ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 207 (2022). С. 101–106
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-207-101-106

УДК 519.765, 51-7, 517.9

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ДИФФУЗИОННО-ЛОГИСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

© 2022 г. **М. В. ПОЛОВИНКИНА**

Аннотация. Отмечено, что добавление диффузионных членов к обыкновенным дифференциальным уравнениям (например, к логистическим) может в некоторых случаях улучшить (ослабить) достаточные условия устойчивости стационарного решения. Приведены примеры.

Ключевые слова: диффузионная модель, стационарное состояние, устойчивость.

ON SOME FEATURES OF DIFFUSION LOGISTICS MODELS

© 2022 **M. V. POLOVINKINA**

Abstract. We note that in some cases diffusion terms in an ordinary differential equations (for example, the logistic equation) can improve (weaken) sufficient conditions for the stability of a stationary solution. Examples are given.

Keywords and phrases: diffusion model, stationary state, stability.

AMS Subject Classification: 35B35, 35Q99

1. Актуальность проблемы. В работе затронута проблема устойчивости стационарных решений дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений в частных производных, возникающих прежде всего в математической биологии. Чаще всего такие системы возникают при описании роста и распространения популяций. Первая модель роста популяции, записанная в виде дифференциального уравнения, появилась вскоре после открытия дифференциального и интегрального исчисления (Maltus, 1798). В этой модели рассматривается однородная популяция в условиях неограниченных ресурсов питания и пространства обитания. При этом считается, что скорость роста популяции пропорциональна ее численности. Динамика численности (биомассы) такой популяции описывается обыкновенным дифференциальным уравнением (см., например, [10, 11, 14])

$$\frac{du}{dt} = Au,$$

где A — врожденная (собственная, специфическая) скорость естественного увеличения популяции. Решением является функция

$$u(t) = u(t_0)\exp(At), \tag{1}$$

т.е. со временем численность популяции растет неограниченно по экспоненциальному закону. В соответствии с этим законом изолированная популяция развивалась бы в условиях неограниченных ресурсов. В природе такие условия встречаются крайне редко. Примером может служить размножение видов, завезенных в места, где имеется много пищи и отсутствуют конкурирующие виды и хищники (кролики в Австралии). Уравнение Мальтуса достаточно точно описывает динамику искусственно созданной и поддерживаемой в условиях избытка пищи и места популяции простейших организмов, например, пенициллиновых грибков, выращиваемых в культиваторе, до истощения культуральной среды.

Уравнение (1) справедливо лишь для ограниченного периода времени, в конечном счете растущая популяция исчерпает наличные ресурсы. Численность популяции может стабилизироваться на некотором устойчивом уровне; она может испытывать регулярные или нерегулярные флуктуации или может сокращаться. Поведение популяции, численность которой стабилизируется на некотором устойчивом уровне, часто описывают с помощью логистического уравнения, предложенного Ферхюльстом в 1838 г.:

$$\frac{du}{dt} = ru\left(1 - \frac{u}{K}\right),$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$u(t) = \frac{u(t_0)K\exp(rt)}{K - u(t_0) + \exp(At)}.$$

Непосредственное исследование этой функции показывает, что при малых значениях u уравнение Ферхюльста может быть заменено уравнением Мальтуса, а рост носит взрывной экспоненциальный характер, с возрастанием же значения t величина $u(t)$ приближается к постоянному значению K. Функции, удовлетворяющие таким свойствам, дифференциальные уравнения, дающие в качестве решений такие функции, а также модели, в которые входят такие уравнения, часто называют *логистическими*.

Хорошо известно, что частное стационарное решение $u(t) \equiv 0$ уравнения Ферхюльста является неустойчивым. Это легко проверить с помощью первого линейного приближения. В общем случае для проверки устойчивости стационарного решения $w \equiv \mathrm{const}$ уравнения

$$\frac{du}{dt} = f(u),$$

т.е. решения уравнения

$$f(w) = 0,$$

необходимо проверить знак производной $f'(u)$ в точке $u = w$. Для уравнения Ферхюльста функция $f(u)$ имеет вид

$$f(u) = ru\left(1 - \frac{u}{K}\right),$$

ее производная имеет вид

$$\frac{df(u)}{du} = r - \frac{2ru}{K},$$

а в точке $u = 0$ она принимает значение

$$\left.\frac{df(u)}{du}\right|_{u=0} = r > 0.$$

Поскольку значение производной $f'(u)$ в точке $u(t) \equiv 0$ положительно, стационарное решение $u(t) \equiv 0$ неустойчиво.

Хотеллинг в 1921 г. предложил для описания популяций животных и людей учитывать кроме логистического закона еще и миграционные закономерности [19]. Для этого он предложил уравнение вида

$$\frac{\partial p}{\partial t} = A(\xi - p)p + B\Delta p, \tag{2}$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

— оператор Лапласа, A, B, ξ суть заданные положительные постоянные. Это уравнение описывает рост и распространение популяции. При этом входящие в уравнение величины имеют следующий смысл: A — темп роста популяции, B — темп распространения, ξ — порог насыщения численности (или коэффициент насыщенной плотности), p — размер (в другом варианте — плотность) популяции, t — время. x, y — координаты на плоскости. Это же уравнение используется и для моделирования развития злокачественной опухоли [22]. Первое слагаемое в правой части уравнения Хотеллинга называют опять логистическим. Второе же слагаемое принято называть *диффузионным* членом. Оно отражает влияние миграционных (диффузионных) процессов на изменение численности популяции. Уравнения и модели, отражающие изменения размера биомассы под влиянием логистических и диффузионных составляющих, стали называть *диффузионно-логистическими.* Такие модели могут включать в себя не только одно уравнение, но и системы уравнений в частных производных. Заметим также, что чисто логистические модели, включающие в себя лишь обыкновенные дифференциальные уравнения, относят к так называемым моделям с сосредоточенными параметрами, а диффузионно-логистические модели, включающие в себя дифференциальные уравнения в частных производных, относят к так называемым моделям с распределенными параметрами.

Исследования устойчивости стационарных состояний систем дифференциальных уравнений, которые моделируют рост определенных явлений, имеют давнюю историю. Во многих случаях такие модели основаны на обыкновенных дифференциальных уравнениях. Несмотря на то, что теория систем обыкновенных дифференциальных уравнений давно уже является классической, интерес к ним не угасает. В последние несколько десятилетий это связано еще и с тем, что такие системы нашли приложения к моделированию биологических и социальных систем. Из относительно недавних работ по математической биологии можно в связи с этим указать [1, 4, 5, 12, 13, 15, 21]. В работе рассмотрена модель зарождения и развития течений в живописи, основанная на уравнениях такого же типа.

В настоящей работе рассматривается некоторый класс математических моделей с уравнениями в частных производных (модели с распределенными параметрами), которые получаются из моделей с обыкновенными дифференциальными уравнениями (модели с сосредоточенными параметрами) с помощью добавления так называемых диффузионных членов. Тенденцию подобных усложнений математических моделей можно отследить в некоторых работах, связанных с моделированием роста и распространения популяций, роста и распространения инфекций, роста опухолей. В связи с этим см. прежде всего монографию [11]. В работе [3] приведена диффузионная модель злокачественной опухоли. Математическая модель роста глиомы основана на классическом определении рака как неконтролируемой пролиферации клеток с потенциалом инвазии и метастазирования, упрощенном для глиом, которые практически не метастазируют. Эта модель приведена в [22].

Нас интересует вопрос об устойчивости стационарных решений диффузионных моделей. Этот вопрос обсуждается в монографии [11]. В этой книге отмечается, что добавление диффузионных членов может изменить характер устойчивости стационарного решения как в худшую, так и в лучшую сторону. Для моделей определенного типа попытаемся конкретизировать достаточные условия устойчивости тривиального решения.

2. Исследование устойчивости тривиального решения диффузионно-логистической модели. Рассматривается начально-краевая задача для системы уравнений в частных производных (см. также [9]:

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = \vartheta_s \Delta u_s + F_s(u), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \tag{3}$$

$$\left(\mu_s u_s + \eta_s \frac{\partial u_s}{\partial \nu}\right)\bigg|_{x\in\partial\Omega} = 0, \quad \mu_s^2 + \eta_s^2 > 0, \quad \mu_s \geqslant 0, \quad \eta_s \geqslant 0, \quad \mu_s = \text{const}, \quad \eta_s = \text{const}, \tag{4}$$

$$u_s(x, 0) = 0, \quad s = 1, \dots, m, \tag{5}$$

где Ω — ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, ν — единичный вектор нормали к границе $\partial\Omega$ области Ω, $u = (u_1(x,t), \dots, u_m(x,t))$, $\vartheta_s \geqslant 0$, $s = 1, \dots, m$, Δ — оператор Лапласа, определенный формулой

$$\Delta v = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}.$$

При выполнении условий

$$\vartheta_s = 0, \quad s = 1, \dots, m, \tag{6}$$

(в модели с сосредоточенными параметрами без диффузионных членов) переменные $x_1, \ldots, x_n$ входят в уравнения (3) как параметры, производные по которым не содержатся в этих уравнениях. Если же

$$\sum_{s=1}^{m} \vartheta_s^2 > 0, \tag{7}$$

то мы имеем дело с системой с распределенными параметрами.

Предположим, что функции $F_s(u) = F_s(u_1, \ldots, u_m)$, определены в некоторой окрестности точки $u = 0 \in \mathbb{R}^m$, дифференцируемы в точке $u = 0$ и удовлетворяют условиям $F_s(0) = 0$, $s = 1, \ldots, m$. Тогда в некоторой окрестности G точки $u = 0 \in \mathbb{R}^m$ имеют место представления

$$F_s(u) = \sum_{k=1}^{m} b_{sk} u_k + \sum_{k=1}^{m} \epsilon_{sk}(u) u_k, \tag{8}$$

где

$$b_{sk} = \frac{\partial F_s(0)}{\partial u_k}, \quad \lim_{u \to 0} \epsilon_{sk}(u) = 0, \quad s, k = 1, \ldots, m.$$

Тривиальное решение $u = 0$ задачи (3)–(5) будет и ее стационарным решением. Поставим вопрос об устойчивости тривиального решения задачи (3)–(5). Нетривиальное решение $u(x,t)$ рассматривается как достаточно малое отклонение от тривиального решения.

Умножим (для каждого фиксированного s) уравнение (3) в системе на u_s, полученное равенство проинтегрируем по области Ω. Получим с учетом (8):

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} u_s^2 dx = \vartheta_s \int_{\Omega} u_s \Delta u_s dx + \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} b_{sk} u_s u_k dx + \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \epsilon_{sk}(u) u_s u_k dx, \quad s = 1, \ldots, m. \tag{9}$$

Последнее слагаемое в правой части равенства (9) при малых отклонениях u не влияет на знак всей суммы и может быть отброшено. К первому слагаемому в правой части применим формулу Грина (см. [2]). В результате получим:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} u_s^2 dx = -\vartheta_s \int_{\Omega} |\nabla u_s|^2 dx + \vartheta_s \int_{\partial\Omega} u_s \frac{\partial u_s}{\partial \nu} d\Gamma + \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} b_{sk} u_s u_k dx, \quad s = 1, \ldots, m, \tag{10}$$

где $d\Gamma$ является элементом границы $\partial\Omega$, так что второе слагаемое в правой части равенства (10) представляет собой поверхностный (при $n \geqslant 3$) или криволинейный (при $n = 2$) интеграл первого рода по границе области Ω, а в случае $n = 1$ этот интеграл следует поменять на сумму значений на концах интервала Ω. В интеграле по границе при $\mu_s = 0$ или при $\eta_s = 0$ подынтегральная функция равна нулю в силу краевого условия (4). Из этого же краевого условия при $\mu_s \eta_s > 0$ получим:

$$\left.\frac{\partial u_s}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = -\left.\frac{\mu_s}{\eta_s} u_s\right|_{\partial\Omega}.$$

Поэтому равенство (10) может быть переписано в виде

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} u_s^2 dx = -\vartheta_s \int_{\Omega} |\nabla u_s|^2 dx - \sigma\vartheta_s \int_{\partial\Omega} \frac{\mu_s}{\eta_s} u_s^2 d\Gamma + \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} b_{sk} u_s u_k dx, \quad s = 1, \ldots, m, \tag{11}$$

где $\sigma = 1$ в случае $\mu_s \eta_s > 0$ или $\sigma = 0$ в случае $\mu_s \eta_s = 0$. Сложим m равенств (11), после чего получим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} |u|^2 dx = \sum_{s=1}^{m} \left(-\vartheta_s \int_{\Omega} |\nabla u_s|^2 dx - \sigma\vartheta_s \int_{\partial\Omega} \frac{\mu_s}{\eta_s} u_s^2 d\Gamma \right) + \int_{\Omega} \sum_{s=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \Theta_{sk} u_s u_k dx, \tag{12}$$

где $\Theta_{sk} = (b_{sk} + b_{ks})/2$. Знак левой части равенства (12) рассматривается как индикатор устойчивости тривиального решения. Поэтому важно найти соотношение слагаемых в правой части, приводящее к тому, чтобы это выражение было отрицательным. В скобках в правой части как первое слагаемое, так и второе слагаемое не больше нуля. Далее нужно учесть знак последнего слагаемого в правой части. Очевидно, что отрицательная определенность квадратичной формы

$$\sum_{s=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\Theta_{sk}u_k u_s dx \tag{13}$$

обеспечит отрицательность левой части равенства (12), а значит, устойчивость стационарного решения.

В случае модели с сосредоточенными параметрами (система обыкновенных дифференциальных уравнений), т.е. при выполнении (6), отрицательная определенность квадратичной формы (13) является и необходимым условием устойчивости тривиального решения.

Перейдем к рассмотрению диффузионной модели с распределенными параметрами. В этом случае можно ослабить достаточное условие устойчивости стационарного решения. Для этого воспользуемся неравенством Стеклова—Пуанкаре—Фридрихса (см. [6, с. 62], [8, с. 150], [16,20])

$$\int\limits_{\Omega} |\bigtriangledown u_s|^2 dx \geqslant \frac{1}{d^2}\int\limits_{\Omega} u_s^2 dx,$$

где $d = \operatorname{diam}\Omega$ — диаметр области Ω. Отсюда

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega} |\, u\,|^2\, dx \leqslant -\sum_{s=1}^{m}\frac{\vartheta_s}{d^2}\int\limits_{\Omega} u_s^2 dx - \sum_{s=1}^{m}\vartheta_s\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\mu_s}{\eta_s}u_s^2 d\Gamma + \int\limits_{\Omega}\sum_{s=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\Theta_{sk}u_k u_s dx. \tag{14}$$

Теперь можно утверждать, что достаточным условием устойчивости стационарного решения является отрицательная определенность квадратичной формы

$$\sum_{s=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} A_{sk}u_k u_s, \quad \text{где} \quad A_{sk} = \Theta_{sk} - \delta_{ks}\vartheta_s/d^2.$$

3. Примеры. Рассмотрим в качестве примера систему, которая в бездиффузионном варианте давно является одним из основных инструментов в математической экологии, генетике и математической теории отбора и эволюции [18]:

$$\partial u_s/\partial t = \left(\phi_s - \sum_{j=1}^{m}\phi_j u_j\right) u_s + \vartheta_s \Delta u_s, \quad s = 1,\ldots,m.$$

Условие $\phi_s < \vartheta_s/d^2$, $s = 1,\ldots,m$, достаточно для устойчивости тривиального решения этой системы. При $\vartheta_s > 0$, $s = 1,\ldots,m$, т.е. в случае диффузионной модели с распределенными параметрами, это условие выполнено для областей с небольшим диаметром. В случае системы с сосредоточенными параметрами при $\vartheta_s = 0$, $\phi_s > 0$, $s = 1,\ldots,m$, тривиальное решение неустойчиво.

Другой интересный пример дает уравнение Хотеллинга (2). Пусть $w(x,y)$ — стационарное решение уравнения Хотеллинга, т.е. решение уравнения

$$A(\xi - w)w + B\Delta w = 0.$$

Изложенный выше метод приводит к заключению о том, что условие

$$w > \frac{\xi}{2} - \frac{B}{2Ad^2}$$

является достаточным для устойчивости стационарного решения $w(x,y)$ (см. [7,17]). Это условие при $B \neq 0$ выполняется при небольшом диаметре области Ω.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воропаева О. Ф., Цгоев Ч. А.* Численная модель динамики факторов воспаления в ядре инфаркта миокарда// Сиб. ж. индустр. мат. — 2019. — *22*, № 2. — С. 13–26.
2. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. — М.: Наука, 1989.
3. *5–18* Математические модели злокачественной опухоли// Вестн. СПб. ун-та. Сер. 10. Прикл. мат. Информ. Процессы управл. — 2014. — № 3.
4. *Кабанихин С. И., Криворотько О. И.* Оптимизационные методы решения обратных задач иммунологии и эпидемиологии// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2020. — *60*, № 4. — С. 590–600.
5. *Колпак Е. П., Гаврилова А. В.* Математическая модель возникновения культурных центров и течений в живописи// Мол. ученый. — 2019. — *22 (260)*. — С. 1–17.
6. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973.
7. *Мешков В. З., Половинкин И. П., Семенов М. Е.* Об устойчивости стационарного решения уравнения Хотеллинга// Обозр. прикл. пром. мат. — 2002. — *9*, № 1. — С. 226–227..
8. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1976.
9. *Половинкина М. В., Половинкин И. П.* Об изменении характера устойчивости тривиального решения при переходе от модели со сосредоточенными параметрами к модели с распределенными параметрами// Прикл. мат. физ. — 2020. — *52*, № 4. — С. 255–261.
10. *Самарский А. А., Михайлов А. П.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. — М.: Физматлит, 2005.
11. *Свирежев Ю. М., Логофет Д. О.* Устойчивость биологических сообществ. — М.: Наука, 1978.
12. *Afraimovich V., Young T., Muezzinoglu M. K., Rabinovich M. I.* Nonlinear dynamics of emotion-cognition interaction: When emotion does not destroy cognition?// Bull. Math. Biol. — 2011. — *73*. — P. 266–284.
13. *Aniji M., Kavitha N., Balamuralitharan S.* Approximate solutions for HBV infection with stability analysis using LHAM during antiviral therapy// Boundary-Value Probl. — 2020. — *2020*. — 80.
14. *Brauer F., Castillo-Chavez C.* Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology. — New York: Springer, 2012.
15. *D'Onofrio A., Manfredi P.* The interplay between voluntary vaccination and reduction of risky behavior: A general behavior-implicit SIR model for vaccine preventable infections// in: Current Trends in Dynamical Systems in Biology and Natural Sciences. — Switzerland: Springer Nature, 2020. — P. 185–203.
16. *Friedrichs K. O.* Spectral Theory of Operators in Hilbert Space. — New York–Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag, 1973.
17. *Gogoleva T. N., Shchepina I. N., Polovinkina M. V., Rabeeakh S. A.* On stability of a stationary solution to the Hotelling migration equation// J. Phys. Conf. Ser. — 2019. — *1203*. — 012041.
18. *Karev G. P.* Replicator equations and the principle of minimal production of information// Bull. Math. Biol. — 2010. — *72*. — P. 1124–1142.
19. *Puu T.* Nonlinear Economic Dynamics. — Berlin: Springer-Verlag, 1997.
20. *Rektorys K.* Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering. — Springer Science & Business Media, 2012.
21. *Seno H.* An SIS model for the epidemic dynamics with two phases of the human day-to-day activity// J. Math. Biol. — 2020. — *80*. — P. 2109–2140.
22. *Swanson K. R., Rostomily R. C., Alvord E. C.* A mathematical modelling tool for predicting survival of individual patients following resection of glioblastoma: a proof of principle// Br. J. Cancer. — 2008. — *98*, № 1. — P. 113–119.

Половинкина Марина Васильевна
Воронежский государственный университет инженерных технологий
E-mail: polovinkina-marina@yandex.ru