ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 216 (2022). С. 3–11
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-216-3-11

УДК 517.925.51

К ПРОБЛЕМЕ УСТОЙЧИВОСТИ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2022 г. **В. В. АБРАМОВ**

Аннотация. Исследована нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений, правая часть которой является периодической по независимой переменной, локально гладко зависит от малого параметра и от фазовой переменной. Доказаны признаки, гарантирующие произвольную малость возмущенных решений при условии, что начальные значения решений и параметр достаточно малы. В рассуждениях использованы свойства нелинейных приближений правого и левого операторов монодромии.

***Ключевые слова*:** дифференциальное уравнение, малый параметр, устойчивость, оператор монодромии.

ON THE STABILITY OF THE TRIVIAL SOLUTION TO A PERIODIC SYSTEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

© 2022 **V. V. ABRAMOV**

Abstract. In this paper, we examine a normal system of ordinary differential equations whose right-hand side is periodic in the independent variable and locally smoothly depends on the small parameter and the phase variable. Using the properties of nonlinear approximations of the right and left monodromy operators, we prove conditions that guarantee the arbitrary smallness of perturbed solutions for sufficiently small initial values of the solutions and the parameter.

***Keywords and phrases*:** differential equation, small parameter, stability, monodromy operator.

***AMS Subject Classification*:** 34D20, 34C25

1. Введение. При обсуждении вопроса о формулировке свойства «практической» устойчивости в монографии И. Г. Малкина [6, с. 21] приводится пример скалярного уравнения $\dot{x} = \mu^2 x - x^3$, для которого нулевое решение неустойчиво вправо. Однако возмущенные решения произвольно малы, если достаточно малы не только начальные значения решений, но и параметр μ. При этом сделан вывод о том, что такого рода «практическая» устойчивость нулевого решения связана с ляпуновской устойчивостью двух стационарных решений $x = \pm\mu$, ограничивающих область отталкивания нулевого решения в смысле Ляпунова. Тем не менее, несколько усложнив приведенный пример, можно заметить целесообразность введения ослабленного понятия устойчивости. Рассмотрим скалярное уравнение $\dot{x} = \mu^2 a(t)x - x^3$, в котором $a(t)\colon \mathbb{R} \to [b, c]$, $b > 0$. Так как $\dot{x}x = \mu^2 a(t)x^2 \geqslant \mu^2 bx^2$, то в линейном приближении решение $x = 0$ данного уравнения неустойчиво по Ляпунову при $\mu \neq 0$. Однако область отталкивания, включенная в интервал $(-|\mu|\sqrt{c}, |\mu|\sqrt{c})$, имеет бесконечно малый диаметр при $\mu \to 0$. Следовательно, решение $x = 0$ можно считать «практически» устойчивым. Идея этого примера приводит к понятию устойчивости по параметру, которое исследовал М. М. Хапаев на конечном и на неограниченном интервалах с помощью

 © ВИНИТИ РАН, 2022

комбинации метода усреднения и второго метода Ляпунова (см. [7]). Предполагалось, что имеют место критические случаи, когда при параметре, равном нулю, нулевое решение исследуемой системы устойчиво по Ляпунову, но не является асимптотически устойчивым. Для системы с малым параметром вопрос о вариантах ослабления понятия устойчивости, основанного на ляпуновских возмущениях, рассматривался также в [1].

В данной работе исследуем проблему двусторонней устойчивости по параметру для нулевого решения периодической системы обыкновенных дифференциальных уравнений. С этой целью используем метод оценки степеней оператора монодромии, изложенный в монографии М. А. Красносельского [5] и примененный для исследования свойства устойчивости по параметру в [2–4].

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = g(t, x, \mu), \tag{1}$$

в которой $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ — малый параметр, $g(t, 0_n, \mu) = 0_n$. Допустим, что при любом достаточно малом начальном значении $x(0, a, \mu) = a$ ее решение $x(t, a, \mu)$ единственно и нелокально продолжаемо.

Определение 1. Решение $x = 0_n$ системы (1) двусторонне μ-устойчиво (двусторонне устойчиво по параметру), если для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие число $\delta > 0$ и множество $M \subset \mathbb{R}^m$, $0_m \in M'$, что при всех $a \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in M$ и $t \in \mathbb{R}$ из неравенств $\|a\| < \delta$, $\|\mu\| < \delta$ следует оценка $\|x(t, a, \mu)\| < \varepsilon$.

Здесь и далее символом $\| * \|$ обозначается какая-либо конечномерная норма вектора или матрицы вне зависимости от их размерности.

Замечание 1. Ясно, что устойчивость по определению 1 означает наличие устойчивости как влево, так и вправо, причем в общем случае решение может быть неустойчивым по Ляпунову.

2. Вспомогательные результаты. Далее исследуем вопрос о двусторонней устойчивости по параметру в силу определения 1, предполагая, что при всех (t, x, μ) выполняется условие $g(t \pm \omega, x, \mu) = g(t, x, \mu)$, то есть система (1) является периодической. Кроме того, будем предполагать, что функция $g(t, x, \mu)$ дифференцируема по фазовой переменной и непрерывна по параметру в окрестности точки $(x, \mu) = (0_n, 0_m)$. Тогда система (1) локально близка к линейной, значит, ее решения определены, по крайней мере, при $t \in [-\omega, \omega]$. Поэтому при достаточно малых начальном значении и параметре определены левый и правый операторы монодромии $a \to x(\pm\omega, a, \mu)$.

Установим признаки устойчивости в терминах последовательности степеней $x(s\omega, a, \mu)$, $s \in \mathbb{Z}$ оператора монодромии.

Лемма 1. *Для ω-периодической по t системы вида* (1) *решение $x = 0_n$ двусторонне μ-устойчиво тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие число $\delta > 0$ и множество $M \in \mathbb{R}^m$, $0_m \in M'$, что при всех $a \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in M$ и $s \in \mathbb{Z}$ из неравенств $\|a\| < \delta$, $\|\mu\| < \delta$ следует оценка $\|x(s\omega, a, \mu)\| < \varepsilon$.*

Доказательство. Необходимость следует непосредственно из определения 1, если $t = s\omega$, $s \in \mathbb{Z}$.

Установим достаточность. Произвольно зафиксируем $\varepsilon > 0$. В силу непрерывной зависимости решения от начального значения и параметра существует такое число $\Delta > 0$, что при любых $\tau \in [-\omega, \omega]$, a: $\|a\| < \Delta$ и $\mu \in M$: $\|\mu\| < \Delta$ справедливо неравенство $\|x(\tau, a, \mu)\| < \varepsilon$. По условию для $\Delta > 0$ существует $\delta \in (0, \Delta)$, для которого при всех $s \in \mathbb{Z}$, a: $\|a\| < \delta$ и $\mu \in M$: $\|\mu\| < \delta$ имеет место оценка $\|x(s\omega, a, \mu)\| < \Delta$. Тогда по групповому свойству периодической динамической системы для произвольного $t = s\omega + \tau$, $s \in \mathbb{Z}$, $\tau \in [-\omega, \omega]$ из условий a: $\|a\| < \delta$ и $\mu \in M$: $\|\mu\| < \delta$ следует, что

$$\|x(t, a, \mu)\| = \|x(\tau, x(s\omega, a, \mu), \mu)\| < \varepsilon.$$

Итак, нулевое решение системы (1) устойчиво по определению 1. Лемма 1 доказана. □

Из леммы 1 следует признак двусторонней устойчивости в терминах оценок для односторонних операторов монодромии.

Лемма 2. *Если для любого* $\delta_1 > 0$ *существует такое* $\delta_2 > 0$*, что при* $\|a\| < \delta_1$*,* $\|\mu\| < \delta_2$ *справедливы оценки* $\|x(\pm\omega, a, \alpha)\| < \delta_1$*, то для* ω*-периодической по* t *системы вида* (1) *решение* $x \equiv 0_n$ *двусторонне* μ*-устойчиво.*

Доказательство. Произвольно зафиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta_1 = \varepsilon$. По условию существует такое $\delta_2 > 0$, что при $\|a\| < \delta_1$, $\|\mu\| < \delta_2$ справедливы оценки $\|x(\pm\omega, a, \alpha)\| < \varepsilon$. Допустим, что для некоторого $s \in \mathbb{Z}$ при $\|a\| < \delta_1$, $\|\alpha\| < \delta_2$ имеет место неравенство $\|x(s\omega, a, \alpha)\| < \varepsilon$. Тогда $\|x((s+1)\omega, a, \mu)\| = \|x(\omega, x(s\omega, a, \mu), \mu)\| < \varepsilon$. Следовательно, по индукции $x(s\omega, a, \mu) < \varepsilon$ при всех $s \in \mathbb{Z}$, $\|a\| < \delta$, $\|\mu\| < \delta$, где $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Итак, в силу леммы 1 нулевое решение устойчиво по определению 1. Лемма 2 доказана. □

Замечание 2. Очевидно, аналоги лемм 1 и 2 при $s \in \mathbb{Z}_-$ или $s \in \mathbb{Z}_+$ можно использовать и в качестве достаточных признаков односторонней устойчивости по параметру.

3. Некритический случай устойчивости по параметру. Рассмотрим систему вида (1)

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x, \mu), \tag{2}$$

в которой матрица $A(t)$ и вектор-функция $f(t, x, \mu)$ являются ω-периодическими по t, $f(t, x, \mu)$ достаточно гладкая относительно x и μ в окрестности точки $(x, \mu) = (0_n, 0_m)$, $f(t, 0_n, \mu) \equiv 0_n$, $f'(t, 0_n, 0_m) \equiv 0_{nn}$. Будем предполагать, что для устойчивости нулевого решения системы (2) по линейному приближению имеет место критический случай как влево, так и вправо, то есть справедливы равенства

$$\rho(X_r) = 1, \quad r = 1, 2,$$

в которых $\rho(*)$ — операция вычисления спектрального радиуса матрицы, $X_r = X((-1)^r\omega)$ — матрицы монодромии, $X(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t)x$, $X(0) = E$.

Сформулируем идею конструкции признака устойчивости. Допустим, что нулевое решение системы вида (1) при нулевом значении параметра асимптотически устойчиво вправо (влево) по Ляпунову. Тогда нулевое решение устойчиво вправо (влево) по параметру. При этом с точки зрения устойчивости по параметру имеет место некритический случай [3, 7]. Если к тому же при ненулевом значении параметра нулевое решение асимптотически устойчиво влево (вправо), то тем более имеет место более слабый тип устойчивости — по параметру. Таким образом, нулевое решение оказывается двусторонне устойчивым по параметру.

Для реализации этой идеи с помощью леммы 2, установим локальную структуру односторонних операторов монодромии. Решение системы (2) удовлетворяет интегральному уравнению

$$x(t, x, \mu) = X(t)a + X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) f(\tau, x(\tau, x, \mu), \mu) d\tau. \tag{3}$$

Обозначим

$$y(t, x, \mu) = X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) f(\tau, x(\tau, x, \mu), \mu) d\tau.$$

Так как $x = 0_n$ — решение системы (2), то $x(t, 0_n, \mu) \equiv 0_n$ в силу единственности решения с заданным начальным значением. Поэтому, учитывая гладкость правой части системы (2) и условие $f'_x(t, 0_n, 0_m) \equiv 0_{nm}$, имеем

$$y'_a(t, 0_n, 0_m) = X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) f'_x(\tau, x(\tau, 0_n, 0_m), 0_m) x'_a(\tau, 0_n, 0_m) d\tau \equiv 0_{nn}. \tag{4}$$

Подставим выражение вида $x(t, a, \mu) = X(t)a + y(t, a, \mu)$ в правую часть уравнения (3). В силу равенства (4) получим локальный вид решения системы (2)

$$x(t, a, \mu) = X(t)a + y_1(t, a, \mu) + y_2(t, a, \mu), \tag{5}$$

в котором

$$y_2(t,a,\mu)=y(t,a,\mu)-y_1(t,a,\mu),\quad y_1(t,a,\mu)=X(t)\int\limits_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau,X(\tau)a,\mu)d\tau.$$

Учитывая гладкость правой части системы (2), с помощью формулы Тейлора получим выражения

$$y_1((-1)^r\omega,a,\mu)=p_r(a,\mu)+\psi_r(a,\mu),\quad r=1,2, \tag{6}$$

в которых $p_r(a,\mu)$ — вектор-формы порядка k, $k\in\mathbb{N}$, $k>1$, то есть $p_r(\alpha a,\alpha\mu)=\alpha^k p_r(a,\mu)$ для любого $\alpha\in\mathbb{R}$, вектор-функция $\psi_r(a,\mu)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\alpha\to 0}\alpha^{-k}\|\psi_r(\alpha a,\alpha\mu)\|\equiv 0.$$

В частности,

$$y_1((-1)^r\omega,\gamma a,\gamma\mu)=O(\gamma^k)\quad \text{при } \gamma\to 0.$$

По формуле Лагранжа справедливо равенство

$$y_2(t,a,\mu)=X(t)\int\limits_0^t X^{-1}(\tau)(f(\tau,x(\tau,a,\mu),\mu)-f(\tau,X(\tau)a,\mu))d\tau=$$

$$=X(t)\int\limits_0^t X^{-1}(\tau)f'_x(\tau,X(\tau)a+q(\tau,a,\mu)y(\tau,a,\mu),\mu)y(\tau,a,\mu)d\tau,$$

где $q(\tau,a,\mu)\in(0,1)$ — некоторая величина. Тогда

$$y_2((-1)^r\omega,\gamma a,\gamma\mu)=o(\gamma^k)\quad \text{при } \gamma\to 0$$

в силу равенств (4) и (6). Положим

$$\varphi_r(a,\mu)=\psi_r(a,\mu)+y_2((-1)^r\omega,a,\mu).$$

Тогда

$$\lim_{\alpha\to 0}\alpha^{-k}\|\varphi_r(\alpha a,\alpha\mu)\|\equiv 0.$$

Итак, подставив $t=\omega$ в равенство (5), для системы (2) с учетом выражения (6) получили локальную структуру левого и правого операторов монодромии

$$x((-1)^r\omega,a,\mu)=X_r a+p_r(a,\mu)+\varphi_r(a,\mu),\quad r=1,2. \tag{7}$$

Условия устойчивости по определению 1 для системы (2) целесообразно сформулировать в терминах свойств функций $p_r(a,\mu)$, которые являются первыми нелинейными приближениями операторов монодромии относительно начального значения решения и параметра, представляя собой усредненные на периоде характеристики нелинейного приближения правой части системы (2) вдоль решений соответствующей системы $\dot{x}=A(t)x$.

Так как в равенствах (7) функции $p_r(a,\mu)$ являются вектор-формами, то представим их в виде сумм

$$p_r(a,\mu)=\sum_{l=0}^{k}h_{rl}(a,\mu),$$

где $h_{rl}(a,\mu)$ — вектор-формы, $h_{rl}(\alpha a,\beta\mu)=\alpha^l\beta^{k-l}h_{rl}(a,\mu)$. В частности, $h_{r1}(a,\mu)=H_r(\mu)a$, $h_{rk}(a,\mu)=p_r(a,0_m)$.

Допустим, что возможно разложение $p_2(a,0_m)=D_2(a)a$, при котором для всех λ: $\|\lambda\|=1$ и для всех достаточно малых $\gamma>0$ справедлива оценка

$$\|X_2+\gamma D_2(\lambda)\|\leqslant 1-\gamma b_2,\quad b_2>0. \tag{8}$$

Кроме того, предположим, что существует значение $\mu_0 \neq 0_m$, при котором для любого достаточно малого $\gamma > 0$ имеет место неравенство

$$\|X_1 + \gamma H_1(\mu_0)\| \leqslant 1 - \gamma b_1, \quad b_1 > 0. \tag{9}$$

Теорема 1. *Если выполнены условия* (8) *и* (9), *то нулевое решение системы* (2) *двусторонне* μ*-устойчиво.*

Доказательство. В силу равенства (7) правый оператор монодромии имеет вид

$$x(\omega, a, \mu) = X_2 a + p_2(a, \mu) + \varphi_2(a, \mu) = (X_2 + D_2(a))a + \tilde{p}_2(a, \mu) + \tilde{\varphi}_2(a, \mu),$$

где вектор-функции $\tilde{p}_2(a, \mu)$, $\tilde{\varphi}_2(a, \mu)$ удовлетворяют условиям

$$\tilde{p}_2(a, 0_m) \equiv 0_n, \quad \lim_{\alpha \to 0} \alpha^{-k} \|\tilde{\varphi}_2(\alpha a, \mu)\| \equiv 0.$$

Из оценки (8) следует, что существует $\delta > 0$, при котором

$$\|\tilde{\varphi}_2(a, \mu)\| \leqslant \frac{b_2 \|a\|^k}{4},$$

если $\|a\| < \delta$ и $\|\mu\| < \sigma_1$ ($\sigma_1 > 0$ — произвольно выбранное малое число). Выберем такое $\sigma_2 \in (0, \sigma_1]$, что

$$\|\tilde{p}_2(a, \mu)\| \leqslant \frac{b_2 \delta^k}{4}$$

для любых a: $\delta/2 \leqslant \|a\| < \delta$, μ: $\|\mu\| < \sigma_2$. При этом

$$\begin{aligned} \|x(\omega, a, \mu)\| &= \|X_2 + D_2(a)\| \|a\| + \|\tilde{p}_2(a, \mu)\| + \|\tilde{\varphi}_2(a, \mu)\| \leqslant \\ &\leqslant (1 - b_2 \|a\|^{k-1}) \|a\| + \frac{b_2 \|a\|^k}{4} + \frac{b_2 \delta^k}{4} \leqslant \\ &\leqslant \left(1 - \frac{3 b_2 \|a\|^{k-1}}{4}\right) \|a\| + \frac{b_2 \delta^k}{4} \leqslant \left(1 - \frac{3 b_2 \delta^{k-1}}{8}\right) \delta + \frac{b_2 \delta^k}{4} < \delta. \end{aligned}$$

Так как $x(\omega, 0_n, \mu) \equiv 0_n$ и $x'_a(\omega, 0_n, 0_m) = X_2$, то возможно разложение $x(\omega, a, \mu) = Y_2(a, \mu) a$, в котором матрица $Y_2(a, \mu)$ удовлетворяет условию $Y_2(0_n, 0_m) = X_2$. Поэтому без ограничения общности рассуждений с учетом равенства $\rho(X_2) = 1$ при $0 < \|a\| < \delta/2$, $\|\mu\| < \sigma_2$ справедлива оценка $\|Y_2(a, \mu)\| < 2$, то есть $\|x(\omega, a, \mu)\| < \delta$. Таким образом, $\|x(\omega, a, \mu)\| < \delta$ при любых a: $0 < \|a\| < \delta$, μ: $\|\mu\| < \sigma_2$. Произвольно выберем $\varepsilon > 0$. Допустим, что $\delta_1 = \min\{\varepsilon, \delta\}$. Тогда в силу предыдущих рассуждений существует $\delta_2 \in (0, \sigma_2]$, для которого из неравенств $0 < \|a\| < \delta_1$, $\|\mu\| < \delta_2$ следует оценка $\|x(\omega, a, \mu)\| < \delta_1$. Итак, по замечанию 2 аналогично лемме 2 для нулевого решения системы (2) доказана устойчивость по параметру вправо. (Заметим, что из оценки (8) следует асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (2) при нулевом значении параметра [3]).

Выберем $a = \alpha \lambda$, $\mu \in M = \{\mu = \beta(\mu_0 + \gamma)\}$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $\gamma \in \mathbb{R}^m$ — малые параметры, $\|\lambda\| = 1$. Тогда в силу равенства (7) левый оператор монодромии имеет вид

$$x(-\omega, a, \mu) = (X_1 + \beta^{k-1} H_1(\mu_0)) a + \beta^{k-1} \tilde{H}_1(\gamma) a + \tilde{p}_1(\alpha, \beta, \lambda, \gamma) + \tilde{\varphi}_1(\alpha, \beta, \lambda, \gamma),$$

где вектор-функции $\tilde{p}_1(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)$, $\tilde{\varphi}_1(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)$ и матрица $\tilde{H}_1(\gamma)$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{\beta \to 0} \beta^{1-k} \|\tilde{p}_1(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)\| \equiv 0, \quad \lim_{\alpha \to 0} \alpha^{-1} \|\tilde{\varphi}_1(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)\| \equiv 0, \quad \tilde{H}_1(0_m) = 0_m.$$

Оценим норму произвольного значения рассматриваемого оператора

$$\|x(-\omega, a, \mu)\| \leqslant \|X_1 + \beta^{k-1} H_1(\mu_0)\| \alpha + \beta^{k-1} \alpha \|\tilde{H}_1(\gamma)\| + \|\tilde{p}_1(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)\| + \|\tilde{\varphi}_1(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)\|.$$

Выберем такое $\Delta > 0$, что $\|\tilde{H}_1(\gamma)\| \leqslant b_1/3$ при $\|\gamma\| < \Delta$. Произвольно зафиксируем $\sigma > 0$. Так как

$$\lim_{\alpha \to 0} \alpha^{-1} \|\tilde{\varphi}_1(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)\| \equiv 0,$$

то найдется $\delta > 0$, при котором

$$\|\tilde{\varphi}_1(\alpha,\beta,\lambda,\gamma)\| < \frac{\beta^{k-1}\alpha b_1}{3}$$

для $\alpha < \delta$, $\beta < \sigma$, $\|\gamma\| < \Delta$. Из условия

$$\lim_{\beta\to 0}\beta^{1-k}\|\tilde{p}_1(\alpha,\beta,\lambda,\gamma)\| \equiv 0$$

следует, что для известных δ, σ, Δ можно подобрать $\sigma_1 \in (0,\sigma]$ таким образом, чтобы при $\delta/2 \leqslant \alpha < \delta$, $\beta < \sigma_1$, $\|\gamma\| < \Delta$ было справедливо неравенство

$$\|\tilde{p}_1(\alpha,\beta,\lambda,\gamma)\| < \frac{\beta^{k-1}\alpha b_1}{3}.$$

При этом $\|x(-\omega,a,\mu)\| \leqslant \alpha < \delta$. Кроме того, без ограничения общности рассуждений, как и в предыдущей части доказательства, при $\alpha < \delta/2$, $\beta < \sigma_1$, $\|\gamma\| < \Delta$ можно установить оценку $\|x(-\omega,a,\mu)\| \leqslant 2\alpha < \delta$. Произвольно выберем $\varepsilon > 0$. Допустим, что $\delta_1 = \min\{\varepsilon,\delta\}$. Тогда в силу предыдущих рассуждений существует $\delta_2 = \sigma_2(\|\mu_0\|+\Delta)$, при котором для любых $a \in \mathbb{R}^n$ и $\mu \in M$ из неравенств $0 < \|a\| < \delta_1$, $0 < \|\mu\| < \delta_2$ следует оценка $\|x(-\omega,a,\mu)\| < \delta_1$. Итак, аналогично лемме 2 доказано, что нулевое решение системы (2) устойчиво по параметру влево. (Заметим, что из оценки (9) следует асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (2) по линейному приближению, так как при малом ненулевом $\mu \in M$ для спектрального радиуса левой матрицы монодромии справедлива оценка $\rho(x'_a(-\omega,0_n,\mu)) \leqslant \|X_1 + \beta^{k-1}(H_1(\mu_0)+\tilde{H}_1(\gamma))\| < 1$). Теорема 1 доказана. $\square$

Замечание 3. Если оценка типа (8) имеет место для левого оператора монодромии, а оценка типа (9) — для правого, то справедливо утверждение о двусторонней устойчивости, аналогичное теореме 1.

Пример 1. Рассмотрим систему вида (2) со скалярным параметром μ

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} - \mu^2\begin{pmatrix}1+\sin t & 0\\ 8\cos^2 t & 0\end{pmatrix} + (x_1^2+x_2^2)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}. \tag{10}$$

При этом $\omega = 2\pi$ — период правой части по t, односторонние матрицы монодромии $X_1 = X_2 = E$. Для соответствующих равенств (7) вычислим $p_r(a,\mu)$, $r = 1,2$. В данном случае $p_2(a,\mu) = -p_1(a,\mu)$. Выделив линейное приближение, получим левую матрицу монодромии

$$X_1 + H_1(\mu) = \begin{pmatrix}1-6\pi\mu^2 & \pi\mu^2\\ -\pi\mu^2 & 1-2\pi\mu^2\end{pmatrix}.$$

Если параметр равен нулю, то первое нелинейное приближение правого оператора монодромии имеет вид $(X_2 + D_2(a))a = (1-\pi(a_1^2+a_2^2))Ea$. При этом

$$\|X_1 + H_1(\mu)\|_\infty \leqslant 1-\pi\mu^2, \quad \|X_2 + D_2(a)\|_2 = 1-\pi\|a\|_2^2,$$

то есть выполняются оценки (8) и (9) (для определенности можно выбрать $\mu_0 = 1$). Значит, согласно замечанию 3 из аналога теоремы 1 следует, что нулевое решение системы (10) двусторонне μ-устойчиво. Этот вывод иллюстрируется на рисунке 1, где в условиях теоремы 1 изображена типичная для исследуемого типа устойчивости картина расположения интегральных кривых с малыми начальными значениями и при малом значении параметра.

4. Критический случай устойчивости по параметру. Рассмотрим систему вида (2)

$$\dot{x} = A(t)x + f(t,x,\mu), \tag{11}$$

для правой части которой имеют место разложения

$$f(t,x,\mu) = d_r(t,x,\mu) + u_r(t,x,\mu) + q_r(t,x,\mu), \quad r = 1,2, \tag{12}$$

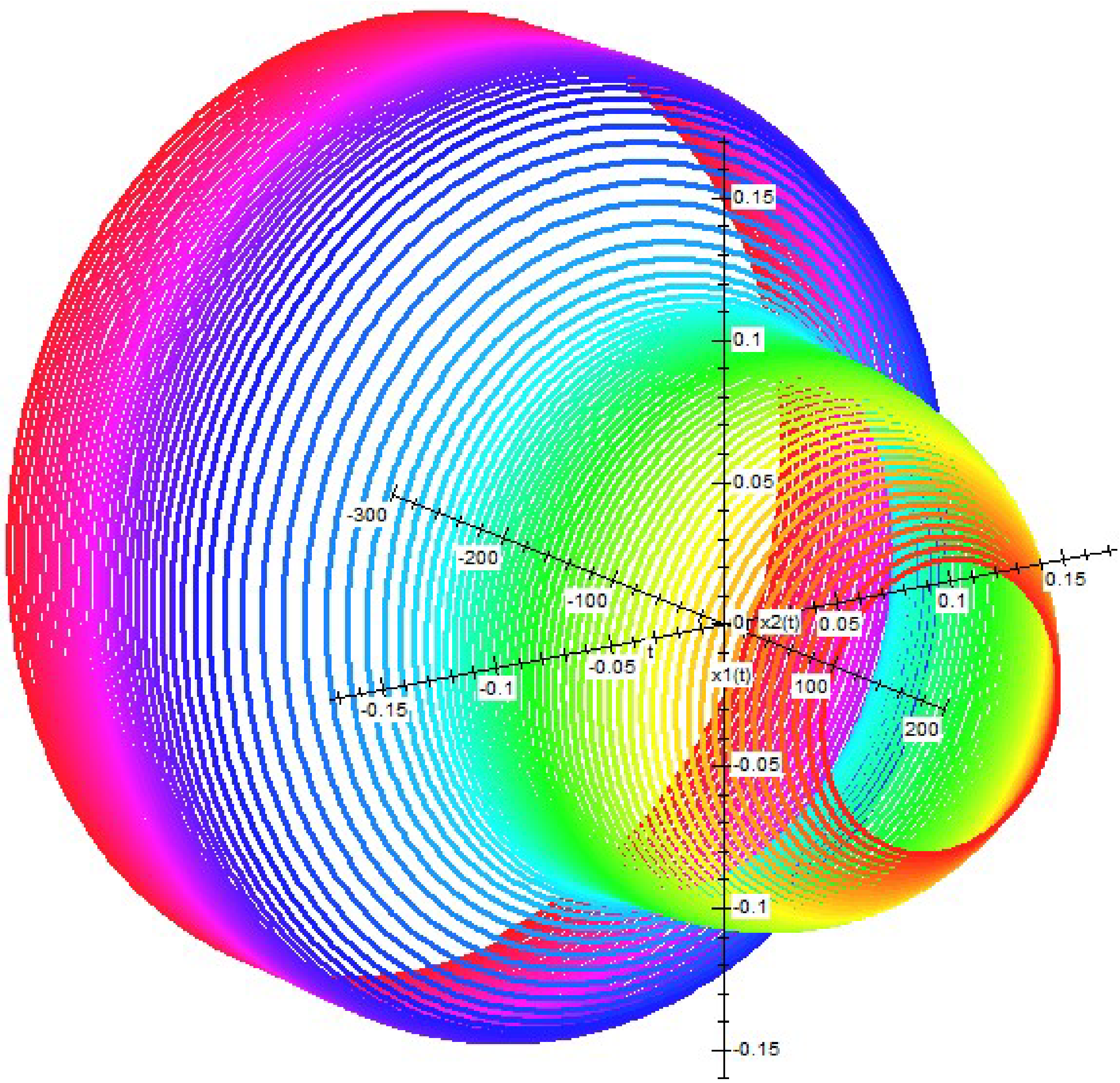

Рис. 1. Интегральные кривые системы (10) при $\mu = 0{,}01$.

удовлетворяющие условиям: $d_r(t, \alpha x, \beta\mu) = F_r(\alpha)G_r(\beta)d_r(t, x, \mu)$, $F_r(\alpha) = \operatorname{diag}\{\alpha^{s_{r1}}, \ldots, \alpha^{s_{rn}}\}$ и $G_r(\beta) = \operatorname{diag}\{\beta^{k_{r1}}, \ldots, \beta^{k_{rn}}\}$ — $n \times n$-матрицы, $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ — произвольные числа, $s_{rj} \in \mathbb{N}$, $s_{rj} + k_{rj} > 1$, $j = \overline{1, n}$,

$$\lim_{\beta \to 0} G_r^{-1}(\beta)u_r(t, x, \beta\mu) \equiv 0_n, \quad \lim_{\alpha \to 0} F_r^{-1}(\alpha)q_r(t, \alpha x, \mu) \equiv 0_n.$$

Замечание 4. Вектор-функции $d_r(t, x, \mu)$ из равенств (12) рассматриваются в качестве первых нелинейных приближений правой части системы (11), свойства которых призваны обеспечить наличие односторонних свойств устойчивости. При этом другие слагаемые имеют больший порядок малости либо при $\|x\| \to 0$, либо при $\|\mu\| \to 0$. Заметим, что в качестве вектор-функции $d_r(t, x, \mu)$ целесообразно рассматривать только те слагаемые правой части системы (11), которые не аннулируются при усреднении на периоде вдоль решений системы $\dot{x} = A(t)x$.

Рассуждая аналогично некритическому случаю, можно установить локальную структуру односторонних операторов монодромии

$$x((-1)^r, a, \mu) = (X_r + D_r(a,\mu))a + p_r(a,\mu) + \varphi_r(a,\mu), \quad r = 1, 2, \tag{13}$$

где

$$D_r(a,\mu)a = X((-1)^r\omega) \int\limits_0^{(-1)^r\omega} X^{-1}(\tau) d_r(\tau, X(\tau)a, \mu) d\tau,$$

$D_r(a,\mu)$ — однородная $n \times n$-матрица, $D_r(\alpha a, \beta\mu) = F_r(\alpha)G_r(\beta)D_r(a,\mu)$,

$$\lim_{\beta\to 0} G_r^{-1}(\beta)p_r(a,\beta\mu) \equiv 0_n, \quad \lim_{\alpha\to 0} F_r^{-1}(\alpha)\varphi_r(\alpha a,\mu) \equiv 0_n.$$

Допустим, что существует значение $\mu_0 \neq 0_m$, при котором для любого достаточно малого $\gamma > 0$ имеют место неравенства

$$\|X_r + \gamma D_r(a,\mu_0)\| \leqslant 1 - \gamma b_r, \quad b_r > 0, \quad r = 1, 2. \tag{14}$$

Теорема 2. *Если выполнены условия* (14), *то нулевое решение системы* (11)—(13) *двусторонне μ-устойчиво.*

Доказательство. Установим устойчивость по параметру вправо, используя схему рассуждений из второй части доказательства теоремы 1. В равенстве (13) при $r = 2$ выберем $a = \alpha\lambda$, $\mu \in M = \{\mu\beta(\mu_0 + \gamma)\}$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $\gamma \in \mathbb{R}^m$ — малые параметры, $\|\lambda\| = 1$. Тогда правый оператор монодромии имеет вид

$$x(\omega, a, \mu) = (X_2 + \alpha^{-1}F_2(\alpha)G_2(\beta)(D_2(\lambda,\mu_0) + \tilde{D}_2(\lambda,\gamma)))a + \tilde{p}_2(\alpha,\beta,\lambda,\gamma) + \tilde{\varphi}_2(\alpha,\beta,\lambda,\gamma), \tag{15}$$

где $\tilde{p}_2(\alpha,\beta,\lambda,\gamma) = p_2(\alpha\lambda, \beta(\mu_0+\gamma))$, $\tilde{\varphi}_2(\alpha,\beta,\lambda,\gamma) = \varphi_2(\alpha\lambda,\beta(\mu_0+\gamma))$, $D_2(\lambda,\mu_0) + \tilde{D}_2(\lambda,\gamma) = D_2(\lambda,\mu_0+\gamma)$, $\tilde{D}_2(\lambda, 0_m) = 0_{nn}$. Оценим норму произвольного значения оператора (15)

$$\begin{aligned}\|x(\omega,a,\varepsilon)\| \leqslant \|X_2 + \alpha^{-1}F_2(\alpha)G_2(\beta)D_2(\lambda,\mu_0)\|\alpha + \\ + \|F_2(\alpha)\|\|G_2(\beta)\|\|\tilde{D}_2(\lambda,\gamma)\| + \|\tilde{p}_2(\alpha,\beta,\lambda,\gamma)\| + \|\tilde{\varphi}_2(\alpha,\beta,\lambda,\gamma)\|.\end{aligned} \tag{16}$$

Из оценки (14) следует, что при некотором $\bar{b}_2 \in (0, b_2]$ для достаточно малых α и β справедлива оценка

$$\|X_2 + \alpha^{-1}F_2(\alpha)G_2(\beta)D_2(\lambda,\mu_0)\| \leqslant 1 - \alpha^{-1}\|F_2(\alpha)\|\|G_2(\beta)\|\|D_2(\lambda,\mu_0)\|\bar{b}_2. \tag{17}$$

Выберем такое $\Delta > 0$, что

$$\|\tilde{D}_2(\lambda,\gamma)\| \leqslant \frac{\bar{b}_2}{3} \tag{18}$$

при $\|\gamma\| < \Delta$, $\|\lambda\| = 1$. Произвольно зафиксируем $\sigma > 0$. Так как

$$\lim_{\alpha\to 0} \|F_2(\alpha)\|^{-1}\|\tilde{\varphi}_2(\alpha,\beta,\lambda,\gamma)\| \equiv 0,$$

то найдется $\delta > 0$, для которого

$$\|\tilde{\varphi}_2(\alpha,\beta,\lambda,\gamma)\| \leqslant \frac{1}{3}\|F_2(\alpha)\|\|G_2(\beta)\|\bar{b}_2, \tag{19}$$

если $\alpha < \delta$, $\beta < \sigma$, $\|\gamma\| < \Delta$, $\|\lambda\| = 1$. Из условия

$$\lim_{\beta\to 0} \|G_2(\beta)\|^{-1}\|\tilde{p}_2(a,\beta\mu)\| \equiv 0$$

следует, что для известных δ, σ, Δ можно подобрать $\sigma_1 \in (0,\sigma]$ таким образом, чтобы при $\delta/2 \leqslant \alpha < \delta$, $\beta < \sigma_1$, $\|\gamma\| < \Delta$, $\|\lambda\| = 1$ было справедливо неравенство

$$\|\tilde{p}_2(\alpha,\beta,\lambda,\gamma)\| \leqslant \frac{1}{3}\|F_2(\alpha)\|\|G_2(\beta)\|\bar{b}_2. \tag{20}$$

Итак, из оценок (16)—(20) следует, что

$$\|x(\omega,a,\mu)\| \leqslant \alpha < \delta \tag{21}$$

при $\delta/2 \leqslant \alpha < \delta$, $\beta < \sigma_1$, $\|\gamma\| < \Delta$, $\|\lambda\| = 1$. Если $\alpha < \delta/2$, $\beta < \sigma_1$, $\|\gamma\| < \Delta$, $\|\lambda\| = 1$, то без ограничения общности рассуждений справедливо неравенство

$$\|x(\omega, a, \mu)\| \leqslant 2\alpha < \delta. \tag{22}$$

Произвольно выберем $\varepsilon > 0$. Допустим, что $\delta_1 = \min\{\varepsilon, \delta\}$, $\delta_2 = \sigma_2(\|\mu\| + \Delta)$. Тогда для любых $a \in \mathbb{R}^n$: $0 < \|a\| < \delta_1$ и $\mu \in M$: $0 < \|\mu\| < \delta_2$ из условий (21), (22), $0 < \|a\| < \delta_1$, $\|\mu\| < \delta_2$ следует оценка $\|x(\omega, a, \mu)\| < \delta_1$. Итак, в силу замечания 2 нулевое решение системы (11)—(13) устойчиво по параметру право. Ясно, что доказательство факта устойчивости влево для нулевого решения проводится аналогично. Таким образом, теорема 2 доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамов В. В.* Устойчивость нулевого решения периодической системы дифференциальных уравнений с малым параметром// Ж. Средневолж. мат. о-ва. — 2010. — *12*, № 4. — С. 49–54.
2. *Абрамов В. В.* Двусторонняя устойчивость малого периодического решения// Вестн. РАЕН. — 2014. — *14*, № 5. — С. 6–9.
3. *Абрамов В. В.* К задаче об устойчивости малого периодического решения// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2018. — *148*. — С. 3–9.
4. *Абрамов В. В., Бельман С. А., Лискина Е. Ю.* Устойчивость по параметру при постоянно действующих возмущениях// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2019. — *168*. — С. 8–13.
5. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1966.
6. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости. — М.: Наука, 1966.
7. *Хапаев М. М.* Усреднение и устойчивость движения. — М.: Наука, 1986.

Абрамов Владимир Викторович
Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина
E-mail: v.abramov@365.rsu.edu.ru