ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 216 (2022). С. 57–65
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-216-57-65

УДК 514.13; 514.752

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ВЫПУКЛОГО АНАЛИЗА В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

© 2022 г. **А. В. КОСТИН, Н. Н. КОСТИНА**

Аннотация. Задача о тени в евклидовом пространстве поставлена Г. Худайбергановым в 1982 г. Ее решение для размерностей >2, а также различные обобщения были получены группой украинских математиков во главе с Ю. Б. Зелинским в 2015 г. В работе рассматриваются некоторые вариации таких задач и их обобщений в пространстве Лобачевского, а также близкой задачи об освещении для пространства Лобачевского. В евклидовом пространстве эта задача была поставлена В. Г. Болтянским.

***Ключевые слова*:** простанство Лобачевского, обобщенная выпуклость, задача о тени, задача об освещении, сфера, шар, орицикл.

SOME PROBLEMS OF CONVEX ANALYSIS IN THE LOBACHEVSKY SPACE

© 2022 **A. V. KOSTIN, N. N. KOSTINA**

Abstract. The shadow problem in the Euclidean space was posed by G. Khudaiberganov in 1982. Its solution for dimensions >2 and various generalizations were obtained by a group of Ukrainian mathematicians led by Yu. B. Zelinsky in 2015. In this paper, we consider some variations of such problems and their generalizations in the Lobachevsky space and a closed lighting problem for the Lobachevsky space. In the Euclidean space, this problem was posed by V. G. Boltyansky.

***Keywords and phrases*:** Lobachevsky space, generalized convexity, shadow problem, lighting problem, sphere, ball, horocycle.

***AMS Subject Classification*:** 53A35, 53B30

1. Введение. В 1982 г. в [8] (см. также [3]) Г. Худайберганов предложил задачу о тени в следующей постановке:

Задача 1. Какое минимальное число попарно не пересекающихся шаров с центрами на $(n-1)$-мерной сфере n-мерного евклидова пространства и радиуса меньшего, чем радиус сферы, достаточно для того, чтобы любая прямая, проходящая через центр сферы, пересекала хотя бы один из этих шаров?

Им же было доказано, что в двумерном случае достаточно двух шаров и сделано предположение, что в n-мерном случае будет достаточно n шаров. Это предположение оказалось ошибочным. Ю. Б. Зелинский, И. Ю. Выговская и М. В. Стефанчук в [2] доказали, что в n-мерном евклидовом пространстве при $n > 2$ для решения задачи необходимое количество шаров равно $n + 1$. Задача о тени является частным случаем задачи о принадлежности точки обобщенно-выпуклой оболочке семейства множеств. Приведем соответствующие определения для пространства Лобачевского (см. [12]). Термины «гиперболическая плоскость» и «гиперболическое пространство» в работе рассматриваются как синонимы плоскости Лобачевского и пространства Лобачевского.

Определение 1. Множество U из n-мерного гиперболического пространства H^n называется *m-выпуклым относительно произвольной фиксированной точки* $M \in H^n \setminus U$, если существует m-мерная плоскость, проходящая через точку M и не имеющая с множеством U общих точек.

Пересечение любого семейства множеств, m-выпуклых относительно не принадлежащей этим множествам точки M, является m-выпуклым относительно точки M.

Определение 2. Множество $U \in H^n$, являющееся m-выпуклым относительно каждой точки $M \in H^n \setminus U$, называется *m-выпуклым.*

Это определение также удовлетворяет аксиоме выпуклости: пересечение m-выпуклых множеств само является m-выпуклым.

Определение 3. Минимальное m-выпуклое множество, содержащее множество $U \in H^n$, называется *m-выпуклой оболочкой множества* U.

Задача о тени эквивалентна задаче о принадлежности центра сферы 1-выпуклой оболочке семейства шаров, центры которых лежат на данной сфере, а радиусы меньше радиуса этой сферы. Если в определениях m-выпуклости заменить m-плоскости на m-полуплоскости, то получим определение m-полувыпуклости.

Определение 4. Множество U из n-мерного пространства Лобачевского H^n называется *m-полувыпуклым относительно произвольной фиксированной точки* $M \in H^n \setminus U$, если существует m-мерная полуплоскость, проходящая через точку M и не имеющая с множеством U общих точек.

Определение 5. Множество $U \in H^n$, являющееся m-полувыпуклым относительно каждой точки $M \in H^n \setminus U$, называется *m-полувыпуклым.* Минимальное m-полувыпуклое множество, содержащее множество $U \in H^n$, называется *m-полувыпуклой оболочкой множества* U.

Все эти определения являются калькой соответствующих определений из работ Ю. Б. Зелинского и его коллег. Недостающие определения будут приведены по ходу изложения.

2. Основные результаты. Сформулируем основные результаты работы. В теореме 1 найдены условия, при которых решение задачи о касательной тени на плоскости Лобачевского совпадает с евклидовым. В теореме 2 и следствии из нее получены условия, при которых минимальное число кругов, обеспечивающих создание касательной тени во всех точках окружности на плоскости Лобачевского, равно n. В теоремах 3 и 4 обобщена задача Зелинского о касательной тени, а именно, в теореме 3 установлены условия, при которых каждая плоскость, касающаяся сферы S^2 радиуса R в трехмерном пространстве Лобачевского, пересекается хотя бы с одним из четырех равных шаров радиуса $r < R$ с центрами на сфере S^2, а в теореме 4 найдены аналогичные условия для $(n-1)$-мерной сферы в n-мерном пространстве Лобачевского, $n+1$ шаров и касательных гиперплоскостей. В теоремах 5 и 6 описаны множества на плоскости Лобачевского и в пространстве Лобачевского, являющиеся слабо 1-полувыпуклыми, но не 1-полувыпуклыми. Теорема 7 дает решение задачи Болтянского об освещении для круга на плоскости Лобачевского. Теорема 8 посвящена одному обобщению задачи об освещении для тела с гладкой границей.

3. Задача о касательной тени. Ю. Б. Зелинский рассматривал различные вариации задачи о тени. В одной из них прямые, проходящие через центр сферы, заменяются на касательные прямые:

Задача 2. Какое минимальное число попарно не пересекающихся шаров с центрами на $(n-1)$-мерной сфере n-мерного евклидова пространства и радиуса меньшего, чем радиус сферы, достаточно для того, чтобы любая прямая, касающаяся сферы, пересекала хотя бы один из этих шаров?

Этот вариант в статье [3] назван задачей о касательной тени. Шары, удовлетворяющие условию этой задачи, будем называть шарами, создающими касательную тень. На евклидовой плоскости достаточно рассматривать единичную окружность и круги, радиусы которых меньше единицы. Для создания касательной тени в этом случае достаточно трех кругов с центрами на окружности.

В задачах, касающихся обобщенной выпуклости, и смежных задачах в гиперболической геометрии, в отличие от евклидова случая, результаты, как правило, существенно зависят от линейных размеров фигур [4, 5, 10–12]. Предварительно оценим величину радиуса окружности на гиперболической плоскости, удовлетворяющего условию, что три равных круга с центрами на этой окружности обеспечивают создание касательной тени, то есть найдем граничное значение радиуса, при котором это число кругов совпадает с евклидовым.

Теорема 1. *Пусть на плоскости Лобачевского кривизны $K = -1/\rho^2$ задана окружность S^1, радиус r которой удовлетворяет условию $R < \rho \cdot \operatorname{Arch}\sqrt{3}$. Тогда минимальное число кругов равного радиуса $r < R$ с центрами на S^1, обеспечивающих создание касательной тени, равно трем.*

Доказательство. Двух кругов равного радиуса, меньшего, чем R, с центрами на S^1 для создания касательной тени недостаточно. Хотя бы в одной из точек пересечения оси симметрии этих кругов с окружностью S^1 касательная тень не создается. Впрочем, и два круга разных радиусов, меньших R, тоже не обеспечат создание касательной тени во всех точках окружности. Расположим три круга равного радиуса $r < R$ в вершинах правильного треугольника ABC, вписанного в окружность S^1. Пусть точка O — центр окружности S^1. Обозначим через D точку окружности S^1, диаметрально противоположную точке C. Пусть прямая m — касательная к окружности S^1 в точке D. Опустим из вершины A перпендикуляр на прямую m. Пусть точка E — основание этого перпендикуляра. Четырехугольник $OAED$ является двупрямоугольником I рода [6], то есть двупрямоугольником с двумя соседними прямыми углами. Отрезок ED в нем называется базисом, противоположная сторона OA — антибазисом, отрезки AE и OD — боковыми сторонами. Между элементами этого двупрямоугольника имеется следующее соотношение:

$$\operatorname{sh}\frac{AE}{\rho} = \operatorname{sh}\frac{OD}{\rho}\cdot\operatorname{ch}\frac{OA}{\rho} - \operatorname{ch}\frac{OD}{\rho}\cdot\operatorname{sh}\frac{OA}{\rho}\cdot\cos\angle AOD. \tag{1}$$

Учитывая, что $OA = OD = R$, $\angle AOD = \pi/3$, получим:

$$\operatorname{sh}\frac{AE}{\rho} = \operatorname{sh}\frac{R}{\rho}\cdot\operatorname{ch}\frac{R}{\rho} - \operatorname{ch}\frac{R}{\rho}\cdot\operatorname{sh}\frac{R}{\rho}\cdot\cos\frac{\pi}{3}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) получаем:

$$\operatorname{sh}\frac{AE}{\rho} = \frac{1}{2}\operatorname{sh}\frac{R}{\rho}\cdot\operatorname{ch}\frac{R}{\rho}. \tag{3}$$

Предельное значение r_0 радиусов непересекающихся кругов с центрами на окружности S^1 равно половине стороны правильного треугольника ABC. Отсюда

$$\operatorname{sh}\frac{r_0}{\rho} = \operatorname{sh}\frac{a}{2\rho} = \sin\frac{\pi}{3}\cdot\operatorname{sh}\frac{R}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{R}{\rho}. \tag{4}$$

Если круги открыты, то это предельное значение достигается, если замкнуты, то не достигается. Если теперь боковая сторона AE двупрямоугольника будет меньше, чем r, то трех кругов для создания касательной тени во всех точках окружности S^1 будет достаточно. Соотношение $AE/r < 1$ эквивалентно соотношению

$$\frac{\operatorname{sh}\dfrac{AE}{\rho}}{\operatorname{sh}\dfrac{r}{\rho}} < 1. \tag{5}$$

Оценим его. Учитывая (3), (4), и подставив в (5) $r = r_0$, имеем:

$$\frac{\operatorname{sh}\dfrac{AE}{\rho}}{\operatorname{sh}\dfrac{r_0}{\rho}} = \frac{\dfrac{1}{2}\operatorname{sh}\dfrac{R}{\rho}\cdot\operatorname{ch}\dfrac{R}{\rho}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\operatorname{sh}\dfrac{R}{\rho}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\operatorname{ch}\frac{R}{\rho}. \tag{6}$$

Из (6) следует, что при $R < \rho \cdot \operatorname{Arch}\sqrt{3}$ трех кругов для создания касательной тени во всех точках окружности будет достаточно. Теорема доказана. $\square$

При увеличении радиуса R окружности число кругов, необходимое для создания касательной тени, растет до бесконечности. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть на плоскости Лобачевского кривизны $K = -1/\rho^2$ задана окружность S^1, радиус R которой удовлетворяет условию*

$$R < \rho \cdot \operatorname{Arch}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}\right). \tag{7}$$

Тогда для создания касательной тени во всех точках окружности S^1 достаточно n кругов равного радиуса $r < R$ с центрами на S^1.

Доказательство. Аналогично предыдущему случаю, расположим центры кругов в вершинах правильного n-угольника $A_1A_2\dots A_n$, вписанного в окружность S^1. Предельное значение радиуса r_0 круга будет равно половине стороны n-угольника.

$$\operatorname{sh}\frac{r_0}{\rho} = \sin\frac{\pi}{n}\cdot\operatorname{sh}\frac{R}{\rho}. \tag{8}$$

Обозначим через D середину дуги A_1A_2. В точке D проведем касательную к S^1 и опустим на нее перпендикуляр A_1E. В двупрямоугольнике OA_1ED имеем:

$$\operatorname{sh}\frac{AE}{\rho} = \operatorname{sh}\frac{R}{\rho}\cdot\operatorname{ch}\frac{R}{\rho} - \operatorname{ch}\frac{R}{\rho}\cdot\operatorname{sh}\frac{R}{\rho}\cdot\cos\frac{\pi}{n}, \tag{9}$$

или

$$\operatorname{sh}\frac{AE}{\rho} = \operatorname{sh}\frac{R}{\rho}\cdot\operatorname{ch}\frac{R}{\rho}\cdot 2\sin^2\frac{\pi}{2n}. \tag{10}$$

Оценим отношение

$$\frac{\operatorname{sh}\dfrac{A_1E}{\rho}}{\operatorname{sh}\dfrac{r_0}{\rho}} = \frac{\operatorname{sh}\dfrac{R}{\rho}\cdot\operatorname{ch}\dfrac{R}{\rho}\cdot 2\sin^2\dfrac{\pi}{2n}}{\sin\dfrac{\pi}{n}\cdot\operatorname{sh}\dfrac{R}{\rho}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}\cdot\operatorname{ch}\frac{R}{\rho}. \tag{11}$$

Если

$$\frac{\operatorname{sh}\dfrac{A_1E}{\rho}}{\operatorname{sh}\dfrac{r_0}{\rho}} < 1,$$

то n равных кругов для создания касательной тени достаточно. Из (11) следует, что это условие будет выполняться при

$$R < \rho \cdot \operatorname{Arch}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}\right).$$

Теорема доказана. $\square$

Следствие. *Пусть на плоскости Лобачевского кривизны $K = -1/\rho^2$ задана окружность S^1, радиус R которой удовлетворяет условию*

$$\rho\cdot\operatorname{Arch}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2(n-1)}\right) \leqslant R < \rho \cdot \operatorname{Arch}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}\right). \tag{12}$$

Тогда минимальное число кругов равного радиуса $r < R$ с центрами на S^1, обеспечивающих создание касательной тени во всех точках окружности, равно n.

Обобщим задачу Зелинского о касательной тени следующим образом:

Задача 3. Какое минимальное число попарно не пересекающихся шаров с центрами на $(n-1)$-мерной сфере n-мерного пространства и радиуса меньшего, чем радиус сферы, достаточно для того, чтобы любая m-плоскость, касающаяся сферы, пересекала хотя бы один из этих шаров?

В пространстве Лобачевского эта задача становится содержательной уже для касательных гиперплоскостей. Предварительно оценим значение радиуса R сферы S^2 трехмерного пространства Лобачевского, когда число шаров равного радиуса, обеспечивающих выполнение условий задачи, совпадает с евклидовым.

Теорема 3. *Пусть в пространстве Лобачевского H^3 кривизны $K = -1/\rho^2$ задана сфера S^2, радиус R которой удовлетворяет условию:*

$$R < \rho \cdot \operatorname{Arch} \sqrt{3/2}. \tag{13}$$

Тогда минимальное число шаров равного радиуса $r < R$ с центрами на S^2, обеспечивающих выполнение условия, при котором каждая касательная к сфере плоскость пересекается хотя бы с одним из шаров, равно четырем.

Доказательство. Трех шаров, очевидно, недостаточно. Проведем диаметр сферы S^2, перпендикулярный плоскости, проходящей через центры шаров. Хотя бы одна из плоскостей, касающихся сферы S^2 в концах этого диаметра, не будет пересекаться ни с одним из этих шаров. В евклидовом пространстве такая плоскость была бы параллельна плоскости центров шаров. Расположим центры четырех шаров в вершинах правильного тетраэдра $ABCD$, вписанного в сферу S^2. Обозначим через O центр сферы S^2. Пусть T — точка пересечения прямой DO со сферой S^2. Из вершины A опустим перпендикуляр на плоскость Σ, касающуюся сферы S^2 в точке T. Пусть точка E — основание этого перпендикуляра. Четырехугольник $OAET$ является двупрямоугольником первого рода с базисом ET. Величина угла AOT в этом четырехугольнике совпадает с величиной евклидова угла четырехугольника в аналогичной конструкции, а антибазис OA и боковая сторона OT равны радиусу R сферы S^2. В двупрямоугольнике имеем:

$$\operatorname{sh} \frac{AE}{\rho} = \operatorname{sh} \frac{R}{\rho} \cdot \operatorname{ch} \frac{R}{\rho} - \operatorname{ch} \frac{R}{\rho} \cdot \operatorname{sh} \frac{R}{\rho} \cdot \cos \angle AOT, \tag{14}$$

или

$$\operatorname{sh} \frac{AE}{\rho} = \frac{2}{3} \cdot \operatorname{sh} \frac{R}{\rho} \cdot \operatorname{ch} \frac{R}{\rho}. \tag{15}$$

Обозначим через φ угол между перпендикуляром, проведенным из центра O тетраэдра к ребру, и отрезком, соединяющим центр с вершиной тетраэдра. Тогда, как и в евклидовом случае,

$$\sin \varphi = \sqrt{2/3}.$$

Предельное значение r_0 радиусов непересекающихся шаров будет равно половине длины ребра правильного тетраэдра $ABCD$. Следовательно,

$$\operatorname{sh} \frac{r_0}{\rho} = \operatorname{sh} \frac{AB}{2\rho} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \operatorname{sh} \frac{R}{\rho}. \tag{16}$$

Если

$$\frac{\operatorname{sh}(AE/\rho)}{\operatorname{sh}(r_0/\rho)} < 1, \tag{17}$$

то каждая касательная плоскость будет пересекаться хотя бы с одним из четырех шаров. Поделив почленно равенство (15) на (16), получим, что при

$$R < \rho \cdot \operatorname{Arch} \sqrt{3/2}$$

это условие будет выполняться. Теорема доказана. □

Обобщим это утверждение следующим образом.

Теорема 4. *Пусть в пространстве Лобачевского H^n кривизны $K = -1/\rho^2$ задана сфера S^{n-1}, радиус R которой удовлетворяет условию:*

$$R < \rho \cdot \operatorname{Arch} \frac{\sqrt{n(n-1)}}{(n-1)\sqrt{2}}. \tag{18}$$

Тогда минимальное число шаров равного радиуса $r < R$ с центрами на S^{n-1}, обеспечивающих выполнение условия, при котором каждая касательная к сфере гиперплоскость пересекается хотя бы с одним из шаров, равно $n+1$.

Доказательство. Если взять n шаров радиуса $r < R$ с центрами на S^{n-1} и провести диаметр сферы перпендикулярно гиперплоскости, проходящей через центры шаров, то хотя бы одна касательная гиперплоскость, проходящая через концы диаметра, не пересечется ни с одним из шаров. Значит, n шаров недостаточно. Расположим центры $n+1$-го шара в вершинах правильного симплекса $A_1A_2\dots A_{n+1}$, вписанного в S^{n-1}. Обозначим через φ угол между перпендикуляром, проведенным из центра O симплекса к ребру, и отрезком, соединяющим центр с вершиной симплекса. Тогда

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{n+1}{2n}}.$$

Предельное значение r_0 радиусов непересекающихся шаров будет равно половине длины ребра правильного симплекса $A_1A_2\dots A_{n+1}$. Следовательно,

$$\operatorname{sh}\frac{r_0}{\rho} = \sqrt{\frac{n+1}{2n}}\cdot\operatorname{sh}\frac{R}{\rho}. \qquad (19)$$

Пусть точка T диаметрально противоположна вершине A_{n+1}. Проведем через точку T гиперплоскость, касающуюся сферы S^{n-1}, и опустим на эту гиперплоскость перпендикуляр A_1E. Как выше, имеем:

$$\operatorname{sh}\frac{A_1E}{\rho} = \operatorname{sh}\frac{R}{\rho}\cdot\operatorname{ch}\frac{R}{\rho}\cdot(1-\cos\angle A_1OT), \qquad (20)$$

или

$$\operatorname{sh}\frac{A_1E}{\rho} = \frac{n-1}{n}\operatorname{sh}\frac{R}{\rho}\cdot\operatorname{ch}\frac{R}{\rho}. \qquad (21)$$

Если

$$\frac{\operatorname{sh}(A_1E/\rho)}{\operatorname{sh}(r_0/\rho)} < 1, \qquad (22)$$

то каждая касательная гиперплоскость будет пересекаться хотя бы с одним из шаров выбранного семейства. Подставив в (22) выражения из (19) и (21), получим, что при выполнении условия

$$R < \rho\cdot\operatorname{Arch}\frac{\sqrt{n(n-1)}}{(n-1)\sqrt{2}}$$

касательные гиперплоскости в каждой точке сферы будут пересекаться хотя бы с одним из $n+1$-го шаров. Теорема доказана. □

4. Открытые множества с Z-свойством на плоскости и в пространстве Лобачевского. Приведем необходимые определения.

Определение 6. Орициклом (см. [7]) на плоскости Лобачевского H^2 называется линия, ортогонально пересекающая пучок параллельных прямых. Прямые пучка называются осями орицикла. Орикругом называется область на H^2, ограниченная орициклом.

Орицикл можно определить как линию уровня функции Буземана, а орикруг — как множество подуровня этой функции.

На плоскости Лобачевского семейство непересекающихся выпуклых множеств, объединение которых не является 1-выпуклым множеством, может иметь любое, большее единицы, число компонент связности. В частности, минимальное число непересекающихся орикругов, обеспечивающее принадлежность произвольной фиксированной точки плоскости Лобачевского их 1-выпуклой оболочке, равно двум. Минимальное число непересекающихся орикругов, обеспечивающее принадлежность произвольной фиксированной точки плоскости Лобачевского их 1-полувыпуклой оболочке, равно трем. Ю. Б. Зелинский ввел в рассмотрение множества следующего вида (см., например, [13]).

Определение 7. Множество E называется слабо 1-полувыпуклым, если для любой точки границы ∂E существует луч с началом на ∂E, не пересекающийся с E.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 5. *Множество на плоскости Лобачевского, являющееся объединением непересекающихся открытых множеств, из которых два орикруга и два круга, может быть слабо 1-полувыпуклым, но не 1-полувыпуклым.*

Доказательство. Эта теорема является непосредственным следствием работы Т. М. Осипчук [13]. Построенные в этой работе конструкции непосредственно переносятся на плоскость Лобачевского, причем некоторые из фигурирующих там множеств можно заменить такими, аналогов которым нет на евклидовой плоскости. Сами приведенные там множества можно рассматривать как множества на плоскости Лобачевского в модели Бельтрами—Клейна. Опишем одну из конструкций для H^2 синтетически. Возьмем на плоскости Лобачевского ромб $ABCD$ — четырехугольник с равными сторонами. Выберем углы в противоположных вершинах A, C. В вертикальные с ними углы впишем по орициклу ω_1 и ω_2 соответственно. В угол ADC впишем окружность, проходящую через точку B и не имеющую с ромбом других общих точек, а в угол ABC — окружность, проходящую через точку D и также не имеющую с ромбом других общих точек. Пусть P — точка пересечения орицикла ω_1 с его осью, проходящей через центр ромба. Можно так подобрать параметры конфигурации, что касательная l к орициклу ω_1 в точке P не будет пересекать круги. Обозначим через L точку пересечения касательной l с прямой DA. Можно показать, что если величина угла BAD будет равна $\arccos\frac{1}{9}$, то ось орицикла, проходящая через точку L, будет параллельна прямой AB. При большей величине угла BAD указанные прямые будут пересекаться. В обоих случаях, то есть, если ось орицикла ω_1, проходящая через точку L, не расходится с прямой AB, описанная выше конфигурация кругов и орикругов реализуема. Объединение открытых кругов и орикругов в ней будет слабо 1-полувыпуклым множеством, а внутренние точки ромба будут принадлежать 1-полувыпуклой оболочке построенного множества. Значит, множество, являющееся объединением этих четырех открытых кругов и орикругов, не 1-полувыпукло. Теорема доказана. □

Т. М. Осипчук в память о Ю. Б. Зелинском множества, слабо 1-полувыпуклые, но не 1-полувыпуклые, назвала множествами, обладающими Z-свойством. На евклидовой плоскости множество, обладающее Z-свойством, обязано иметь не менее трех компонент связности [9]. В трехмерном случае ситуация иная. Сформулируем соответствующее утверждение для пространства Лобачевского.

Теорема 6. *Множество, обладающее Z-свойством в трехмерном пространстве Лобачевского, может иметь любое число компонент связности.*

Доказательство. Поместим плоскость Лобачевского с конфигурацией кругов и орикругов из теоремы 5 в трехмерное пространство Лобачевского (круги и орикруги можно было бы заменить другими парами равных открытых множеств с гладкой границей). Вращением вокруг оси симметрии получим множество из трех компонент связности, слабо 1-полувыпуклое, но не 1-полувыпуклое. Двумя достаточно тонкими трубками склеим компоненты. Получим связное множество с Z-свойством в H^3. Ясно, что к нему можно добавлять любое число компонент связности, сохраняя Z-свойство. Теорема доказана. □

5. Задача об освещении.

Задача об освещении поставлена В. Г. Болтянским (см. [5]) в следующем виде:

Задача 4. Требуется найти наименьшее число параллельных световых пучков, которыми можно осветить всю границу выпуклой фигуры F. Освещение границы понимается в смысле трансверсального пересечения границы прямыми со стороны бесконечно удаленного источника света. Для фигуры с негладкой границей опорные «лучи» в особых точках тоже не считаются освещающими границу.

Мы будем рассматривать только ограниченные фигуры и тела. Если в качестве фигуры F на евклидовой плоскости выступает круг, то для его освещения, очевидно, требуется три параллельных пучка прямых. На плоскости Лобачевского под освещением круга будем понимать трансверсальное пересечение границы фигуры пучками параллелей со стороны бесконечно удаленных центров пучков. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть на плоскости Лобачевского кривизны $K = -1/\rho^2$ задан круг, радиус R которого удовлетворяет условию*

$$R < \rho \cdot \ln\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}\right).$$

Тогда для освещения этого круга достаточно n параллельных пучков прямых.

Доказательство. Каждый пучок освещает открытую дугу граничной окружности, видимую из центра окружности под углом $2\Pi(R)$, где $\Pi(R)$ — угол параллельности отрезка R. Предельное значение радиуса окружности будет определяться условием $\pi/n = \Pi(R)$. Используя формулу Лобачевского для угла параллельности

$$\operatorname{ctg}\frac{\Pi(R)}{2} = \exp\frac{R}{\rho},$$

получим, что при

$$R < \rho \cdot \ln\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}\right)$$

для освещения круга n пучков будет достаточно. Теорема доказана. □

Определение 8. Теневой стороной связки (пучка, при $n = 2$) параллельных прямых в пространстве Лобачевского H^n назовем сторону, противоположную бесконечно удаленному источнику.

Очевидно, что для трансверсального покрытия окружности теневыми сторонами пучков параллелей достаточно двух пучков. Расположив центры пучков в «концах» прямой, проходящей через центр окружности, получим выполнение данного условия. Имеет место и более общая теорема. Мы приведем ее вариант для трехмерного пространства.

Теорема 8. *Если граница выпуклого тела V в пространстве Лобачевского H^3 принадлежит классу C^1, то для трансверсального покрытия границы теневыми сторонами связок достаточно двух связок параллельных прямых.*

Доказательство. Пусть AB — какой-либо диаметр тела V. Через середину диаметра проведем перпендикулярную ему прямую l. Две связки прямых, параллельных l, то есть имеющих бесконечно удаленные центры в «концах» прямой l, обеспечат покрытие границы тела теневыми сторонами связок. Теорема доказана. □

6. Открытая проблема. Орисфера и оришар являются трехмерными аналогами орицикла и орикруга соответственно. В работе [12], в частности, доказано, что девяти одновременно открытых или одновременно замкнутых оришаров, или восьми оришаров, из которых три замкнуты и пять открыты, достаточно для того, чтобы не принадлежащая им произвольная фиксированная точка трехмерного пространства Лобачевского принадлежала 1-полувыпуклой оболочке оришаров. Определение точной верхней оценки числа оришаров, обеспечивающих принадлежность точки их 1-полувыпуклой оболочке, является нерешенной задачей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болтянский В. Г., Гохберг И. Ц.* Теоремы и задачи комбинаторной геометрии. — М.: Наука, 1965.
2. *Выговская И. Ю., Зелинский Ю. Б., Стефанчук М. В.* Обобщенно выпуклые множества и задача о тени// Укр. мат. ж. — 2015. — *67*, № 12. — С. 1658–1666.
3. *Зелинский Ю. Б., Выговская И. Ю., Дакхил Х. К.* Задача о тени и смежные задачи// Proc. Int. Geom. Center. — 2016. — *9*, № 3. — С. 50–58.

4. *Костин А. В., Костина Н. Н.* Задача Таммеса и контактное число сферы в пространствах постоянной кривизны// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — *182*. — С. 45–50.
5. *Костина Е. А., Костина Н. Н.* Метрические характеристики гиперболических многоугольников и многогранников// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2019. — *169*. — С. 31–38.
6. *Несторович Н. М.* Геометрические построения в плоскости Лобачевского. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1951.
7. *Розенфельд Б. А.* Неевклидовы пространства. — М.: Наука, 1969.
8. *Худайберганов Г.* Об однородно-полиномиально выпуклой оболочке объединения шаров// Деп. в ВИНИТИ. — 21.02.1982. — № 1772-85.
9. *Dakhil H. K.* The shadows problems and mappings of fixed multiplicity/ Ph.D. — Kiev, 2017.
10. *Dostert M., Kolpakov A.* Kissing number in non-Euclidean spaces of constant sectional curvature// Math. Comput. — 2021. — *90*. — P. 2507–2525.
11. *Kostin A. V.* Problem of shadow in the Lobachevskii space// Ukr. Math. J. — 2019. — *70*, № 11. — P. 1758–1766.
12. *Kostin A. V.* Some generalization of the shadow problem in the Lobachevsky space// Ukr. Math. J. — 2021. — *73*, № 1. — P. 61–68.
13. *Osipchuk T. M.* On semiconvexity of open sets with smooth boundary in the plane// Proc. Int. Geom. Center. — 2019. — *12*, № 4. — P. 69–88.

Костин Андрей Викторович
Елабужский институт Казанского федерального университета
E-mail: kostin_andrei@mail.ru

Костина Наталья Николаевна
Елабужский институт Казанского федерального университета
E-mail: natnikost@mail.ru