем выбирать δ_i так, чтобы $\delta_i < 1 - \beta/\alpha$, и при необходимости (в случае, если не сможем найти x_{i+1}, удовлетворяющее условию (8)) будем изменять его в интервале $(1 - \beta/\alpha; 1)$. Выбранные таким образом δ_i могут быть частью последовательности, для которой выполняется условие (10), поэтому условия теоремы остаются выполненными.

Согласно алгоритму прямого поиска, будем действовать следующим образом. Фиксируя все координаты точки x кроме первой, вычисляем значение величин

$$\rho_Y(S(p_{i1} + h_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{in}), D(p_i)), \quad \rho_Y(S(p_{i1} - h_1, p_{i2}, \ldots, p_{in}), D(p_i)).$$

Далее, согласно (8), сравниваем полученное значение с величиной $\delta_i\rho_Y(S(x_i), D(x_i))$. Если полученная величина удовлетворяет этому неравенству, то искомая точка найдена. В этом случае алгоритм можно завершить, но для избежания проблем зацикливания, медленной сходимости и эффективности поиск следует продолжить, пока не будет найдена точка с минимальным расстоянием среди всех. Так или иначе, шаг по этой координате уменьшается. Поиск проводится до тех пор, пока шаг не станет меньше заданного ε. Затем переходим к следующей координате и проводим аналогичный поиск, на этот раз фиксируя координаты $(x_{i1}, x_{i3}, x_{i4}, \ldots, x_{in})$.

Если в результате поиска не было найдено ни одной точки, то пробуем увеличить δ_i. Численные эксперименты показали, что подобная ситуация возникает на первых шагах итерационного процесса.

Пример. В экономической модели «спрос-предложение» при $m = n = 1$ возьмем следующий набор параметров:

$$I = 700, \quad a = 14, \quad \alpha = 0{,}5, \quad C = 943, \quad \mathfrak{B} = \beta = 0{,}01, \quad c_1 = 10, \quad c_2 = 50.$$

Тогда

$$\bar{\alpha} = 205{,}54642, \quad \bar{\beta} = 140, \quad \bar{\gamma} = 29{,}460690.$$

На первой итерации

$$x_0 = 49{,}902382, \quad h = 1{,}65747476, \quad \delta = 0{,}31887865,$$
$$\rho_Y(S(x_0), D(x_0)) = 340{,}68799, \quad \delta\rho_Y(S(x_0), D(x_0)) = 108{,}63812256,$$
$$\min_{[x_0-h; x_0+h]} \rho_Y(S(x), D(x_0)) = 321{,}70642.$$

Условие итерационного процесса выполняется при $\delta = 0,9442845930671052$.

Таблица 1. Результаты эксперимента при $n = 1$, $\varepsilon = 0{,}001$.

I	a	α	C	$\mathfrak{B}$	c_1	c_2	Прибл. реш.	Точн. реш.	Ошибка
296,63	1,09	0,50	170,36	0,25	248,06	270,13	255,695	255,694	0,00087248
3468,36	56,08	0,90	928,24	0,14	50,99	61,83	56,607	56,607	0,00072565
5671,82	23,75	0,04	150,53	0,14	166,23	238,80	213,438	213,437	0,00099848
2,47	0,02	0,78	7,76	0,07	45,38	68,57	61,299	61,291	0,00080693
1064,58	21,06	0,76	75,23	0,35	42,96	50,51	47,192	47,192	0,00035695

Из примера видно, что в качестве нового δ_i целесообразно воспользоваться условием:

$$\min_{x \in B_X(h,x_i)} \rho_Y(S(x), D(x_i)) \leqslant \delta \rho_Y(S(x_i), D(x_i)),$$

так как на каждой итерации мы стараемся минимизировать $\rho_Y(S(x), D(x))$. Из указанного неравенства получаем, что:

$$\delta_i \geqslant (\rho_Y(S(x_i), D(x_i)))^{-1} \min_{x \in B_X(h,x_i)} \rho_Y(S(x), D(x_i)) \tag{12}$$

Отсюда следует, что для точки x_{i+1} достаточно, чтобы в неравенстве (12) выполнялось равенство. Естественно, что можно с самого начала взять δ_i по формуле (12). Однако использование минимально возможного параметра δ_i обеспечивает более высокую скорость сходимости процесса, поскольку условие (10) более жесткое.

После замены δ_i поиск повторяется. Если нужная точка была найдена, то переходим к следующему этапу. Если же подходящих точек в окрестности x_i нет, то здесь возможны два варианта. Если

$$\rho_Y(S(x_i), D(x_i)) < \varepsilon, \tag{13}$$

то искомая точка совпадения найдена. Если же это не так, то это означает, что итерационный процесс пришел в точку, в которой достигается минимум расстояния между функциями спроса и предложения, однако эти функции не пересекаются и, следовательно, равновесие не достижимо. Однако, если выполняются условия теоремы 1, то такая ситуация невозможна.

4. Результаты численного эксперимента. Для демонстрации результатов работы итерационного процесса была написана программа на языке программирования Fortran 90. Параметры в модели подбирались исходя из условий теоремы 1. Точное решение было найдено методом равномерного перебора в окрестности полученного решения. За точное решение принималась точка $\tilde{x}$, в которой расстояние между функциями $\rho_Y(S(\tilde{x}), D(\tilde{x})) \approx 0{,}00000001$.

Результаты численного эксперимента представлены ниже. В таблицах 1–4 описаны результаты работы итерационного процесса в случаях $n = \overline{1,4}$ соответственно. Во избежание громоздкости представления в таблицах представлены лишь значимые результаты, демонстрирующие независимость алгоритма от параметров модели. Для численного эксперимента величина погрешности полагалась $\varepsilon = 0{,}001$, исходя из предположения, что цена товара на рынке не может быть меньше 0,01 у.е.

5. Заключение. Результаты численного эксперимента подтверждают состоятельность полученных достаточных условий существования положения равновесия в модели «спрос-предложение», а также работоспособность построенного алгоритма. Из них видно, что построенный итерационный процесс реализует поиск положения равновесия с заданной погрешностью ε. В экономической модели «спрос-предложение» это означает, что, используя данный алгоритм, возможно найти равновесные цены в модели с абсолютной точностью.

Остаются открытыми некоторые вопросы технического характера, такие как скорость сходимости алгоритма, случай неединственного положения равновесия, оптимизация процесса поиска новой точки в итерационном процессе и другие. Этим проблемам планируется уделить особое внимание в дальнейшем исследовании.

Таблица 2. Результаты эксперимента при $n = 2$, $\varepsilon = 0{,}001$.

I	a	α	C	$\mathfrak{B}$		c_1	c_2	Прибл. реш.	Точн. реш.	Ошибка
72353,13	464,02	0,50	8931,32	0,01	0,01	28,79	69,21	49,078	49,078	0,00000296
	975,44	0,50	11791,16	0,01	0,01	31,52	41,24	37,472	37,472	0,00000146
222,56	6,02	0,50	977,57	0,05	0,10	10,00	30,00	19,933	19,933	0,00000102
	1,02	0,50	899,76	0,10	0,05	25,00	40,00	32,022	32,022	0,00000454
1907,52	34,94	0,50	762,69	0,07	0,10	20,00	40,00	30,329	30,329	0,00001068
	7,27	0,50	934,44	0,10	0,07	50,00	70,00	60,021	60,021	0,00006694
266,68	2,56	0,50	622,09	0,07	0,15	20,00	40,00	29,674	29,674	0,00000296
	2,33	0,50	698,86	0,15	0,07	50,00	70,00	59,549	59,549	0,00000230
5319,73	62,60	0,50	672,95	0,08	0,08	30,00	40,00	34,503	34,503	0,00000686
	56,29	0,50	861,30	0,08	0,08	40,00	50,00	45,794	45,795	0,00001962

Таблица 3. Результаты эксперимента при $n = 3$, $\varepsilon = 0{,}001$.

I	a	α	C	$\mathfrak{B}$			c_1	c_2	Прибл. реш.	Точн. реш.	Ошибка
6135,09	35,13	0,33	971,32	0,01	0,01	0,01	30,00	40,00	35,081	35,081	0,00000051
	47,29	0,33	708,37	0,01	0,01	0,01	40,00	50,00	47,819	47,819	0,00003300
	47,29	0,00	744,42	0,01	0,01	0,01	40,00	50,00	44,954	44,954	0,00002927
1386,64	8,52	0,33	1791,87	0,01	0,01	0,01	10,00	40,00	25,252	25,252	0,00000026
	11,37	0,33	1293,55	0,01	0,01	0,01	20,00	50,00	33,923	33,923	0,00000078
	7,94	0,33	920,13	0,01	0,01	0,01	30,00	60,00	46,720	46,720	0,00004320
13531,23	74,46	0,27	623,52	0,01	0,01	0,01	99,06	123,83	114,671	114,671	0,00012171
	18,25	0,10	826,96	0,01	0,01	0,01	46,27	109,94	75,757	75,757	0,00004962
	24,31	0,25	724,00	0,01	0,01	0,01	76,49	94,75	87,985	87,985	0,00004817
18820,43	24,56	0,33	245,01	0,09	0,03	0,00	100,00	140,00	125,680	125,680	0,00019585
	46,99	0,33	891,79	0,08	0,05	0,03	120,00	160,00	140,024	140,024	0,00007714
	43,68	0,33	675,92	0,02	0,02	0,02	140,00	180,00	157,017	157,017	0,00014564
10401,40	54,17	0,33	781,14	0,08	0,09	0,09	78,36	100,21	94,482	94,482	0,00002283
	8,46	0,33	783,64	0,09	0,08	0,09	75,12	97,67	90,666	90,666	0,00001955
	44,44	0,33	751,21	0,08	0,09	0,09	73,74	93,30	80,779	80,779	0,00001502
9692,37	8,05	0,33	953,74	0,06	0,06	0,02	68,12	111,05	85,730	85,730	0,00000270
	5,43	0,33	681,20	0,04	0,05	0,07	62,68	99,25	85,099	85,099	0,00001324
	70,09	0,33	626,84	0,02	0,05	0,05	57,16	117,85	84,759	84,759	0,00010185

С точки зрения математического моделирования в экономике предполагается исследовать модернизированную версию модели, учитывающую транзакционные издержки [5]. Данная модель представляет большой интерес с точки зрения экономики, поскольку она более точно описывает реальную ситуацию на рынке, в частности, рынке РФ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арутюнов А. В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки// Докл. РАН. — 2007. — *416*, № 2. — С. 151–155.
2. *Арутюнов А. В.* Точки совпадения двух отображений// Функц. анал. прилож. — 2014. — *48*, № 1. — С. 89–93.
3. *Арутюнов А. В., Жуковский С. Е., Павлова Н. Г.* Равновесные цены как точка совпадения двух отображений// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2013. — *53*, № 2. — С. 225–237.

Таблица 4. Результаты эксперимента при $n = 4$, $\varepsilon = 0{,}001$.

I	a	α	C	$\mathfrak{B}$				c_1	c_2	Прибл. реш.	Точн. реш.	Ошибка
2756,34	5,13	0,24	892,95	0,01	0,01	0,01	0,01	10,00	30,00	67,052	85,282	0,00000083
	7,10	0,21	867,79	0,01	0,01	0,01	0,01	10,00	30,00	86,398	54,386	0,00001131
	9,63	0,10	998,34	0,01	0,01	0,01	0,01	10,00	30,00	105,280	136,126	0,00001228
	7,89	0,19	857,22	0,01	0,01	0,01	0,01	10,00	30,00	75,631	71,226	0,00001861
3236,04	5,45	0,04	578,62	0,01	0,02	0,01	0,00	55,09	92,15	76,341	76,341	0,00000356
	3,83	0,20	840,43	0,01	0,02	0,02	0,02	84,52	108,60	98,142	98,142	0,00000074
	7,25	0,10	363,95	0,02	0,00	0,01	0,02	97,89	191,83	161,264	161,263	0,00035677
	9,29	0,10	290,53	0,00	0,01	0,01	0,00	45,50	99,62	77,142	77,141	0,00016120
1753,90	4,20	0,05	698,36	0,03	0,01	0,02	0,03	55,34	76,22	68,407	68,407	0,00000701
	3,11	0,20	865,80	0,01	0,01	0,03	0,02	46,29	53,84	50,019	50,019	0,00000532
	2,96	0,01	304,33	0,01	0,01	0,02	0,03	83,04	146,83	114,244	114,243	0,00027044
	6,16	0,23	328,85	0,01	0,03	0,01	0,02	93,16	134,70	108,471	108,471	0,00024663

4. *Arrow K. J., Debreu G.* Existence of an equilibrium for a competitive economy// Econometrica. — 1954. — *22*, № 3. — P. 265–290.
5. *Arutyunov A. V., Pavlova N. G., Shananin A. A.* New conditions for the existence of equilibrium prices// Yugoslav. J. Oper. Res. — 2018. — *28*, № 1. — P. 59–77.
6. *Pavlova N. G.* Applications of the theory of covering maps to the study of dynamic models of economic processes with continuous time// in: Mathematical Analysis With Applications (*Pinelas S., Kim A., Vlasov V.*, eds.). — Cham: Springer, 2020. — P. 123–129.
7. *Pavlova N. G.* Necessary conditions for closedness of the technology set in dynamical Leontief model// Proc. 11 Int. Conf. “Management of Large-Scale System Development”, 2018. — P. 1–4.
8. *Pavlova N., Zhukovskaya Z., Zhukovskiy S.* Equilibrium in continuous dynamic market models// Proc. 15 Int. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems — 2020. — P. 1–3.
9. *Smith A.* An Inquiry into the Nature and Cause of the Wealth of Nations. — London: William Strahan and Thomas Cadell, 1776.
10. *Walras L.* Elements d’Economie Politique Pure. — Lausanne: Corbaz, 1874.

Котюков Александр Михайлович
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва
E-mail: `amkotyukov@mail.ru`