ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 207 (2022). С. 144–156
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-207-144-156

УДК 519.24

НЕКОТОРЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СРЕДНИХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЧЕТКИХ ЧИСЕЛ

© 2022 г. **В. Л. ХАЦКЕВИЧ**

Аннотация. В работе рассмотрены экстремальные свойства средних значений нечетких чисел, а также их систем относительно некоторых метрик на множестве нечетких чисел. Введено и изучено квазискалярное произведение нечетких чисел.

Ключевые слова: нечетко-случайная величина, среднее значение, экстремальное свойство.

SOME EXTREMAL PROPERTIES OF MEAN CHARACTERISTICS OF FUZZY NUMBERS

© 2022 **V. L. KHATSKEVICH**

Abstract. In this paper, we consider extremal properties of mean values of fuzzy numbers and their systems with respect to some metrics on the set of fuzzy numbers. The quasi-scalar product of fuzzy numbers is introduced and examined.

Keywords and phrases: fuzzy random variable, mean value, extremal property.

AMS Subject Classification: 60K10

1. Введение. В последние годы в различных задачах математического моделирования широко применяются методики, связанные с нечеткими множествами (см., например, [4, 18]). Одним из разделов бурно развивающейся теории нечетких множеств является теория нечетких чисел. В данной работе рассмотрены некоторые экстремальные свойства средних характеристик нечетких чисел.

Ниже под нечетким множеством A, заданным на универсальном пространстве X, будем понимать совокупность упорядоченных пар $(\mu_A(x), x)$, где функция принадлежности $\mu_A(x)\colon X \to [0,1]$ определяет степень принадлежности $\forall x \in X$ множеству A.

Будем использовать следующее определение нечеткого числа (ср. [4, гл. 2-4], [16, гл. 5]). Нечетким числом A называется нечеткое множество, универсальным множеством которого является множество действительных чисел, и которое дополнительно удовлетворяет следующим условиям:

(i) носитель нечеткого числа — замкнутое и ограниченное (компактное) множество действительных чисел: $\mathrm{Supp}(A) \subset \mathbb{R}$;

(ii) функция принадлежности нечеткого числа $\mu_A(x)$ выпукла;

(iii) функция принадлежности нечеткого числа $\mu_A(x)$ нормальна, т.е.

$$\sup_x \mu_A(x) = 1;$$

(iv) функция принадлежности нечеткого числа $\mu_A(x)$ полунепрерывна сверху.

Множество таких нечетких чисел ниже будем обозначать через J.

В настоящей работе ориентируемся на следующие экстремальные свойства числовых средних.

Рассмотрим совокупность n вещественных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Как известно (см. [2, гл. I, § 5]), их среднее

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} x_k$$

является решением следующей экстремальной задачи

$$\sum_{i=0}^{n} (x_i - x)^2 \to \min, \quad x \in \mathbb{R},$$

а медиана Me обладает следующим экстремальным свойством:

$$\sum_{i=0}^{n} |x_i - \mathrm{Me}\,| \leqslant \sum_{i=0}^{n} |x_i - x_j|, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Такого рода экстремальные свойства и различные их обобщения иногда используются для самого определения средних значений объектов различного рода (см., например, [2, гл. II, III], [3, гл. 5, § 5]).

В настоящей статье экстремальные свойства (в смысле минимизации некоторых расстояний) устанавливаются для средних характеристик нечетких чисел и их систем. При этом для нечетких чисел средние — это вещественные числа, а для систем нечетких чисел в качестве средних рассматриваются как вещественные, так и нечеткие числа. Приведены примеры.

2. Экстремальные свойства средних характеристик нечетких чисел. Среднее значение нечеткого числа A с функцией принадлежности $\mu_A(x)$, задается с помощью метода центроидной дефаззификации следующим образом:

$$M(A) = \int_{-\infty}^{\infty} x\tilde{\mu}_A(x)dx, \tag{1}$$

где $\tilde{\mu}_A$ — нормированная функция принадлежности, определяемая формулой

$$\tilde{\mu}_A = \mu_A(x) \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} \mu_A(x)dx. \tag{2}$$

Отметим, что интегрирование в (1) и (2) фактически осуществляется по $x \in \mathrm{supp}(A)$. Однако для нас удобнее записи вида (1) и (2).

Экстремальное свойство среднего $M(A)$ аналогично стандартному свойству математического ожидания случайной величины с плотностью вероятности $\tilde{\mu}_A(x)$ (см., например, [1, гл. 5, § 30]).

Предложение 1. *Среднее $M(A)$, определяемое формулой* (1), *является решением, причем единственным, следующей экстремальной задачи*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x - y|^2 \tilde{\mu}_A(x)dx \to \min, \quad y \in \mathbb{R},$$

т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x - M(A)|^2 \tilde{\mu}_A(x)dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} (x - y)^2 \tilde{\mu}_A(x)dx \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Замечание 1. Пусть $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — заданная непрерывная строго монотонная числовая функция. Аналогично случайным величинам, для нечетких чисел можно определить и изучить класс нелинейных средних вида

$$M_\phi(A) = \phi^{-1}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\tilde{\mu}(x)dx\right).$$

Функцию ϕ в этом случае назовем определяющей. Если $\phi(x) = x^p$ ($p > 1$ или $0 < p < 1$), получим аналог средней степенной. В случае $\phi(x) = \log_a(x)$ при $a > 1$ — аналог средней геометрической.

Согласно предложению 1 (ср. работу автора [15]) величина $\phi(M_\phi(A))$ является решением экстремальной задачи

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\phi(x) - y)^2 \tilde{\mu}(x) dx \to \min \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Пример 1. Пусть нечеткое треугольное число A характеризуется тройкой чисел (a, b, c), $a < b < c$, определяющей функцию принадлежности

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{если } x \in [a, b]; \\ \dfrac{x-c}{b-c}, & \text{если } x \in [b, c]; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Нетрудно установить, что нормированная функция принадлежности (2) имеет в этом случае вид

$$\tilde{\mu}(x) = \frac{2}{c-a} \mu(x).$$

Тогда среднее значение треугольного числа, определяемое формулой (1), равно

$$M(A) = \frac{1}{3}(a + b + c).$$

Медиану $\mathrm{Me}\, A$ нечеткого числа A по аналогии с медианой случайной величины можно определить как число, удовлетворяющее соотношению

$$\int_{-\infty}^{\mathrm{Me}\, A} \tilde{\mu}_A(x) dx = \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Предложение 2. *Медиана* $\mathrm{Me}\, A$ *нечеткого числа* A*, определяемая формулой* (3)*, является решением экстремальной задачи*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x - y| \tilde{\mu}_A(x) dx \to \min, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Доказательство аналогично приводимому для случайных величин с плотностью распределения вероятностей $\tilde{\mu}_A(x)$ (см., например, [1, гл. 5, § 30]).

Замечание 2. По аналогии с (3) можно ввести понятие квантиля q_β нечеткого числа порядка β, определяемого для заданного $\beta \in (0, 1)$ равенством

$$\int_{-\infty}^{q_\beta} \tilde{\mu}_\beta(x) dx = \beta.$$

Можно показать (ср. [14]), что квантиль минимизирует по $c \in (-\infty, +\infty)$ выражение

$$\int_{-\infty}^{c} (c - x) \tilde{\mu}(x) dx + \frac{\beta}{1-\beta} \int_{c}^{+\infty} (x - c) \tilde{\mu}(x) dx.$$

Пример 2. Рассмотрим нечеткое треугольное число A с функцией принадлежности $\mu(x)$, представленной в примере 1. В случае выполнения условия $a + c > 2b$ медиана $\mathrm{Me}\, A$ имеет вид

$$\mathrm{Me}\, A = c - \sqrt{\frac{1}{2}(c-a)(c-b)}.$$

В противоположном случае, т.е., когда $a + c \leqslant 2b$, медиана равна

$$\mathrm{Me}\, A = a + \sqrt{\frac{1}{2}(c-a)(b-a)}.$$

С другой стороны, средние характеристики нечетких чисел можно определить посредством α-уровневых множеств нечетких чисел.

Как известно, интервал α-уровня нечеткого числа A с функцией принадлежности $\mu_A(x)$ определяется соотношениями

$$A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \geqslant \alpha\} \quad (\alpha \in (0,1]), \quad A_0 = \mathrm{Supp}(A).$$

Обратно, нечеткое число по своим α-уровням однозначно восстанавливается посредством декомпозиции.

Согласно предположениям (i)–(iv) введения все α-уровни нечеткого числа — замкнутые и ограниченные интервалы вещественной оси. Обозначим левую (нижнюю) границу α-интервала $a^-(\alpha)$, а правую (верхнюю) — $a^+(\alpha)$, т. о. $A_\alpha = [a^-(\alpha), a^+(\alpha)]$. Иногда $a^-(\alpha)$ и $a^+(\alpha)$ называют, соответственно, левым и правым индексами нечеткого числа.

Отметим, что в силу предположения о выпуклости функции принадлежности нечеткого числа, функции $a^-(\alpha)$ и $a^+(\alpha)$ являются, соответственно, монотонно неубывающей и монотонно невозрастающей по α.

Как известно, среднее значение нечеткого числа A, используя интервальное представление, можно определить следующим образом:

$$m(A) = \frac{1}{2}\int_0^1 \big(a^-(\alpha) + a^+(\alpha)\big)\, d\alpha. \tag{4}$$

Пример 3. Рассмотрим нечеткое треугольное число A, характеризуемое тройкой (a, b, c). Как известно, в этом случае нижняя и, соответственно, верхняя граница α-интервала имеет вид

$$a^-(\alpha) = (b-a)\alpha + a, \quad a^+(\alpha) = -(c-b)\alpha + c.$$

Тогда среднее (4) для нечеткого треугольного числа равно

$$m(A) = \frac{1}{4}(a + 2b + c).$$

Заметим, что согласно примерам 1 и 3 различным образом определяемые средние для заданного треугольного числа не совпадают.

На множестве нечетких чисел можно по-разному ввести определения расстояний между ними. Например, определяемые посредством функций принадлежности (расстояние Евклида, расстояние Хэмминга). При интервальном подходе часто используют расстояния Хаусдорфа между множествами α-уровня нечетких чисел (см., например, [13]). Однако хотелось бы рассмотреть такое определение расстояния, чтобы среднее (4) минимизировало относительно него некоторую ошибку (ср. [12, §§ 4.37, 4.38]). В качестве такого расстояния удобно рассмотреть следующее.

Пусть A и B два нечетких числа. Зададим расстояние $d(A, B)$ между ними формулой

$$d(A,B) = \left(\int_0^1 (a^-(\alpha) - b^-(\alpha))^2 + (a^+(\alpha) - b^+(\alpha))^2 d\alpha\right)^{1/2}, \tag{5}$$

где $[a^-(\alpha), a^+(\alpha)]$ и $[b^-(\alpha), b^+(\alpha)]$ — интервалы α-уровней нечетких чисел A и B, соответственно.

Такое определение расстояния между нечеткими числами ранее использовалось, например, в [7] при изучении задачи о регрессии нечетких чисел.

Расстояние (5) обладает обычными свойствами метрики:

(a) $d(A, B) = d(B, A)$;
(b) $d(A, C) \leqslant d(A, B) + d(B, C)$ — неравенство треугольника;

(c) $d(A,B) \geqslant 0$; при этом $d(A,B) = 0$ точно тогда, когда $A = B$. Здесь равенство между нечеткими числами A и B понимается как равенство всех соответствующих интервалов α-уровня.

Отметим специальные свойства расстояния (5).

(d) $d(\lambda A, \lambda B) = |\lambda| d(A,B)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$;
(e) $d(A+C, B+C) = d(A,B)$ для всех $A,B,C \in J$.

Обозначим через $\hat{y}$ синглтон, отвечающий числу $y \in \mathbb{R}$, т.е. нечеткое число, функция принадлежности $\mu_{\hat{y}}(x)$ которого равна 1 при $x = y$ и 0 в противном случае. Отметим, что левый и правый индексы $\hat{y}$ при всех $\alpha \in [0,1]$ совпадают с y.

Предложение 3. *Среднее значение* (4) *нечеткого числа A минимизирует величину*

$$d^2(A,\hat{y}) = \delta(y) = \int\limits_0^1 \big((a^-(\alpha) - y)^2 + (a^+(\alpha) - y)^2\big)d\alpha \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

причем оно является единственным решением этой экстремальной задачи. Обратно, решение данной экстремальной задачи единственно, и оно совпадает со средним вида (4).

Доказательство следует из необходимого и достаточного условия минимума для дифференцируемой функции $\delta(y)$, т. к. $\delta'(y) = 4(y - m(A))$, а вторая производная $\delta''(y) = 4$ $(\forall y \in \mathbb{R})$. Единственность влечет сильная выпуклость функции $\delta(y)$. $\square$

Напомним, что нечеткое число A с функцией принадлежности $\mu_A(x)$ называют унимодальным, если условие $\mu_A(x) = 1$ выполнено только для одного значения $x \in \mathbb{R}$. Такое значение x называют модой. Оказывается, что мода обладает определенным экстремальным свойством.

Предложение 4. *Пусть A — унимодальное нечеткое число со строго выпуклой функцией принадлежности. Тогда его мода есть решение следующей экстремальной задачи*:

$$\Delta(y) = \int\limits_0^1 \Big(\big|a^-(\alpha) - y\big| + \big|a^+(\alpha) - y\big|\Big)d\alpha \to \min \quad \forall y \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Обратно, для унимодального числа решение экстремальной задачи (6) *единственно и совпадает с модой.*

Доказательство. Пусть $\mu_A(x)$ — функция принадлежности нечеткого числа A, отрезок $[a,c]$ — носитель нечеткого числа A и $b \in [a,c]$ — мода этого нечеткого числа, т.е. $\mu_A(b) = 1$. Обозначим $\mu_A(x)$ при $x \in [a,b]$ через $\mu_{b^-}(x)$ и при $x \in [b,c]$ через $\mu_{b^+}(x)$. Согласно предположению функция $\mu_{b^-}(x)$ строго монотонно возрастает, а функция $\mu_{b^+}(x)$ — строго монотонно убывает (каждая на своей области определения). Поэтому границы α-интервала нечеткого числа A задаются с помощью обратных функций $a^-(\alpha) = \mu_{b^-}^{-1}(\alpha)$ и $a^+(\alpha) = \mu_{b^+}^{-1}(\alpha)$.

Фиксируем число y. Тогда левую часть равенства (6) можем записать в виде

$$\Delta(y) = \int\limits_0^{\mu_{b^-}(y)} (y - a^-(\alpha))d\alpha + \int\limits_{\mu_{b^-}(y)}^1 (a^-(\alpha) - y)d\alpha + \int\limits_0^{\mu_{b^+}(y)} (a^+(\alpha) - y)d\alpha + \int\limits_{\mu_{b^+}(y)}^1 (y - a^+(\alpha))d\alpha.$$

Дифференцируя это выражение по y, получим $\Delta'_y = 2(\mu_{b^-}(y) - \mu_{b^+}(y))$.

Отметим, что по определению функция $\mu_{b^-}(y)$ монотонно убывает, а $\mu_{b^+}(y)$ монотонно возрастает. Поэтому функция $\Delta'_y(y)$ — монотонно убывает. Тогда, если y_* решение уравнения $\Delta'_y(y_*) = 0$, то в силу монотонности $\Delta'_y(y) < \Delta'_y(y_*) = 0$ при $y < y_*$ и $\Delta'_y(y) > 0$ при $y > y_*$. Таким образом, выполнено условие минимума в точке y_*. $\square$

Пример 4. Для нечеткого треугольного числа A, характеризуемого тройкой (a,b,c) (см. пример 1) в соответствии с предложением 4 мода, равная b, является решением экстремальной задачи (6).

Несмотря на значительное число работ, посвященных средним характеристикам нечетких чисел (см., например, [8, 10, 11]), приведенные выше экстремальные свойства ранее не отмечались.

3. Смежные вопросы. В ряде работ, в том числе в [9], применялось следующее определение расстояния между нечеткими числами.

Для нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\tilde{u}$ с α-уровнями $[z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$ и $[u^-(\alpha), u^+(\alpha)]$ положим

$$\rho(\tilde{z},\tilde{u}) = \left(\int_0^1\int_0^1 (\lambda(z^+(\alpha)-u^+(\alpha)) + (1-\lambda)(z^-(\alpha)-u^-(\alpha)))^2 d\lambda d\alpha\right)^{1/2}. \tag{7}$$

Интересный факт состоит в том, что среднее (4) обладает экстремальным свойством и относительно расстояния, введенного по формуле (7).

Предложение 5. *Среднее* (4) *является решением оптимальной задачи*

$$\rho(\tilde{z},\hat{y}) \to \min \quad y \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Действительно, при $y \in \mathbb{R}$ рассмотрим

$$\delta_1(y) = \rho^2(\tilde{z},\hat{y}) = \int_0^1\int_0^1 \Big(\lambda\big(z^+(\alpha)-y\big) + (1-\lambda)\big(z^-(\alpha)-y\big)\Big)^2 d\lambda d\alpha.$$

Производная этого выражения равна

$$\delta_1'(y) = -2\int_0^1\int_0^1 \Big(\lambda\big(z^+(\alpha)-y\big) + (1-\lambda)\big(z^-(\alpha)-y\big)\Big) d\lambda d\alpha.$$

Отсюда

$$\delta_1'(y) = -2\int_0^1 \lambda d\lambda \int_0^1 \big(z^+(\alpha)-y\big)d\alpha - 2\int_0^1 (1-\lambda)d\lambda\int_0^1 \big(z^-(\alpha)-y\big)d\alpha = 2y - \int_0^1 \big(z^+(\alpha)+z^-(\alpha)\big)d\alpha.$$

Таким образом, решение уравнения $\delta_1'(y) = 0$ совпадает со средним (4). При этом вторая производная $\delta_1''(y) = 2$. Так что среднее (4) — решение задачи (8).

Пусть нечеткому числу $\tilde{z}$ отвечают α-уровни $z_\alpha = [z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$. Положим, как это принято в интервальном анализе,

$$\operatorname{mid} z_\alpha = \frac{1}{2}(z^+(\alpha)+z^-(\alpha)), \quad \operatorname{rad} z_\alpha = \frac{1}{2}(z^+(\alpha)-z^-(\alpha)).$$

Для нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\tilde{u}$ определим квазискалярное произведение

$$\langle\tilde{z},\tilde{u}\rangle = \int_0^1 (\operatorname{mid} z_\alpha \operatorname{mid} u_\alpha + \operatorname{rad} z_\alpha \operatorname{rad} u_\alpha)d\alpha = \frac{1}{2}\int_0^1 (z^+(\alpha)u^+(\alpha) + z^-(\alpha)u^-(\alpha))d\alpha. \tag{9}$$

При этом квазинорма $\tilde{z}$ есть $\langle\tilde{z},\tilde{z}\rangle^{1/2}$. Другие определения скалярного произведения между нечеткими числами содержатся, например, в [6, 17]. Наше определение (9) характеризуется приводимой ниже связью с расстоянием (5).

Пример 5. Рассмотрим два треугольных числа $\tilde{z}_1$ и $\tilde{z}_2$, характеризуемые тройками a_i, b_i, c_i при $a_i < b_i < c_i$ $(i = 1, 2)$. По определению их верхних и нижних индексов (см. пример 1) и согласно (9)

$$\langle\tilde{z}_1,\tilde{z}_2\rangle = \frac{2}{3}b_1b_2 + \frac{1}{3}(a_1a_2 + c_1c_2) + \frac{1}{6}(a_1b_2 + b_1a_2 + b_1c_2 + c_1b_2).$$

Нетрудно проверить следующие свойства введенного квазискалярного произведения (9):

(i) $\langle\tilde{z},\tilde{u}\rangle = \langle\tilde{u},\tilde{z}\rangle$ для всех $\tilde{u},\tilde{z} \in J$;

(ii) $\langle c_1\tilde{z}, c_2\tilde{u}\rangle = c_1c_2\langle\tilde{z},\tilde{u}\rangle$ при условии, что произведение чисел $c_1c_2 > 0$;

(iii) $\langle \tilde z_1+\tilde z_2,\tilde u\rangle=\langle \tilde z_1,\tilde u\rangle+\langle \tilde z_2,\tilde u\rangle$ для всех $\tilde u,\tilde z_1,\tilde z_2\in J$;

(iv) $\langle \tilde z,\tilde z\rangle\geqslant 0$, причем условие $\langle \tilde z,\tilde z\rangle=0$ эквивалентно равенству нулю левого и правого индексов $\tilde z$.

Здесь сложение нечетких чисел и умножение на вещественное число понимается в интервальном смысле. т.е. для нечетких чисел $\tilde z_1$ и $\tilde z_2$ с α-интервалами $[z_i^-(\alpha),z_i^+(\alpha)]$ суммой является нечеткое число $\tilde z_1+\tilde z_2$ с α-интервалами $[z_1^-(\alpha)+z_2^-(\alpha),z_1^+(\alpha)+z_2^+(\alpha)]$. Умножение на положительное число означает умножение индексов на это число, а умножение на отрицательное число означает умножение индексов на это число и перемену их местами.

(v) Неравенство Коши—Буняковского $|\langle \tilde z,\tilde u\rangle|\leqslant\langle \tilde z,\tilde z\rangle^{1/2}\langle \tilde u,\tilde u\rangle^{1/2}$ для всех $\tilde u,\tilde z\in J$.

Проверим его. Пусть нечеткие числа $\tilde z,\tilde u$ характеризуются интервалами α-уровня $[z^-(\alpha),z^+(\alpha)]$ и $[u^-(\alpha),u^+(\alpha)]$ соответственно. Тогда

$$|\langle \tilde z,\tilde u\rangle|\leqslant\frac12\int\limits_0^1\Big|z^+(\alpha)u^+(\alpha)+z^-(\alpha)u^-(\alpha)\Big|d\alpha\leqslant\frac12\int\limits_0^1\Big((z^+)^2+(z^-)^2\Big)^{1/2}\Big((u^+)^2+(u^-)^2\Big)^{1/2}d\alpha\leqslant$$

$$\leqslant\frac12\left(\int\limits_0^1\big((z^+)^2+(z^-)^2\big)d\alpha\right)^{1/2}\left(\int\limits_0^1\big((u^+)^2+(u^-)^2\big)d\alpha\right)^{1/2}=\|\tilde z\|\|\tilde u\|.$$

Нечеткому числу $\tilde z$ с интервалом α-уровня $[z^-(\alpha),z^+(\alpha)]$ поставим в соответствие векторную функцию $\bar z(\alpha)=(z^+(\alpha),z^-(\alpha))^T$. Для векторных функций $\bar z$, $\bar u$ формула

$$\langle \bar z,\bar u\rangle=\frac12\int\limits_0^1(z^+(\alpha)u^+(\alpha)+z^-(\alpha)u^-(\alpha))d\alpha$$

определяет обычное скалярное произведение, а $\|\bar z\|=\langle \tilde z,\tilde z\rangle^{1/2}$ — норму.

Предложение 6. *Расстояние $d(\tilde z,\tilde u)$, определяемое формулой* (5)*, и норма $\|\bar z-\bar u\|$ связаны соотношением $d^2(\tilde z,\tilde u)=2\|\bar z-\bar u\|^2$ для всех $\tilde z,\tilde u\in J$.*

Этим, в частности, объясняется наличие специальных свойств (d), (e) расстояния (5).

Понятие квазискалярного произведения может быть использовано для определения линейной независимости системы нечетких чисел $\tilde z_1,\dots,\tilde z_n$. А именно, назовем систему нечетких чисел $\tilde z_1,\dots,\tilde z_n$ линейно независимой, если соответствующие векторные функции $\bar z_1(\alpha),\dots,\bar z_n(\alpha)$ — линейно независимы. Так как по определению $\langle \tilde z,\tilde u\rangle=\langle \bar z,\bar u\rangle$, то в силу известного результата линейная независимость системы нечетких чисел $\tilde z_1,\dots,\tilde z_n$ эквивалентна обратимости их матрицы Грама с элементами $\langle \tilde z_i,\tilde z_j\rangle$.

Пусть $f\colon[0,1]\to\mathbb R$ — неотрицательная квадратично суммируемая весовая функция, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_0^1 f(\alpha)d\alpha=1.$$

Взвешенное среднее значение нечеткого числа $\tilde z$, используя интервальное представление, можно определить следующим образом (см., например, [11]):

$$m_f(\tilde z)=\frac12\int\limits_0^1\big(z^-(\alpha)+z^+(\alpha)\big)f(\alpha)d\alpha. \tag{10}$$

Пусть $\tilde z$ и $\tilde u$ — два нечетких числа. Зададим взвешенное расстояние $\rho_f(\tilde z,\tilde u)$ между ними формулой

$$\rho_f(\tilde z,\tilde u)=\left(\int\limits_0^1\Big(\big(z^-(\alpha)-u^-(\alpha)\big)^2+\big(z^+(\alpha)-u^+(\alpha)\big)^2\Big)f(\alpha)d\alpha\right)^{1/2}. \tag{11}$$

Здесь $[z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$ и $[u^-(\alpha), u^+(\alpha)]$ — интервалы α-уровней нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\tilde{u}$, соответственно.

Предложение 7. *Взвешенное среднее значение* (10) *нечеткого числа* $\tilde{z}$ *минимизирует величину*

$$\delta(y) = \rho_f^2(\tilde{z}, \hat{y}) = \int_0^1 \Big(\big(z^-(\alpha) - y\big)^2 + \big(z^+(\alpha) - y\big)^2\Big) f(\alpha) d\alpha \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Оно является единственным решением этой экстремальной задачи.

Доказательство аналогично доказательству предложения 3.

Замечание 3. Аналогично (9) можно ввести взвешенное квазискалярное произведение

$$\langle \tilde{z}, \tilde{u} \rangle_f = \frac{1}{2} \int_0^1 \Big(z^+(\alpha) u^+(\alpha) + z^-(\alpha) u^-(\alpha)\Big) f(\alpha) d\alpha,$$

которое обладает свойствами аналогичными (i)–(v) квазискалярного произведения.

Иногда в качестве среднего нечеткого числа $\tilde{z}$ с индексами $z^-(\alpha)$ и $z^+(\alpha)$ рассматривают интервал (см., например, [10]) $[z^-_{\text{ср}}, z^-_{\text{ср}}]$, где

$$z^-_{\text{ср}} = \int_0^1 z^-(\alpha) d\alpha, \quad z^+_{\text{ср}} = \int_0^1 z^+(\alpha) d\alpha. \tag{12}$$

Предложение 8. *Числа* $z^{\pm}_{\text{ср}}$*, определяемые формулой* (12)*, являются решениями следующих экстремальных задач*:

$$\int_0^1 \big(z^{\pm}(\alpha) - y\big)^2 d\alpha \to \min \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Отметим, что функционалы, определяемые формулами (4) и (10) и характеризующие средние значения, являются линейными относительно интервальных операций сложения и умножения на число для нечетких чисел.

Введем теперь нелинейное среднее нечеткого числа $\tilde{z}$ посредством заданной непрерывной строго монотонной (определяющей) функции $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ по формуле

$$m_\phi(\tilde{z}) = \phi^{-1}\left(\frac{1}{2}\int_0^1 \Big(\phi(z^-(\alpha)) + \phi(z^+(\alpha))\Big) d\alpha\right). \tag{13}$$

Подчеркнем, что выражение, являющееся аргументом функции ϕ^{-1} в определении $m_\phi(\tilde{z})$ фактически является средним нечеткого числа $\phi(\tilde{z})$.

Из предложения 3 вытекает следующее утверждение (ср. [15]).

Предложение 9. *Величина* $\phi(m_\phi(\tilde{z}))$*, где* $m_\phi(\tilde{z})$ *определяется формулой* (13)*, является решением экстремальной задачи*

$$d(\phi(\tilde{z}), \hat{y}) \to \min \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

4. Средние и нечеткие средние систем нечетких чисел. Возможны различные подходы к определению нечеткого среднего совокупности нечетких чисел (см., например, [18, гл. 7]).

Будем связывать нечеткие средние с решениями некоторых экстремальных задач, по аналогии со средним арифметическим и медианой совокупности действительных чисел.

Пусть имеются такие вещественные числа $\beta_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, n)$, что

$$\beta_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^n \beta_i = 1.$$

Рассмотрим взвешенное нечеткое среднее нечетких чисел $\tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_n$

$$\tilde{z}_{\text{ср}} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \tilde{z}_i. \tag{14}$$

Такого рода суммы встречаются, например, при нечетком портфельном инвестировании, когда $\tilde{z}_i$ — нечеткие доходности отдельных финансовых активов, β_i — их доли в портфеле ценных бумаг.

Отметим, что функция принадлежности нечеткого числа (14) может быть построена по функциям принадлежности нечетких чисел $\tilde{z}_i$ на основе принципа нечеткого обобщения Л. Заде. Поэтому среднее значение и медиана нечеткого числа $\tilde{z}_{\text{ср}}$ могут быть найдены по формулам (1), (3).

Остановимся более подробно на интервальном подходе. Рассмотрим среднее значение $m(\tilde{z}_{\text{ср}})$ (см. (4)) нечеткого числа $\tilde{z}_{\text{ср}}$, определяемого формулой (14). Согласно предложению 3 среднее $m(\tilde{z}_{\text{ср}})$ является решением следующей экстремальной задачи

$$d(\tilde{z}_{\text{ср}}, y) \to \min \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Здесь расстояние d определяется формулой (5). Кроме того, по определению интервального сложения левый и правый индексы нечеткого числа $\tilde{z}_{\text{ср}}$ при любом $\alpha \in (0,1]$ равны соответственно

$$z^-_{\text{ср}}(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i z_i^-(\alpha), \quad z^+_{\text{ср}}(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i z_i^+(\alpha).$$

Тогда согласно определению

$$m(\tilde{z}_{\text{ср}}) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i m(\tilde{z}_i). \tag{15}$$

В связи с этим имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Среднее значение $m(\tilde{z}_{ср})$ нечеткого числа $\tilde{z}_{ср}$, определяемого формулой* (14), *является решением задачи*

$$\delta_n(y) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_0^1 \Big(\big(z_i^-(\alpha) - y\big)^2 + \big(z_i^+(\alpha) - y\big)^2 \Big) d\alpha \to \min \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

причем единственным. Здесь z_i^- и z_i^+ — левый и правый индексы нечеткого числа $\tilde{z}_i$.

Доказательство. Рассмотрим производную $\delta_n'(y)$:

$$\delta_n'(y) = -2\sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_0^1 \Big(z_i^-(\alpha) + z_i^+(\alpha) - 2y\Big) d\alpha = -2\sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_0^1 \Big(z_i^-(\alpha) + z_i^+(\alpha)\Big) d\alpha + 4y.$$

Поэтому условие $\delta_n'(y_*) = 0$ влечет равенство

$$y_* = \sum_{i=1}^{n} \beta_i m(z_i).$$

Тогда $\delta_n'(m(\tilde{z}_{\text{ср}})) = 0$ согласно (15). При этом $\delta_n''(y) = 4$ для всех $y \in \mathbb{R}$. Таким образом, утверждение теоремы является следствием достаточного признака минимума для функции $\delta_n(y)$. При этом единственность вытекает из сильной выпуклости функции $\delta_n(y)$. □

Отметим, что использование предложения 3 для нечеткого среднего (14) приводит к экстремальной задаче

$$\int_0^1 \left(\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i z_i^-(\alpha) - y \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i z_i^+(\alpha) - y \right)^2 \right) d\alpha \to \min \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

решением которой также является $m(\tilde{z}_{\text{ср}})$.

Оказывается, что и само взвешенное нечеткое среднее (14) есть решение некоторой экстремальной задачи.

Теорема 2. *Нечеткое среднее* (14) *является единственным решением следующей задачи*:

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \int\limits_0^1 \Big(\big(z_i^-(\alpha) - w^-(\alpha)\big)^2 + \big(z_i^+(\alpha) - w^+(\alpha)\big)^2\Big) d\alpha \to \min \quad \forall \tilde{w} \in J. \tag{16}$$

Здесь J — совокупность всех нечетких чисел, обладающих свойствами (i)–(iv) *из Введения* (*см. с.* 144).

Доказательство. Фиксируем i и $\alpha \in (0,1]$. Аргумент α в нижеследующих формулах писать не будем, имея его в виду по умолчанию. Рассмотрим выражение

$$(z_i^- - w^-)^2 - (z_i^+ - w^+)^2 = (z_i^- - z_{\text{ср}}^- + z_{\text{ср}}^- - w^-)^2 + (z_i^+ - z_{\text{ср}}^+ + z_{\text{ср}}^+ - w^+)^2 =$$
$$= (z_i^- - z_{\text{ср}}^-)^2 + (z_{\text{ср}}^- - w^-)^2 + 2(z_i^- - z_{\text{ср}}^-)(z_{\text{ср}}^- - w^-) + (z_i^+ - z_{\text{ср}}^+)^2 + (z_{\text{ср}}^+ - w^+)^2 + 2(z_i^+ - z_{\text{ср}}^+)(z_{\text{ср}}^+ - w^+).$$

Умножим обе части на β_i и просуммируем по i обе части полученного равенства. Тогда с учетом равенств

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i (z_i^- - z_{\text{ср}}^-) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i z_i^- - z_{\text{ср}}^- = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \beta_i (z_i^+ - z_{\text{ср}}^+) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i (z_i^+ - z_{\text{ср}}^+) = 0$$

получим

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i ((z_i^- - w^-)^2 + (z_i^+ - w^+)^2) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i ((z_i^- - z_{\text{ср}})^2 + (z_i^+ - z_{\text{ср}})^2) + (z_{\text{ср}}^- - w^-)^2 + (z_{\text{ср}}^+ - w^+)^2).$$

Здесь мы учли, что

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1.$$

Интегрируя по α, получим требуемое утверждение. □

Следствие 1. *Нечеткое среднее*

$$\hat{z}_{cp} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \tilde{z}_i$$

является единственным решением экстремальной задачи

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^1 ((z_i^-(\alpha) - w^-(\alpha))^2 + (z_i^+(\alpha) - w^+(\alpha))^2) d\alpha \to \min \quad \forall \tilde{w} \in J.$$

Этот результат является обобщением классического характеристического экстремального свойства среднего арифметического (см., например, [2, гл. I, § 5]).

Пример 6. Рассмотрим дискретную нечетко-случайную величину $\tilde{Z}$, значениями которой являются нечеткие числа $\tilde{z}_i$ $(i = 1, .., n)$, принимаемые с вероятностями p_i $(i = 1, \ldots, n)$. Определим нечеткое математическое ожидание $\tilde{Z}$ формулой

$$M(\tilde{Z}) = \sum_{i=1}^{n} p_i \tilde{z}_i.$$

Согласно теореме 2 величина $M(\tilde{Z})$ является решением экстремальной задачи (16) при $\beta_i = p_i$.

Если дискретная нечетко-случайная величина $\tilde{Z}$ принимает счетное число значений $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots$ с вероятностями $p_1, p_2, \dots$, то в качестве ее нечеткого математического ожидания следует брать ряд

$$M(\tilde{Z}) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \tilde{z}_i,$$

понимаемый (например) в смысле сходимости по метрике (5). В этом случае, как и выше, справедлив соответствующий экстремальный результат.

Пример 6 показывает, какой вид в случае нечетко-случайных величин принимает известный в теории вероятностей результат об экстремальном свойстве математического ожидания «обычных» случайных величин.

Нечетко-случайные величины и их средние активно исследуются в последние годы (см., например, [6, 9]), однако экстремальные свойства такого года ранее не отмечались.

Обсудим понятие медианы совокупности нечетких чисел. Одним из возможных подходов к определению нечеткой медианы является следующий. Ранжируем совокупность нечетких чисел $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n$, исходя из какого-либо признака сравнения (например, по средним значениям). Срединное значение в полученном ряду назовем нечеткой квазимедианой.

Приведем пример реализации этого подхода. Определим соотношение неравенства (доминирования) $\tilde{z} \prec \tilde{w}$ между нечеткими числами $\tilde{z}$ и $\tilde{w}$ с α-интервалами $[z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$ и $[w^-(\alpha), w^+(\alpha)]$ формулами

$$z^-(\alpha) < w^-(\alpha), \quad z^+(\alpha) < w^+(\alpha) \quad \forall \alpha \in (0, 1].$$

Такое определение используется, например, в [5, гл. 4, 5].

Пусть задана система возрастающих нечетких чисел $\tilde{z}_1 \prec \ldots \prec \tilde{z}_N$. Срединное значение в этом ряду назовем квазимедианой. В случае нечетного $N = 2n - 1$ это будет $\tilde{z}_n$. В четном случае $N = 2n$ в качестве срединного значения возьмем полусумму центральных членов $1/2(\tilde{z}_n + \tilde{z}_{n+1})$. Так определенная квазимедиана обладает характерным экстремальным свойством.

Предложение 10. *Для заданной системы возрастающих нечетких чисел $\tilde{z}_1 \prec \ldots \prec \tilde{z}_N$ срединное значение $\tilde{z}_{cp}$ обладает следующим экстремальным свойством*:

$$\sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \Big(\big| z_i^-(\alpha) - z_{cp}^-(\alpha) \big| + \big| z_i^+(\alpha) - z_{cp}^+(\alpha) \big| \Big) d\alpha \leqslant \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \Big(\big| z_i^-(\alpha) - z_j^-(\alpha) \big| + \big| z_i^+(\alpha) - z_j^+(\alpha) \big| \Big) d\alpha$$

для $j = 1, \dots, N$.

Действительно, по условию при каждом $\alpha \in (0, 1]$ для системы левых индексов выполнены соотношения $z_1^-(\alpha) < \ldots < z_N^-(\alpha)$. Срединное значение этой системы чисел совпадает с $z_{\text{ср}}^-(\alpha)$ и является медианой. Поэтому согласно известному экстремальному свойству числовых медиан (см., например, [2, гл. I, § 5]) справедливо соотношение

$$\sum_{i=1}^{N} \big| z_i^-(\alpha) - z_{\text{ср}}^-(\alpha) \big| \leqslant \sum_{i=1}^{N} \big| z_i^-(\alpha) - z_j^-(\alpha) \big|, \quad j = 1, \dots, N.$$

Аналогично для правых индексов $z_1^+(\alpha) < \ldots < z_N^+(\alpha)$ срединным значением будет $z_{\text{ср}}^+(\alpha)$; поэтому

$$\sum_{i=1}^{N} \big| z_i^+(\alpha) - z_{\text{ср}}^+(\alpha) \big| \leqslant \sum_{i=1}^{N} \big| z_i^+(\alpha) - z_j^+(\alpha) \big|, \quad j = 1, \dots, N.$$

Складывая эти неравенства и интегрируя обе части полученного соотношения по α от 0 до 1, получим требуемый результат.

Предложение 10 переносит известное экстремальное свойство числовых медиан на нечеткие числа.

Другие определения нечетких медиан, не опирающиеся на экстремальные свойства, рассмотрены, например, в [18, гл. 7], [8].

Приведем теперь результат относительно экстремального свойства специального среднего в метрике Евклида.

Как известно, расстояние Евклида между нечеткими числами A и B с функциями принадлежности $\mu_A(x)$ и $\mu_B(x)$ определяется равенством

$$d_E(A,B)=\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\mu_A(x)-\mu_B(x))^2dx\right)^{1/2}. \tag{17}$$

Уточним, что интегрирование в этой формуле фактически производится по ограниченному множеству $\operatorname{supp}(A\cup B)$.

Выпуклой комбинацией нечетких чисел $\tilde z_i$, $i=1,\dots,n$, с функциями принадлежности $\mu_i(x)$ называют нечеткое число $\tilde z$ с функцией принадлежности

$$\mu(x)=\sum_{i=1}^n\beta_i\mu_i(x),\quad \beta_i\geqslant 0,\quad i=1,\dots,n,\qquad \sum_{i=1}^n\beta_i=1.$$

Подчеркнем, что выпуклая комбинация $\mu(x)$, по существу, является взвешенным средним $\mu_i(x)$.

Обозначим через $\Phi_{\text{пр}}$ совокупность функций принадлежности, удовлетворяющих условиям (i)–(iv) из определения нечеткого числа во введении.

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\sum_{i=1}^n\beta_i d_E^2(\tilde z_i,\tilde z_\eta)\to\min,\quad \eta\in\Phi_{\text{пр}}, \tag{18}$$

где $\tilde z_\eta$ — нечеткое число с функцией принадлежности $\eta(x)$.

Теорема 3. *Пусть заданы нечеткие числа* $\tilde z_i$ $(i=1,\dots,n)$ *с функциями принадлежности* $\mu_i(x)$. *Тогда их выпуклая комбинация*

$$\sum_{i=1}^n\beta_i\mu_i(x)$$

является единственным решением экстремальной задачи (18).

Доказательство. В соответствии с определением (17) экстремальная задача (18) может быть записана в виде

$$\delta_\eta=\sum_{i=1}^n\beta_i\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\mu_i(x)-\eta(x))^2dx\to\min,\quad \eta\in\Phi_{\text{пр}}.$$

Пусть $\eta(x)$ — произвольная функция принадлежности из $\Phi_{\text{пр}}$, а

$$\mu(x)=\sum_{i=1}^n\beta_i\mu_i(x)$$

— выпуклая комбинация функций принадлежности $\mu_i(x)$. Фиксируем i и рассмотрим выражение

$$(\mu_i(x)-\eta(x))^2=(\mu_i(x)-\mu(x)+\mu(x)-\eta(x))^2=$$
$$=(\mu_i(x)-\mu(x))^2+(\mu(x)-\eta(x))^2+2(\mu_i(x)-\mu(x))(\mu(x)-\eta(x)).$$

Умножим обе части полученного равенства на β_i и просуммируем их по i от 1 до n. Тогда при каждом $x\in(-\infty,+\infty)$

$$\sum_{i=1}^n\beta_i(\mu_i(x)-\eta(x))^2=\sum_{i=1}^n\beta_i(\mu_i(x)-\mu(x))^2+(\mu(x)-\eta(x))^2+2(\mu(x)-\eta(x))\sum_{i=1}^n\beta_i(\mu_i(x)-\mu(x)).$$

При этом последнее слагаемое обращается в 0 по определению функции $\mu(x)$ и в силу равенства $\sum\limits_{i=1}^n\beta_i=1$. Тогда

$$\delta_\eta = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\mu_i(x) - \mu(x))^2 dx + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\mu(x) - \eta(x))^2 dx,$$

откуда и следует утверждение теоремы. □

Следствие 2. *Функция*

$$\hat{\mu}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x)$$

минимизирует по η *сумму квадратов евклидовых расстояний*

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\mu_i(x) - \eta(x))^2 dx.$$

5. Заключение. В работе рассмотрены средние характеристики нечетких чисел — аналитические средние, медианы, моды. Выделены расстояния на множестве нечетких чисел, относительно которых соответствующее средние обладают экстремальными свойствами, и проверены эти свойства. Введено квазискалярное произведение между нечеткими числами, и установлена его взаимосвязь с выделенной метрикой на множестве нечетких чисел. Рассмотрены средние и нечеткие средние характеристики систем нечетких чисел, и установлены их экстремальные свойства. Приведенные в работе примеры для треугольных чисел допускают обобщения на так называемые $L - R$ числа, в частности, трапецеидальные.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. — М.: Либроком, 2011.
2. *Джини К.* Средние величины. — М.: Статистика, 1970.
3. *Орлов А. И.* Прикладная статистика. — М.: Экзамен, 2006.
4. *Пегат А.* Нечеткое моделирование и управление. — М.: Бином, 2015.
5. *Смоляк С. А.* Оценки эффективности инвестиционных проектов в условиях риска и неопределенности. — М.: Наука, 2012.
6. *Шведов А. С.* Оценивание средних и ковариаций нечетко-случайных величин// Прикл. эконометрика. — 2016. — *42*. — С. 121–138.
7. *Bargiela A., Pedrycz W., Nakashima T.* Multiple regression with fuzzy data// Fuzzy Sets Syst. — 2007. — P. 2169–2188.
8. *Calvo T., Mesiar R.* Generalized median// Fuzzy Sets Syst. — 2001. — *124*. — P. 59–61.
9. *Colubi A., Coppi R., D'Urso P., Gil M. A.* Statistics with fuzzy random variables// Metron–Int. J. Stat. — 2007. — *65*. — P. 277–303.
10. *Dubois D., Prade H.* The mean value of fuzzy number// Fuzzy Sets Syst. — 1987. — *24*. — P. 279–300.
11. *Fuller R., Majlender P.* On weighted possibilistic mean value and variance of fuzzy numbers// Fuzzy Sets Syst. — 2003. — *136*. — P. 363–374.
12. *Hoffmann-Jorgensen J.* Probability with a View Toward Statistics. — New York: Chapman & Hall, 1998.
13. *Kaleva O., Seikkala S.* On fuzzy metric spaces// Fuzzy Sets Syst. — 1984. — *12*. — P. 215–229.
14. *Khatskevich V. L.* On random properties of mean values of continuous random variables and relations between them// J. Math. Sci. — 2017. — *1*, № 2. — P. 304–312.
15. *Khatskevich V. L.* On some class of nonlinear mean random values// J. Phys. Conf. Ser. — 1479. — 012087.
16. *Lee K. H.* First Course on Fuzzy Theory and Applications. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 2004.
17. *Nather W.* Regression with fuzzy data// Comput. Stat. Data Anal. — 2006. — *51*, № 1. — P. 235–252.
18. *Nguyen H. T., Wu B.* Fundamentals of Statistics with Fuzzy Data. — Berlin: Springer, 2006.

Хацкевич Владимир Львович
Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил
«Военно-воздушная академия им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», Воронеж
E-mail: vlkhats@mail.ru