ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 207 (2022). С. 91–100
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-207-91-100

УДК 519.626

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ НАКРЫВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

© 2022 г. **С. О. НИКАНОРОВ**

Аннотация. Статья представляет результаты исследования динамической непрерывной модели Вальраса—Эванса—Самуэльсона для рынка двух товаров. Исследование проводится с использованием результатов теории накрывающих отображений. Получены достаточные условия существования положения равновесия в данной модели. Равновесие в данной модели рассматривается как точка совпадения двух отображений: отображения спроса и отображения предложения, зависящих от цен на представленные виды товаров и от скоростей изменения этих цен.

Ключевые слова: экономическое равновесие, функция спроса, функция предложения, накрывающее отображение, точка совпадения.

STUDY OF MATHEMATICAL MODELS OF ECONOMIC PROCESSES BY METHODS OF THE THEORY OF COVERING MAPPINGS

© 2022 **S. O. NIKANOROV**

Abstract. In this paper, we study the Walras–Evans–Samuelson dynamic continuous model for a two-commodity market using the theory of covering mappings. We obtain sufficient conditions for the existence of an equilibrium position in this model. The equilibrium in this model is considered as a point of coincidence of two mappings: the demand mapping and the supply mapping, which depend on the prices for the presented types of goods and on the rates of change of these prices.

Keywords and phrases: economic equilibrium, demand function, supply function, covering mapping, coincidence point.

AMS Subject Classification: 65J15

1. Введение. Рассмотрим экономическую модель, в которой существуют две группы участников: потребители и производители. Производители создают некоторый объем товаров, который затем приобретают потребители. Производители стремятся максимизировать прибыль, производя необходимое для этого количество товаров. Потребители стремятся удовлетворить свои потребности, приобретая необходимые для этого блага (товары), исходя из доступного им бюджета. Если предложение (т.е. объемы производства) становится меньше, чем потребление (т.е. спрос) — возникает дефицит. Дефицит неблагоприятно влияет на жизнь и благосостояние общества. С другой стороны, избыток товара (т.е. предложение больше, чем спрос) негативно отражается на производителе. При прежних затратах на производство производитель получает меньшую прибыль. Таким образом, можем понять, что для экономической системы необходимо, чтобы спрос на каждый товар был равен предложению. Такое состояние системы называется экономическим равновесием. Идея положения равновесия берет свое начало в XIII веке, в труде Адама Смита «Исследование о природе и причинах богатства народов» [15]. Мари Эспри Леон Вальрас —

французский экономист, в начале XX века первым занялся построением модели общего равновесия. Отличительной чертой данной модели является то, что она рассматривается автономно, т.е. без воздействия на нее внешних процессов [16]. После Вальраса непрерывную динамическую модель предложил в 1930 г. Г. С. Эванс. Затем в 40-е годы XX века схожую идею предложил П. Э. Самуэльсон. Современное развитие теории накрывающих отображений позволяет получить достаточные условия существования равновесия в случае, когда функции спроса и предложения являются нелинейными (см. [1–13]). Эти результаты основываются на теореме о точках совпадения α-накрывающего и β-липшицева отображений. В настоящей работе были получены достаточные условия существования равновесия в модели «спрос-предложение». Для получения этих достаточных условий были применены результаты теории накрывающих отображений, а также теорема о существовании локальных решений дифференциальных уравнений. Данный подход может быть применен для исследования равновесия других динамических моделей с непрерывным временем типа «спрос-предложение».

2. Постановка задачи нахождения равновесия в модели «спрос-предложение».

2.1. Модель поведения потребителя. Функция спроса. Способность экономического блага удовлетворить ту или иную потребность называется полезностью. Функция полезности лишь представляет, или обобщает, передаваемую отношением предпочтения информацию. Предпочтения потребителя формально представляются бинарным отношением $\succsim$, определенным на потребительском множестве X. Существуют следующие предположения (аксиомы предпочтений):

1. Сравнимость (полнота): человек способен из двух наборов отдать предпочтение одному из них, или признать, что они для него равноценны ($A > B, A < B, A = B$).
2. Транзитивность: если $A > B$, а $B > C$, то $A > C$ (для трех элементов $x^1, x^2, x^3 \in X$ из отношения $x^1 \succsim x^2$ и $x^2 \succsim x^3$, следует $x^1 \succsim x^3$).
3. Ненасыщенность: это предположение предусматривает, что потребности потребителя в товаре не удовлетворены полностью, поскольку после достижения полной насыщенности нужд они превращаются в антиблаго.
4. Субституциональность: потребитель согласен отказаться от некоторого количества товара A, если вместо него ему предложат большее количество блага-субститута (взаимозаменяемого блага).

Между полезностью и количеством потребляемых продуктов существует определенная функциональная связь. Ее отображает функция полезности. Вещественная функция $u\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ называется функцией полезности, представляющей отношение предпочтения, если для любых $x^0, x^1 \in \mathbb{R}^n_+ : u(x^0) \geqslant u(x^1) \;\Leftrightarrow\; x^0 \succsim x^1$.

Функция полезности имеет вид:

$$\begin{cases} u(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max, \\ \langle p, I \rangle \leqslant 0, \end{cases} \tag{1}$$

где p — цена товара, I — бюджет потребителя.

Свойства функции полезности:

1. Пусть отношение предпочтения $\succsim$ представимо функцией $u\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$. Тогда: $u(x)$ строго возрастает тогда и только тогда, когда $\succsim$ монотонно, $u(x)$ квазивогнута тогда и только тогда, когда $\succsim$ выпукло, $u(x)$ строго квазивогнута тогда и только тогда, когда $\succsim$ строго выпукло.
2. Инвариантность функции полезности относительно положительных монотонных образований. Пусть $\succsim$ является отношением предпочтения в $\mathbb{R}^n_+$. Предположим, что оно представимо функцией полезности $u(x)$. Другая функция $v(x)$ может представлять это отношение предпочтения тогда и только тогда, когда $v(x) = f(u(x))$ для любого x, где $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ строго возрастает на множестве значений функции u.
3. Дифференцируемость. Дифференцируемость исключает возможность резкого изменения в предпочтениях на противоположности. Также обеспечивает непрерывность и гладкость кривых безразличия. Таким образом, первая частная производная $u(x)$ по x_i называется предельной полезностью i-го товара.

Пусть $I > 0$ — определенный бюджет. Имеется n товаров, причем j-й товар имеет цену $p_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Существует набор товаров, которые может приобрести потребитель $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. G — заданное открытое можество $G \subset \mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\colon x_j > 0, j = \overline{1,n}\}$. Таким образом, выбор потребителя сводится к нахождению условного экстремума функции полезности:

$$\begin{cases} u(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_j x_j = I, \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in G. \end{cases} \tag{2}$$

Предположим, что функция полезности такова, что задача имеет единственное решение. Это решение принято называть спросом, а зависимость спроса от цены p функцией спроса.

Функция (отображение) $D\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$ описывает спрос и $D = D(p(t), t)$ является решением задачи (2).

2.2. Модель поведения производителя. Функция предложения. Далее рассмотрим модель поведения производителя. В этой модели ключевыми являются понятия функции предложения и функции прибыли. Каждый производитель имеет некоторые ресурсы и ограниченные производственные возможности, при этом он стремится максимизировать прибыль. Максимизация прибыли формализуется с помощью функции прибыли, которую можно задать разными способами.

Одним из способов является использование производственной функции, описывающей соотношение между вкладываемыми в производственный процесс ресурсами и конечным объемом выпуска.

Имеются n различных товаров, причем первые $m \leqslant n$ товаров создает производитель, потребляя при производстве все n товаров. Оставшиеся $n - m$ товаров импортируются в рассматриваемую систему извне. Заданы: цена j-го товара $p_j > 0$ и используемый при производстве i-й продукции объем имеющихся финансовых средств для приобретения ресурсов $b_i > 0$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Обозначим через $x_{ij} > 0$ объем j-й продукции, расходуемый для производства i-й продукции, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Известна функция прибыли $\pi\colon \mathbb{R}^{m\times n}_+ \to \mathbb{R}_+$, значением которой $\pi(x)$ является прибыль производителя при заданном расходе ресурсов $x = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, \ldots, x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn})$ и фиксированной цене $P = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n_+$. Из всех возможных наборов ресурсов $x \in \mathbb{R}^{m\times n}_+$, для которых стоимость производства i-го товара не превышает b_i при любом $i = \overline{1,m}$, производитель выбирает тот, при котором прибыль максимальна.

Таким образом, выбор производителя сводится к задаче отыскания условного экстремума функции прибыли [6]:

$$\begin{cases} \pi(x) \to \max, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_j x_{ij} = b_i, \quad x_{ij} > 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{3}$$

Решением экстремальной задачи является величина, называемая функцией предложения $S_i(P)\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$, которая является общим объемом продажи i-го $(i = \overline{1,m})$ товара при заданном векторе цен $P \in \mathbb{R}^n_+$.

2.3. Постановка задачи нахождения положения равновесия. Рыночное равновесие — состояние, при котором ни у кого из экономических субъектов не возникает побуждений к его изменению. Применительно к спросу и предложению, точка равновесия будет находиться в точке пересечения кривых спроса и предложения.

В динамических моделях все переменные являются функциями времени, например: скорость изменения цены или скорость изменения объемов.

Таким образом, можем видеть, что задача нахождения точки рыночного равновесия сводится к решению уравнения

$$D(t, p, \dot{p}) = S(t, p, \dot{p}),$$

где p — это цена, D — отображение спроса и S — отображение предложения. Все функции являются непрерывными времени t,

$$\begin{aligned} p &= p(t); & p&\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+;\\ S &= S(p(t),t); & S&\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+;\\ D &= D(p(t),t); & D&\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+. \end{aligned}$$

3. Получение достаточных условий существования равновесия.

3.1. Модель Вальраса—Эванса—Самуэльсона. Рассмотрим модель Вальраса—Эванса—Самуэльсона для рынка двух товаров (см. [2]).

Пусть заданы векторы $\mu = (\mu_1,\mu_2) \in \mathbb{R}^2_+$, $\lambda = (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2_+$, $f(I) = (f_1(I), f_2(I)) \in \mathbb{R}^2_+$, $p_0 = (p_{01},p_{02}) \in \mathbb{R}^2_+$, $d_1 = (d_{11},d_{12}) \in \mathbb{R}^2_+$, $d_2 = (d_{21},d_{22}) \in \mathbb{R}^2_+$, причем $d_{i1} < d_{i2}$, $\forall i = 1,2$, и векторы $v_1 = (v_{11},v_{12}) \in \mathbb{R}^2$, $v_2 = (v_{21},v_{22}) \in \mathbb{R}^2$.

Под математической моделью рынка будем понимать набор, который описывает обобщенную модель Вальраса—Эванса—Самуэльсона:

$$\sigma = (\mu,\lambda,I,p_0,d_1,d_2,v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,$$

где $\mu = (\mu_1,\mu_2)$ — товары, приобретаемые потребителем вне зависимости от бюджета, I — бюджет потребителя. В рассматриваемой модели σ функция спроса имеет вид

$$D_i(p,\dot p) = f_i(I)\dot p_i p_i^{-1} + \mu_i, \quad i = 1,2,$$

а функция предложения определяется соотношением

$$S_i(t,p,\dot p) = \frac{t^{\lambda_i} p_i \dot p_i}{\prod\limits_{\substack{j=1,2,\\ j\neq i}} p_j \dot p_j} \quad i = 1,2.$$

Также известно значение функции цены в начальной точке:

$$p(a) = p_0, \quad p_0 = (p_{01},p_{02}).$$

Имеются естественные ограничения на время, цены:

$$t \in [a,b], \quad p_i \in [d_{i1}, d_{i2}],$$

причем $d_{i1} = \min p$, $d_{i2} = \max p$ — соответственно минимальная и максимальная возможная цена единицы i-го товара для $i = 1,2$, $d_{i1} < d_{i2}$; и скорость изменения цен товаров соответственно:

$$\dot p_i \in [v_{i1}, v_{i2}], \quad i = 1,2.$$

Пусть

$$\hat v_i = \max_{i=1,2}(|v_{i1}|,|v_{i2}|), \quad \check v_i = \min_{i=1,2}(|v_{i1}|,|v_{i2}|), \quad i = 1,2.$$

Множество всех таких наборов σ обозначим через Σ.

3.2. Результаты теории накрывающих отображений. Введем следующие обозначения: $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел; $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$; $\mathbb{R}^n$ — пространство векторов $x = (x_1,\ldots,x_n)$ с нормой $\|x\|_{\mathbb{R}^n} = |x|$; Ω — выпуклая оболочка множества $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$; $L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$ — банахово пространство измеримых существенно ограниченных функций $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|x\|_{L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)} = \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[a,b]} |x(t)|$$

для заданного отрезка $[a,b]$; $AC_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$ — банахово пространство таких абсолютно непрерывных функций $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, что $\dot x \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$, с нормой $\|x\|_{AC_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)} = \|\dot x\|_{L_\infty} + |x(a)|$; $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ — пространство непрерывных функций $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|x\|_C = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|.$$

Введем следующие определения.

Определение 1 (см. [5])**.** Отображение $\psi\colon X \to Y$ называется α-накрывающим, если

$$B_Y(\psi(x), \alpha r) \subset \psi(B_X(x, r)) \text{ для } \forall x \in X, r \geqslant 0,$$

где X и Y — метрические пространства с метриками ρ_X и ρ_Y и $\alpha > 0$, $B_X(x, r)$ — замкнутый шар в полном пространстве X с центром в точке $x \in X$ и радиусом $r \geqslant 0$, а $B_Y(y, r)$ — замкнутый шар в пространстве Y с центром в точке $y \in Y$ радиуса $r \geqslant 0$.

Определение 2 (см. [1])**.** Пусть задано $\alpha > 0$ и множества $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$. Отображение $\psi\colon X \to Y$ называется α-накрывающим относительно множеств U, V, если для любых $u \in U$, $r > 0$, удовлетворяющих условию $B_X(x, r) \subseteq U$, имеет место включение

$$\psi(B_X(u, r)) \supseteq B_Y \psi(u), \alpha r) \cap V.$$

Определение 3 (см. [1])**.** Отображение $\psi\colon X \to Y$ называется условно α-накрывающим относительно множеств $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$, если оно является α-накрывающим относительно множеств U и $\tilde{V} = V \cap \psi(U)$. Если $U = X$, $V = Y$, то отображение называется условно α-накрывающим.

Определение 4 (см. [5])**.** Отображение $\psi\colon (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ называется липщицевым, если

$$\rho_Y(\psi(x), \psi(x')) \leqslant \beta \rho_X(x, x') \text{ для всех } x, x' \in X,$$

где $\beta \geqslant 0$ — константа Липшица.

Теорема 1 (теорема о точках совпадения (см. [6]))**.** *Пусть пространство X полно, а*

$$D, S\colon X \to Y$$

— произвольные отображения, первое из которых непрерывно и является α-накрывающим, а второе удовлетворяет условию Липшица с константой Липшица $\beta < \alpha$. Тогда для произвольного $x_0 \in X$ существует такое $\xi = \xi(x_0) \in X$, что

$$D(\xi) = S(\xi), \tag{4}$$

$$\rho_X(x_0, \xi) \leqslant \frac{\rho_Y(D(x_0), S(x_0))}{\alpha - \beta}.$$

Отметим, что решение ξ уравнения (4) может быть не единственным. Это решение ξ называется точкой совпадения отображений D и S.

Из теоремы 1 вытекает теорема Милютина о возмущении накрывающего отображения.

Теорема 2 (теорема о возмущении (см. [6]))**.** *Пусть X — полное метрическое пространство, Y — нормированное пространство, отображение $D\colon X \to Y$ является непрерывным α-накрывающим. Тогда для любого отображения $S\colon X \to Y$, удовлетворяющего условию Липшица с константой Липшица $\beta < \alpha$, отображение $D + S$ является $(\alpha - \beta)$-накрывающим.*

Описание класса накрывающих отображений в функциональных пространствах требуется для приложения накрывающих отображений к исследованию функциональных и дифференциальных уравнений. Опишем условия накрываемости оператора Немыцкого в пространствах измеримых функций.

Пусть даны $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ — замкнутое множество и $\Psi\colon [a, b] \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ — функция, которая удовлетворяет условиям Каратеодори:

(i) функция $\Psi(t, \cdot)$ непрерывна при п.в. $t \in [a, b]$,
(ii) функция $\Psi(\cdot, x)$ измерима при любом $x \in \Omega$,
(iii) для любого $\nu > 0$ найдется такое число M, что при любых $x \in \Omega$, удовлетворяющих неравенству $y|x| \leqslant \nu$, и п.в. $t \in [a, b]$ имеет место неравенство $|\Psi(t, x)| \leqslant M$.

Рассмотрим полное метрическое пространство $L_\infty([a, b], \Omega)$ измеримых существенно ограниченных функций $x\colon [a, b] \to \Omega$ с метрикой $\rho_{L_\infty([a,b],\Omega)}(x, \hat{x}) = \|x, \hat{x}\|_{L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)}$. Условия (i)–(iii) обеспечивают действие и ограниченность оператора Немыцкого $N_\Psi\colon L_\infty([a, b], \Omega) \to L_\infty([a, b], \mathbb{R}^m)$, $(N_\Psi x)(t) = \Psi(t, x(t))$.

Покажем, что при выполнении этих условий оператор $N_\Psi\colon L_\infty([a,b],\Omega) \to L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$ замкнут. Пусть для произвольных

$$\{x_i\} \subset L_\infty([a,b],\Omega), \quad x \in L_\infty([a,b],\Omega), \quad y \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$$

имеет место сходимость $\rho_{L_\infty([a,b],\Omega)}(x_i,x) \to 0$ и $\|N_\Psi x_i - y\|_{L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)} \to 0$. Тогда $x_i(t) \to x(t)$ при п.в. $t \in [a,b]$. Поэтому вследствие непрерывности функции $\Psi(t,\cdot)$ выполнено соотношение $\Psi(t,x_i(t)) \to \Psi(t,x(t))$ при п.в. $t \in [a,b]$. Но в то же время $\Psi(t,x_i(t)) \to y(t)$. В силу единственности предела имеем $\Psi(t,x_i(t)) = y(t)$ при п.в. $t \in [a,b]$. Таким образом, $N_\Psi x = y$, и оператор Немыцкого является замкнутым.

Рассмотрим уравнение

$$\Psi(t,x(t),x(t)) = y(t), \quad t \in [a,b], \quad x(t) \in \Omega,$$

где функция $\Psi : [a,b] \times \Omega^2 \to \mathbb{R}^m$ удовлетворяет условиям (i)–(iii). Имеет место следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть заданы $\alpha > \beta \geqslant 0$, $R_1, R_2 > 0$, $u_0 \in L_\infty([a,b],\Omega)$. Положим*

$$w_0(t) = \Psi(t,u_0(t),u_0(t)), \quad R_{\min} = \min\{R_1,R_2\},$$
$$U(t) = B_\Omega(u_0(t),R_1), \quad V(t,x_2) = B_{\mathbb{R}^m}(\Psi(t,u_0(t),x_2(t)),\alpha R_2),$$
$$r(y) = (\alpha-\beta)^{-1}\|y-w_0\|_{y\in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)}, \quad U_0(t,y) = B_\Omega(u_0(t),r(y))$$

для $y \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$. Предположим, что при п.в. $t \in [a,b]$ и любом $x_2 \in U(t)$ отображение $\Psi(t,\cdot,x_2)\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ является условно α-накрывающим относительно шаров $U(t)$, $V(t,x_2)$; при п.в. $t \in [a,b]$ и любом $x_1 \in U(t)$ функция $\Psi(t,\cdot,x_2)$ удовлетворяет на множестве $U(t)$ условию Липшица с константой β. Тогда для любого $y \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$, для которого имеет место неравенство

$$\|y-w_0\|_{L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)} \leqslant (\alpha-\beta)R_{\min}$$

и при п.в. $t \in [a,b]$ выполнено включение

$$y \in \bigcup_{x_2\in U_0(t,y)} \Psi(t,U(t),x_2),$$

существует решение $x \in L_\infty([a,b],\Omega)$ уравнения, удовлетворяющее оценке

$$\rho_{L_\infty([a,b],\Omega)}(x,u_0) \leqslant (\alpha-\beta)^{-1}\|y-w_0\|_{y\in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)}.$$

3.3. Существование локальных решений дифференциального уравнения. Пусть $A_0 \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим задачу Коши для не разрешенного относительно производной дифференциального уравнения, содержащего дополнительные ограничения на производную искомой функции:

$$f(t,x,\dot{x}) = 0, \quad \dot{x} \in \Omega, \quad t \in [a,b],$$

с начальным условием

$$x(a) = A_0.$$

Отметим, что рассматриваемая задача наряду с уравнением содержит также дополнительное ограничение на производную искомой функции: $\dot{x} \in \Omega$ для п.в. $t \in [a,b]$, которое может встречаться в приложениях, например, при исследовании задач для теории управления.

Будем предполагать, что функция $f\colon [a,b]\times\mathbb{R}^n\times\Omega \to \mathbb{R}^m$ удовлетворяет условиям Каратеодори, т.е. условиям (i)–(iii), если функцию f рассматривать относительно двух аргументов $t \in [a,b]$ и $(x,z) \in \mathbb{R}^n \times \Omega$. Заметим, что здесь не предполагаются ни непрерывность функции f (по совокупности аргументов), ни ее дифференцируемость по третьему аргументу. Поэтому, даже если $\Omega = \mathbb{R}^n$, применение классических методов исследования, использующих теорему о неявной функции, невозможно.

В модели Вальраса—Эванса—Самуэльсона рассматривается модель рыночного равновесия. В этом случае задача заключается в решении уравнения $D(\dot{p},p,t) = S(\dot{p},p,t)$.

Определение 5 (см. [1])**.** Пусть $\delta \in (0, b-a]$. Решением задачи Коши на отрезке $[a, a+\delta]$ будем называть абсолютно непрерывную функцию $x^\delta \colon [a, a+\delta] \to \mathbb{R}^n$, производная которой существенно ограничена, для которой справедливы условия (i)–(iii), а уравнение выполняется при п.в. $t \in [a, a+\delta]$.

Определим полное метрическое пространство $AC_\infty(A_0, [a,b], \Omega)$ таких абсолютно непрерывных функций $x \colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, что $\dot{x} \in L_\infty([a,b], \Omega)$ и $x(a) = a_0$, с метрикой.

$$\rho_{AC_\infty(A_0,[a,b],\Omega)} = \|x_1 - x_2\|_{AC_\infty(A_0,[a,b],\mathbb{R}^n)} = \|\dot{x}_1 - \dot{x}_2\|_{L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)} = \rho_{L_\infty([a,b],\Omega)}(\dot{x}_1, \dot{x}_2).$$

Согласно введенному определению, решение принадлежит пространству $AC_\infty(A_0, [a, a+\delta], \Omega)$.

Теорема 3 (см. [1])**.** *Пусть существуют такие положительные числа ν, R_1, R_2, $\sigma \in (0; b-a]$ и функция $\dot{x} \in L_\infty([a,b], \Omega)$, что выполнены следующие условия:*

(i) *для некоторого $\alpha > 0$ при п.в. $t \in [a, a+\sigma]$ и любом $p \in B_{\mathbb{R}^n}(A_0, \nu)$ отображение $f(t,p,\cdot) \colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ является условно α-накрывающим относительно шаров*

$$U(t) = B_\Omega(\dot{x}, R_1), \quad V(t,p) = B_{\mathbb{R}^m}(\psi(t,p,\dot{x}), \alpha R_2),$$

причем

$$f(t,p,\dot{p}) = D(t,p,\dot{p}) - S(t,p,\dot{p}),$$

где $f(t,p,\dot{p})$ — α-накрывающее отображение, $D(t,p,\dot{p})$ — β-накрывающее отображение, $S(t,p,\dot{p})$ — γ-липшицево отображение и $\beta - \gamma = \alpha$.

(ii) *при п.в. $t \in [a, a+\sigma]$ и любом $x \in B_{\mathbb{R}^n}(A_0, \nu)$ выполнено включение*

$$0 \in f(t,p,U(t));$$

(iii) *существует такое $K \geqslant 0$, что при п.в. $t \in [a, a+\sigma]$ для всех $p, \hat{p} \in B_{\mathbb{R}^n}(A_0, \nu)$ и любого $u \in U(t)$ выполнено неравенство*

$$|f(t,p,u) - f(t,\hat{p},u)| \leqslant K|p - \hat{p}|;$$

(iv) *имеет место оценка*

$$r_0 \coloneqq \alpha^{-1} \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [a,a+\sigma]} |f(t, A_0, \dot{x})| < R_{\min} = \min(R_1, R_2).$$

Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta \in (0, \sigma]$ и соответствующее решение

$$p^\delta \in AC_\infty(A_0, [a, a+\delta], \Omega)$$

задачи Коши, для которой выполнено неравенство

$$\rho_{L_\infty([a,a+\delta],\Omega)}(\dot{p}^\delta, \dot{x}^\delta) < r_0 + \epsilon,$$

где $\dot{x}^\delta$ — сужение функции $\dot{x}$ на $[a, a+\delta]$.

3.4. Достаточные условия существования равновесия в модели Вальраса—Эванса—Самуэльсона. В модели Вальраса—Эванса—Самуэльсона рассматривается рынок для двух товаров, которые имеют цену $p(t) > 0$ в момент времени $t \in [t_1, t_2]$, $t_1 \geqslant 0$. Пусть задано замкнутое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Предположим, что $\dot{p}(t) \in \Omega$ для почти всех t.

Определим нормы в пространствах $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^4$:

$$\|x\|_1 = \max_{i=\overline{1,2}} |x_i| \text{ для всех } x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\|y\|_2 = \max_{i=\overline{1,4}} |y_i| \text{ для всех } y = (y_1, \ldots, y_4) \in \mathbb{R}^4.$$

Рассмотрим метрические пространства (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y), где $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^2_+$, метрика ρ_X определяется нормой $\|\cdot\|_1$, а метрика ρ_Y — нормой $\|\cdot\|_2$.

Функция спроса совокупного потребителя описывается отображением

$$D \colon \Omega \times \mathbb{R}^2_+ \times [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^2_+,$$

где $D = D(t, p(t), \dot{p}(t))$ — объем приобретаемого товара в момент времени t.

Функция предложения совокупного производителя описывается отображением

$$S\colon \Omega \times \mathbb{R}^2_+ \times [a,b] \to \mathbb{R}^2_+,$$

где $S(t, p(t), \dot p(t))$ — объем произведенного и предлагаемого на рынке товара в момент времени t. Будем предполагать, что отображения D и S удовлетворяют условиям Каратеодори:

(i) отображения $D(t,\cdot,\cdot)$, $S(t,\cdot,\cdot)$ непрерывны при почти всех $t \in [a,b]$;

(ii) отображения $D(\cdot, p(t), \dot p(t))$, $S(\cdot, p(t), \dot p(t))$ измеримы при любых $(\dot p(t), p(t)) \in \Omega \times \mathbb{R}^2_+$;

(iii) $\forall \rho > 0$ существует такое число M, что при $\forall (\dot p(t), p(t)) \in \Omega \times \mathbb{R}^2_+$, удовлетворяющих неравенству $\|(p(t), \dot p(t))\|_2 \leqslant \rho$, и при почти всех $t \in [a,b]$ имеют место неравенства

$$\|D(t, p(t), \dot p(t))\|_1 \leqslant M, \quad \|S(t, p(t), \dot p(t))\|_1 \leqslant M.$$

Для описанной модели Вальраса—Эванса—Самуэльсона нужно определить достаточные условия существования равновесного положения. Следовательно, для доказательства существования равновесной цены нужно найти условия существования решения для поставленной задачи Коши. Для определения достаточных условий существования равновесного положения нам необходимы следующие понятия.

Утверждение 1 (см. [6]). *Пусть X, Y — банаховы пространства с нормами $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ соответственно, $A\colon X \to Y$ — линейный непрерывный оператор. Обозначим через $\operatorname{cov}(A)$ точную верхнюю грань всех таких чисел α, что отображение A является α-накрывающей. Тогда $(\operatorname{cov}(A))^{-1}$ совпадает с константой Банаха оператора A.*

Утверждение 2 (см. [6]). *Пусть отображение $D\colon X \to Y$ строго дифференцируемо в точке $x_0 \in X$. Тогда имеет место равенство:*

$$\operatorname{cov}(D|x_0) = \operatorname{cov}\left(\frac{\partial D}{\partial x}(x_0)\right).$$

Пусть множество $M \subset X$ является замкнутым шаром ненулевого радиуса. Тогда имеет место равенство:

$$\operatorname{cov}(D|M) = \inf_{x \in \operatorname{int} M} \operatorname{cov}(D|x).$$

Утверждение 3 (см. [6]). *Пусть некоторое отображение $S\colon M \to Y$ непрерывно на M и непрерывно дифференцируемо на $\operatorname{int} M$. Обозначим через $\operatorname{lip}(S|M)$ точную нижнюю грань всех таких чисел $\beta \geqslant 0$, что отображение S удовлетворяет на M условию Липшица с константой β. Тогда*

$$\operatorname{lip}(S|M) = \sup_{p \in \operatorname{int} M} \left\| \frac{\partial S}{\partial p}(p) \right\|.$$

Здесь и далее норма производного линейного оператора $A\colon X \to Y$ определяется по формуле

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Ax\|_Y.$$

Проведем оценку константы накрывания функции спроса $D(t, p, \cdot)$. Для этого найдем производную

$$\frac{\partial D}{\partial \dot p}(t, p, \dot p) = \begin{pmatrix} f_1(I)p_1^{-1} & 0 \\ 0 & f_2(I)p_2^{-1} \end{pmatrix}.$$

Аналогично оценим норму

$$\left\| \frac{\partial D}{\partial \dot p}(t, p, \dot p) \right\| = \max_{\|x\|_{\mathbb{R}^2}=1} \left\| \frac{\partial D}{\partial \dot p}(t, p, \dot p) x \right\|_{\mathbb{R}^2} = \max_{\|x\|_{\mathbb{R}^2}=1} \max_{i=1,2} |f_i(I) p_i^{-1} x_i| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{i=1,2} |f_i(I) p_i^{-1}| \leqslant \max_{i=1,2} |f_i(I) d_{i2}^{-1}| = \frac{1}{\bar\alpha(\sigma)}.$$

Получаем оценку сверху константы накрывания функции спроса:

$$\operatorname{cov}(D|M) \geqslant \bar\alpha(\sigma).$$

Оценим константу Липшица функции предложения $S(t,p,\cdot)$. Для этого вычислим частную производную:

$$\frac{\partial S}{\partial \dot p}(t,p,\dot p) = \begin{pmatrix} \dfrac{t^{\lambda_1}p_1}{p_2\dot p_2} & -\dfrac{t^{\lambda_1}\dot p_1 p_1}{p_2(\dot p_2)^2} \\ -\dfrac{t^{\lambda_2}\dot p_2 p_2}{p_1(\dot p_1)^2} & \dfrac{t^{\lambda_2}p_2}{p_1\dot p_1} \end{pmatrix}.$$

Далее оценим норму:

$$\left\|\frac{\partial S}{\partial \dot p}(t,p,\dot p)\right\| = \max_{\|x\|_{\mathbb{R}^2}=1}\left\|\frac{\partial S}{\partial \dot p}(t,p,\dot p)x\right\|_{\mathbb{R}^2} =$$

$$= \max_{\|x\|_{\mathbb{R}^2}=1}\max_{i=1,2}\left|\frac{t^{\lambda_i}p_i}{\prod\limits_{\substack{j=1,2,\\ j\neq i}} p_j\dot p_j}x_i - \frac{t^{\lambda_i}\dot p_i p_i}{\prod\limits_{\substack{j=1,2,\\ j\neq i}} p_j(\dot p_j)^2}x_i\right| \leqslant \max_{i=1,2}\left|\frac{t^{\lambda_i}p_i}{\prod\limits_{\substack{j=1,2,\\ j\neq i}} p_j\dot p_j} - \frac{t^{\lambda_i}\dot p_i p_i}{\prod\limits_{\substack{j=1,2,\\ j\neq i}} p_j(\dot p_j)^2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{i=1,2}\left(\left|\frac{t^{\lambda_i}p_i}{\prod\limits_{\substack{j=1,2,\\ j\neq i}} p_j\dot p_j}\right| + \left|\frac{t^{\lambda_i}\dot p_i p_i}{\prod\limits_{\substack{j=1,2,\\ j\neq i}} p_j(\dot p_j)^2}\right|\right) \leqslant \max_{i=1,2}\left(\left|\frac{b^{\lambda_i}d_{i2}}{\prod\limits_{\substack{j=1,2,\\ j\neq i}} d_{j1}\check v_{j1}}\right| + \left|\frac{b^{\lambda_i}\hat v_{i2}d_{i2}}{\prod\limits_{\substack{j=1,2,\\ j\neq i}} d_{j1}(\check v_{j1})^2}\right|\right) = \bar\beta(\sigma).$$

Таким образом, получаем оценку снизу для константы Липшица функции предложения:

$$\operatorname{lip}(S|M) \leqslant \bar\beta(\sigma).$$

Тогда к модели применима теорема 3 и возможно сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 4. *Пусть модель $\sigma \in \Sigma$ удовлетворяет условию $\bar\alpha(\sigma) > \bar\beta(\sigma)$. Тогда в исследуемой модели существует такое положение равновесия $p(t) = (p_1, p_2)$, что $d_{i1} < p_i(t) < d_{i2}$ и $v_{i1} < \dot p_i(t) < v_{i2}$, $i = 1,2$.*

В утверждении 4 сформулированы достаточные условия существования положения равновесия в модели Вальраса—Эванса—Самуэльсона. Данный подход может быть применен для исследования равновесия в других динамических моделях с непрерывным временем типа «спрос-предложение».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аваков Е. Р., Арутюнов А. В., Жуковский С. Е.* Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной// Диффер. уравн. — 2009. — *45*, № 5. — С. 613–634.
2. *Арутюнов А. В.* Точки совпадения двух отображений// Функц, анал. прилож. — 2014. — *48*, № 1. — С. 89—93.
3. *Арутюнов А. В.* Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений// Мат. заметки. — 2009. — *86*, № 2. — С. 163–169.
4. *Арутюнов А. В., Жуковский С. Е.* Существование обратных отображений и их свойства// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 2010. — *271*. — С. 12–22.
5. *Арутюнов А. В., Жуковский С. Е.* О непрерывности обратных отображений для липшицевых возмущений накрывающих отображений// Фундам. прикл. мат. — 2014. — *19*, № 4. — С. 93–99.
6. *Арутюнов А. В., Жуковский С. Е., Павлова Н. Г.* Равновесная цена как точка совпадения двух отображений// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2013. — *53*, № 2.
7. *Жуковский С. Е., Павлова Н. Г.* О приложении теории накрывающих отображений к нелинейной модели рынка// Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. техн. науки. — 2013. — *18*, № 1. — С. 47—49.
8. *Павлова Н. Г.* О применении результатов теории накрывающих отображений к исследованию динамических моделей экономических процессов// Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. техн. науки. — 2017. — *22*, № 6. — С. 1304—1308.

9. *Павлова Н. Г.* Исследование экономических моделей методами теории накрывающих отображений// Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. техн. науки. — 2013. — *18*, № 5. — С. 2621–2623.
10. *Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V.* Locally covering maps in metric spaces and coincidence points// J. Fixed Points Theory Appl. — 2009. — *5*, № 1. — С. 5—16.
11. *Arutyunov A. V., Pavlova N. G., Shananin A. A.* New conditions for the existence of equilibrium prices// Yugoslav. J. Oper. Res. — 2018. — *28*, № 1. — С. 59–77.
12. *Pavlova N. G.* Necessary conditions for closedness of the technology set in dynamical Leontief model// Proc. 11 Int. Conf. "Management of Large-Scale System Development", 2018. — P. 1–4.
13. *Pavlova N. G.* Applications of the theory of covering maps to the study of dynamic models of economic processes with continuous time// in: Mathematical Analysis With Applications (*Pinelas S., Kim A., Vlasov V.*, eds.). — Cham: Springer, 2020. — P. 123–129.
14. *Pavlova N., Zhukovskaya Z., Zhukovskiy S.* Equilibrium in continuous dynamic market models// Proc. 15 Int. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems — 2020. — P. 1–3.
15. *Smith A.* An Inquiry into the Nature and Cause of the Wealth of Nations. — London: William Strahan and Thomas Cadell, 1776.
16. *Walras L.* Elements d'Economie Politique Pure. — Lausanne: Corbaz, 1874.

Никаноров Станислав Олегович
Институт проблем управления имени В. А. Трапезникова РАН, Москва
E-mail: `nikanorovso@yandex.ru`