



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 216 (2022). С. 106–115
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-216-106-115

УДК 514.172.45

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ПОЛНОТЕ ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ RR -МНОГОГРАННИКОВ

© 2022 г. В. И. СУББОТИН

Аннотация. RR -Многогранник — это замкнутый выпуклый многогранник в E^3 , множество граней которого можно разбить на два непустых непересекающихся класса: класс правильных одно-типных многоугольников, и класс граней, образующих звёзды симметричных ромбических вершин. Доказана теорема о существовании и полноте перечисления замкнутых выпуклых трёхмерных RR -многогранников.

Ключевые слова: RR -многогранник, звезда вершины, симметричная ромбическая вершина.

ON THE EXISTENCE AND COMPLETENESS OF ENUMERATION OF THREE-DIMENSIONAL RR -POLYHEDRA

© 2022 V. I. SUBBOTIN

ABSTRACT. An RR -polyhedron is a closed convex polyhedron in E^3 whose set of faces can be divided into two nonempty disjoint class: the class of regular polygons of the same type and the class of faces that form stars of symmetric rhombic vertices. A theorem on the existence and completeness of enumeration of closed convex three-dimensional RR -polyhedra is proved.

Keywords and phrases: RR -polyhedron, star of a vertex, symmetric rhombic vertex.

AMS Subject Classification: 52B10, 52B15

1. Введение. При исследовании симметрии многогранников важен вопрос о влиянии группы симметрий, действующей на элементах многогранника, на его комбинаторику и метрическое строение (см., например, [1, 2, 6, 8, 10]). Конечно, по заданным условиям симметрии не всегда можно с определённой судить о комбинаторной структуре многогранника и его геометрии. Однако, если, например, задаться вопросом: найти все замкнутые выпуклые многогранники в E^3 с равными правильными гранями, в каждой вершине которых сходится одинаковое число рёбер, то получим только пять правильных (платоновых) многогранников. Таким образом, в этом простейшем примере класс многогранников с предписанными условиями симметрии (правильности) содержит только пять многогранников. Естественно, чем слабее условия симметрии, тем более многочисленные классы многогранников, удовлетворяющие этим условиям, могут получиться. Если, к примеру, ограничиться только условиями правильности замкнутого выпуклого многогранника в E^3 , то помимо правильных и архимедовых многогранников, бесконечной серии призм и антипризм, получим 92 многогранника с правильными гранями (см. [1, 2, 10]).

Ранее автором рассматривались такие условия симметрии, в которых не предполагалось заранее ни правильности граней многогранника, ни правильности вершинных фигур, (см., например, [4]). Даже такие условия симметрии позволили найти полный список многогранников, удовлетворяющих этим условиям. (Удобно назвать такие условия *жесткими*.) Причём иногда этот список не содержал бесконечных серий многогранников.

Далее, (*гранная*) *звезда вершины* V многогранника — это множество $\text{Star}(V)$ всех граней, имеющих общую вершину, совпадающую с V .

Если множество $\text{Star}(V)$ состоит из n равных и одинаково расположенных, т.е. сходящихся в вершине V либо своими острыми, либо тупыми углами ромбов (не квадратов), то V называется *ромбической*.

Если V принадлежит оси вращения порядка n множества $\text{Star}(V)$, то $\text{Star}(V)$ называется *симметричной n -ромбической звездой*, а V — *симметричной n -ромбической вершиной*.

В настоящей работе рассматриваются трёхмерные многогранники с жесткими условиями симметрии, которым удовлетворяет лишь конечное число многогранников, причём каждый из них определяется с точностью до подобия. Эти многогранники составляют класс *RR -многогранников*, введённых автором в [4]. Напомним определение этого класса.

Пусть у замкнутого выпуклого многогранника в E^3 существуют симметричные ромбические вершины V_i и существуют грани F_i , не принадлежащие ни одной звезде вершин V_i ; причём все грани F_i являются правильными многоугольниками одного типа. Тогда такой многогранник будем называть *RR -многогранником* (от слов “rombic” и “regular”).

Таким образом, *RR -многогранник* — это замкнутый выпуклый многогранник в E^3 , множество граней которого можно разбить на два непустых непересекающихся класса: класс правильных однотипных многоугольников, и класс граней, образующих звёзды симметричных ромбических вершин.

Если V является вершиной только острых углов ромбов звезды $\text{Star}(V)$, то V называется *остроугольной*.

Ромбическая вершина называется *изолированной*, если ее гранная звезда не имеет общих вершин со звездой любой другой ромбической вершины многогранника.

Ромбическая вершина называется *неизолированной*, если ее гранная звезда имеет общие вершины, но не имеет общих рёбер с гранной звездой любой другой ромбической вершины.

2. Теорема о существовании и полноте класса RR . В [4, 5] при условии, что пояс граней, отделяющий симметричные ромбические вершины только один и в предположении, что изолированных симметричных ромбических вершин только две, автором перечислены *RR -многогранники* с правильными гранями одного типа.

Напомним, что *поясом граней* здесь и в дальнейшем называется связное множество граней $F_1, F_2, \dots, F_n$ такое, что любые две грани F_i, F_{i+1} и также F_1, F_n имеют только одно общее ребро, а любые две другие грани этого множества не имеют общих рёбер.

В следующей общей теореме дано доказательство существования и полноты списка *RR -многогранников* без предположения о количестве поясов граней, разделяющих симметричные ромбические вершины, и без ограничения, что число таких вершин равно двум.

Теорема 1. *Следующие двадцать три многогранника исчерпывают класс всех RR -многогранников с изолированными и неизолированными ромбическими вершинами.*

I. RR -многогранники с изолированными ромбическими вершинами:

- (1) 7-гранник с треугольными гранями и одной 3-ромбической вершиной (расширенный октаэдр);
- (2) 12-гранник с треугольными гранями и одной 4-ромбической вершиной;
- (3) 15-гранник с треугольными гранями и одной 5-ромбической вершиной;
- (4) 13-гранник с треугольными гранями и одной тупоугольной 3-ромбической вершиной;
- (5) 19-гранник с треугольными гранями и одной тупоугольной 3-ромбической вершиной;

- (6)—(11) *шесть многогранников с двумя n -ромбическими вершинами, $6 \leq n < 12$, и правильными треугольными гранями;*
- (12) *24-гранник с двумя 4-ромбическими вершинами и правильными треугольными гранями;*
- (13) *20-гранник с двумя 5-ромбическими вершинами и квадратными гранями;*
- (14) *удлинённый ромбический додекаэдр;*

II. RR -многогранники с изолированными ромбическими вершинами:

- (15) *12-гранник с двумя изолированными 4-ромбическими вершинами и четырьмя квадратами (дважды расширенный кубооктаэдр);*
- (16)—(22) *семь многогранников с двумя изолированными n -ромбическими вершинами, $4 < n < 12$, и треугольными гранями;*
- (23) *12-гранник с двумя изолированными тупоугольными ромбическими вершинами.*

Доказательство.

В первой части доказательства будут найдены все RR -многогранники с одной остроугольной ромбической вершиной и RR -многогранники с одной тупоугольной ромбической вершиной.

Во второй части — RR -многогранники с изолированными ромбическими вершинами без предположения о количестве изолирующих поясов граней и количестве ромбических вершин.

В третьей части рассмотрен вопрос о существовании RR -многогранников с изолированными ромбическими вершинами.

I. Покажем, что существуют только три RR -многогранника с одной остроугольной симметричной ромбической вершиной.

Найдём сначала все такие RR -многогранники с треугольными гранями.

Как и в нашей работе [5], рассмотрим границу $L(V)$ ромбической звезды $\text{Star}(V)$, которая является пространственной ломаной $MRNSPTQ\dots$, рис. 1(a). Острые углы ромбов звезды $\text{Star}(V)$ обозначим α . Углы с вершинами на $L(V)$, образованные сторонами двух смежных ромбов, обозначим β и будем называть *свободными*.

Напомним формулу из [5], связывающую углы α , β и степень n остроугольной ромбической вершины V :

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{2 \sin \frac{\pi(n-2)}{2n}}. \quad (1)$$

Из этой формулы при $n = 3$ легко видеть, что при $\beta = \frac{\pi}{3}$ острые углы ромбов α тоже равны $\pi/3$.

Таким образом, мы можем поместить правильные треугольные грани T_i в свободные углы β граничной ломаной $L(V)$. При этом для каждого ромба из $\text{Star}(V)$ существует параллельная ей треугольная грань T_i , $i = 1, 2, 3$. Поэтому три вершины острых углов ромбов, лежащие на $L(V)$, будут вершинами ещё одной — новой — правильной треугольной грани T_4 .

Итак, в этом случае мы имеем RR -многогранник с трёхгранной ромбической вершиной и четырьмя правильными треугольными гранями, рис. 2(a). Заметим, что на рис. 2 у каждого многогранника указана его группа симметрии.

Пусть теперь $n = 4$. Поместив правильные треугольные грани в свободные углы β , получим многогранную поверхность, край которой представляет собой квадрат. Надстраивая над этим квадратом правильную четырёхугольную пирамиду, получим 12-гранник с восемью треугольными гранями и 4-ромбической вершиной. Из формулы (1) получаем острые углы ромбов этой вершины: $\alpha \approx 41,41^\circ$, рис. 2(b).

Аналогично при $n = 5$ получим 15-гранный RR -многогранник с одной ромбической вершиной, который получается помещением правильных треугольных граней в свободные углы β с последующим надстраиванием над пятиугольником правильной пятиугольной пирамиды. Острые углы ромбов в ромбической вершине в этом случае равны по 36° , рис. 2(c).

Заметим, что во всех трёх случаях можно к треугольному, четырёхугольному или пятиугольному краю приставить антипризматический пояс. Однако в этом случае при $n = 3$ и $n = 4$

выпуклость многогранника будет нарушена. В случае $n = 5$ пять треугольников антипризматического пояса будут составлять с пятью треугольными гранями, помещёнными в свободные углы, ромбы; и многогранник не будет являться RR -многогранником (см. [5]).

Очевидно, в случае $n > 5$ рассмотренные построения невозможны и новые RR -многогранники в этом случае не существуют.

Проверим теперь, можно ли получить при $n = 3, 4, 5$ RR -многогранники с одной ромбической вершиной V , если помещать в свободные углы по две правильных треугольных грани.

В случае $n = 3$, как было замечено выше, $\beta = \alpha$. Поэтому, помещая две треугольные грани в свободные углы в этом случае, получим, что общее ребро этих граней будет продолжением общего ребра двух ромбических граней из $\text{Star}(V)$. Таким образом, в этом случае ромбичность вершины нарушится.

В случае $n = 4$ возможно поместить в свободные углы по две правильных треугольных грани. Добавим ещё по две треугольных грани в углы, вершинами которых являются острые углы ромбов, а сторонами — стороны треугольников. Получим пояс из восьми треугольных граней, как в случае многогранника в [5]. Обозначим $L'(V)$ полученную новую граничную ломаную пояса образовавшейся многогранной поверхности. В вершинах ломаной $L'(V)$ попеременно сходятся по две и по четыре треугольных грани. Вершины ломаной $L'(V)$, в которых сходятся по четыре треугольных грани, будут вершинами новых свободных углов; эти углы здесь и в дальнейшем будем обозначать γ .

При $n = 4$ в каждый из четырёх углов γ нельзя поместить две треугольных грани, иначе сумма плоских углов в вершинах углов будет больше 2π . Поместив в углы γ по одной треугольной грани, получим в силу симметрии, что вершины ломаной $L'(V)$, в которых сходятся по две треугольных грани, будут вершинами квадрата. Очевидно, над этим квадратом нельзя надстроить правильную четырёхугольную пирамиду, так как нарушится выпуклость многогранника. Таким образом, в этом случае мы не получим новый RR -многогранник с одной ромбической вершиной.

Аналогичное рассуждение приводит к невозможности RR -многогранника с одной остроугольной 5-ромбической вершиной и с двумя правильными треугольными гранями в углах β .

В случае $n > 5$ поместить по две треугольных грани в свободные углы нельзя. Действительно, в этом случае углы α удовлетворяют неравенству $\alpha < \pi/6$. Поэтому тупые углы ромбов должны быть больше $2\pi/3$, и, следовательно, в вершинах ломаной $L(V)$, в которых ромбы сходятся тупыми углами, не могут сходить ещё по две правильных треугольных грани.

Проверим теперь, существуют ли RR -многогранники с одной остроугольной ромбической вершиной и квадратными гранями.

В случае $n = 3$, как и ранее, в силу $\beta = \alpha$ RR -многогранник с квадратными гранями невозможен.

Если $n = 4$, то поместить в свободные углы β квадратные грани возможно. В этом случае острый угол $\alpha = \pi/3$. Углы между граничными рёбрами соседних квадратов обозначим δ , рис. 1(с).

В углы δ нельзя поместить квадратные грани. Действительно, $\delta = \pi/3$, так как в них можно поместить правильные треугольные грани, свободные рёбра которых ограничат квадратную грань, и мы получим известный 13-гранник — *расширенный кубооктаэдр* с одной ромбической вершиной с углами $\alpha = \pi/6$ и треугольными и квадратными гранями. Таким образом, правильные грани такого многогранника не являются однотипными, рис. 1(b).

При $n = 5$, помещая квадратные грани в свободные углы, получим, что $\alpha \approx 52^\circ$.

В этом случае $\delta = \pi/2$, так как в них можно поместить квадратные грани и однозначно достроить полученную многогранную поверхность до RR -многогранника с 20 гранями и с двумя ромбическими вершинами из [4] (см. рис. 2(g)). Таким образом, и в этом случае RR -многогранник с одной ромбической вершиной невозможен.

Покажем, что и при $n = 6$ RR -многогранник с одной ромбической вершиной невозможен.

Действительно, в этом случае поместить в углы δ квадратные грани нельзя. Действительно, поместив квадратные грани в свободные углы, перейдём по параллельным рёбрам $m \parallel p$ и $n \parallel q$ и т. д., образованным сторонами угла β , через ромбическую вершину, как это сделано в [5]. Тогда мы получим, что в вершине B квадрата, противоположного углу β , сходятся четыре квадратных

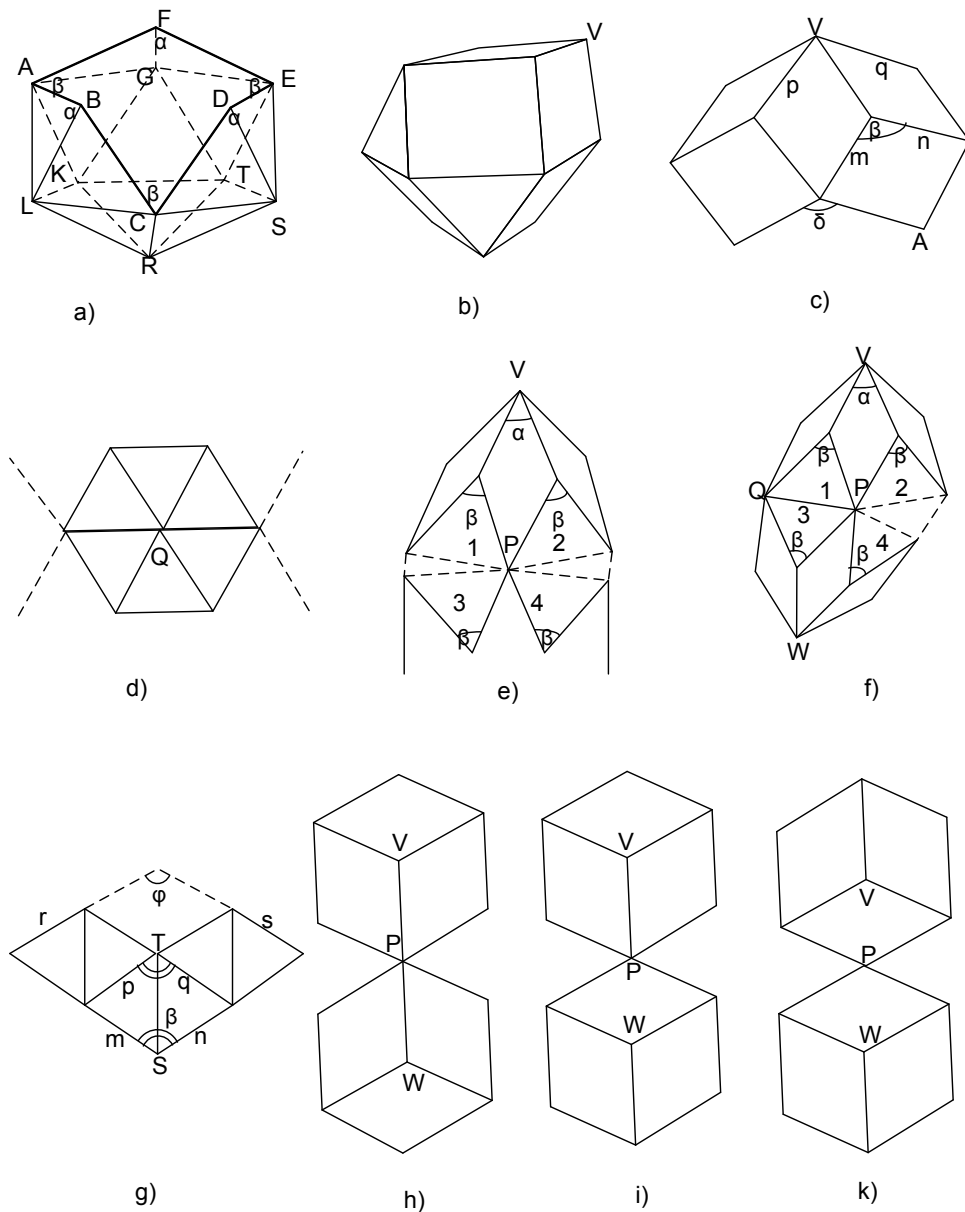


Рис. 1. К доказательству теоремы 1.

грани, что невозможно. Здесь вершина B — это вершина, эквивалентная вершине A относительно оси вращения звезды $\text{Star}(V)$, рис. 1(c).

При $n = 7$ доказательство несуществования RR -многогранника аналогично, только в этом случае нужно совершать переход по параллельным рёбрам, образующим стороны угла δ .

Если $n > 7$, то в вершинах углов β сумма плоских углов будет больше 2π , и RR -многогранники с одной ромбической вершиной и квадратными гранями не существуют.

Рассмотрим теперь вопрос о существовании RR -многогранников с одной остроугольной ромбической вершиной и правильными пятиугольными гранями.

В случае, если $n = 3$, в силу $\beta = \alpha$ RR -многогранник с пятиугольными гранями невозможен.

Если $n = 4$, то поместив в свободные углы правильные пятиугольные грани, и обозначив углы между граничными рёбрами пятиугольников δ , мы не сможем в углы δ поместить пятиугольные грани. Действительно, плоскости двух соседних пятиугольных граней, помещённых в свободные углы, при $n = 4$ параллельны оси вращения звезды $\text{Star}(V)$. Поэтому угол γ , вершина которого

является вершиной острого угла ромба и стороны являются рёбрами двух соседних пятиугольных граней, будет меньше $3\pi/5$.

При $n = 5$ и $\beta = 3\pi/5$ формула (1) даёт: $\alpha = \pi/3$. Поэтому в угол δ нельзя поместить правильную пятиугольную грань. В противном случае сумма плоских углов в вершинах ломаной $L(V)$, инцидентных острым углам ромбов, будет больше 2π .

Аналогично рассуждая в случае $n = 6$, получаем и в этом случае невозможность RR -многогранника.

Точно так же используя формулу (1) в случае $n > 6$, получим, что в вершинах ломаной $L(V)$, в которых сходятся тупые углы ромбов, сумма плоских углов будет больше 2π .

Таким образом, RR -многогранники с одной остроугольной ромбической вершиной и правильными пятиугольными гранями не существуют.

Предыдущие рассуждения делают очевидным, что для решения вопроса о существовании RR -многогранников с одной остроугольной ромбической вершиной и правильными шестиугольными гранями достаточно рассмотреть случай $n = 4$. В этом случае в свободные углы β можно поместить правильные шестиугольные грани, как это видно на примере удлиненного ромбододекаэдра — одного из RR -многогранников, рис. 2(f). На этом примере видим также, что в углы δ можно поместить только ромбические грани, равные граням из $\text{Star}(V)$. Таким образом, в этом случае RR -многогранник с одной ромбической вершиной не существует.

Отсюда видно также, что не существует RR -многогранников с одной остроугольной ромбической вершиной и правильными k -угольными гранями при $k > 6$.

Здесь кратко рассмотрим основные идеи в решении вопроса о существовании RR -многогранников с одной тупоугольной ромбической вершиной. Покажем, что существуют только два таких многогранника. Оба они могут быть получены из икосаэдра — правильного 20-гранника с треугольными гранями.

Первый RR -многогранник с одной тупоугольной вершиной получим, удалив из икосаэдра четыре грани, а также шесть соседних с ними по ребру икосаэдра. К краю оставшейся многогранной поверхности присоединяем тупоугольную звезду $\text{Star}(V)$ из трёх ромбов с тупыми углами $\alpha = 3\pi/5$. Полученный 13-гранник — искомый RR -многогранник (см. рис. 2(d)).

Более трудоёмким является вопрос о существовании второго многогранника с одной тупоугольной вершиной. Здесь мы укажем кратко основные идеи доказательства.

Удалим из икосаэдра одну грань и три грани, соседние с нею по рёбрам икосаэдра. Граничную ломаную полученной многогранной поверхности M обозначим L . На рис. 1(a) — это ломаная $ABCDEF$. Углы между рёбрами BA и BC , а также им эквивалентные, обозначим α . Углы между рёбрами CB и CD , а также им эквивалентные, обозначим β .

Для того чтобы к граничной ломаной L можно было присоединить тупоугольную ромбическую звезду $\text{Star}(V)$ из трёх ромбов, необходимо выполнения равенства: $\alpha = \beta$. Учитывая это равенство, вычисления дают приближённое значение угла $\alpha \approx 91,4397^\circ$. Заметим также, что вопрос о том, возможно ли обеспечить равенство $\alpha = \beta$ путём изометрической деформации (изгибания) поверхности M , решается утвердительно.

Таким образом, ромбические грани полученного RR -многогранника с 19 гранями таковы, что он *приближённо* может считаться многогранником с правильными треугольными и квадратными гранями (см. рис. 2(e)).

Итак, существуют два RR -многогранника с одной тупоугольной ромбической вершиной.

Доказательство того, что не существует других таких многогранников, основано на следующих замечаниях.

Рассматривая граничную ломаную $L(V)$ в случае первого из рассмотренных многогранников с тупоугольной ромбической вершиной, видим, что в вершинах ломаной $L(V)$ попеременно сходятся по две и по три треугольных грани. А в случае 19-гранника — по две и по четыре треугольных грани. Легко проверить, что возможен ещё только один случай, когда в вершинах граничной ломаной $L(V)$ попеременно сходятся по три и по четыре треугольных грани. Однако в этом случае RR -многогранник с одной тупоугольной ромбической вершиной невозможен. Это следует из

доказанной в [5] невозможности существования в этом случае многогранника с двумя ромбическими вершинами. Таким образом, других RR -многогранников с тупоугольной ромбической вершиной и с треугольными гранями не существует. Не существует их и в случае правильных k -угольных граней. Действительно, в случае $k = 4$ и $k = 5$ получим, что множество правильных граней является, соответственно, частью поверхности куба и частью поверхности додекаэдра. При $k > 5$ невозможность RR -многогранника очевидна.

II. В этой части доказательства рассмотрим те изменения, которые необходимо внести в доказательство существования многогранников из [5], чтобы обобщить результаты из [5] на случай, когда предполагаемое число ромбических вершин не ограничено двумя и их ромбические звёзды не предполагаются зеркально расположенными. Будет снято также ограничение на число поясов, разделяющих ромбические вершины. Все RR -многогранники этой части обязательно будут иметь хотя бы один пояс граней, разделяющий ромбические вершины. Таким образом, гранные звёзды ромбических вершин не имеют в этом случае общих вершин.

Перечисление всех RR -многогранников в этом случае будем проводить по следующей схеме.

Рассмотрим одну симметричную ромбическую звезду $Star_1(V)$ с одним поясом граней и докажем, что в этом случае и в случае, если к этому поясу добавляются новые правильные грани, возможно добавление только одной (конгруэнтной $Star_1(V)$) симметричной ромбической звезды $Star_2(V)$. При этом звёзды $Star_1(V)$ и $Star_2(V)$ будут иметь общую ось вращения.

Рассматривать ромбические звёзды будем в том же порядке, что и в части I. При этом будем ссылаться на уже рассмотренные случаи из [5]. Заметим здесь же, что несуществование RR -многогранника с одной данной ромбической звездой не исключает его существование с большим числом ромбических звёзд.

Сначала будем рассматривать звёзды с остроугольными ромбическими вершинами.

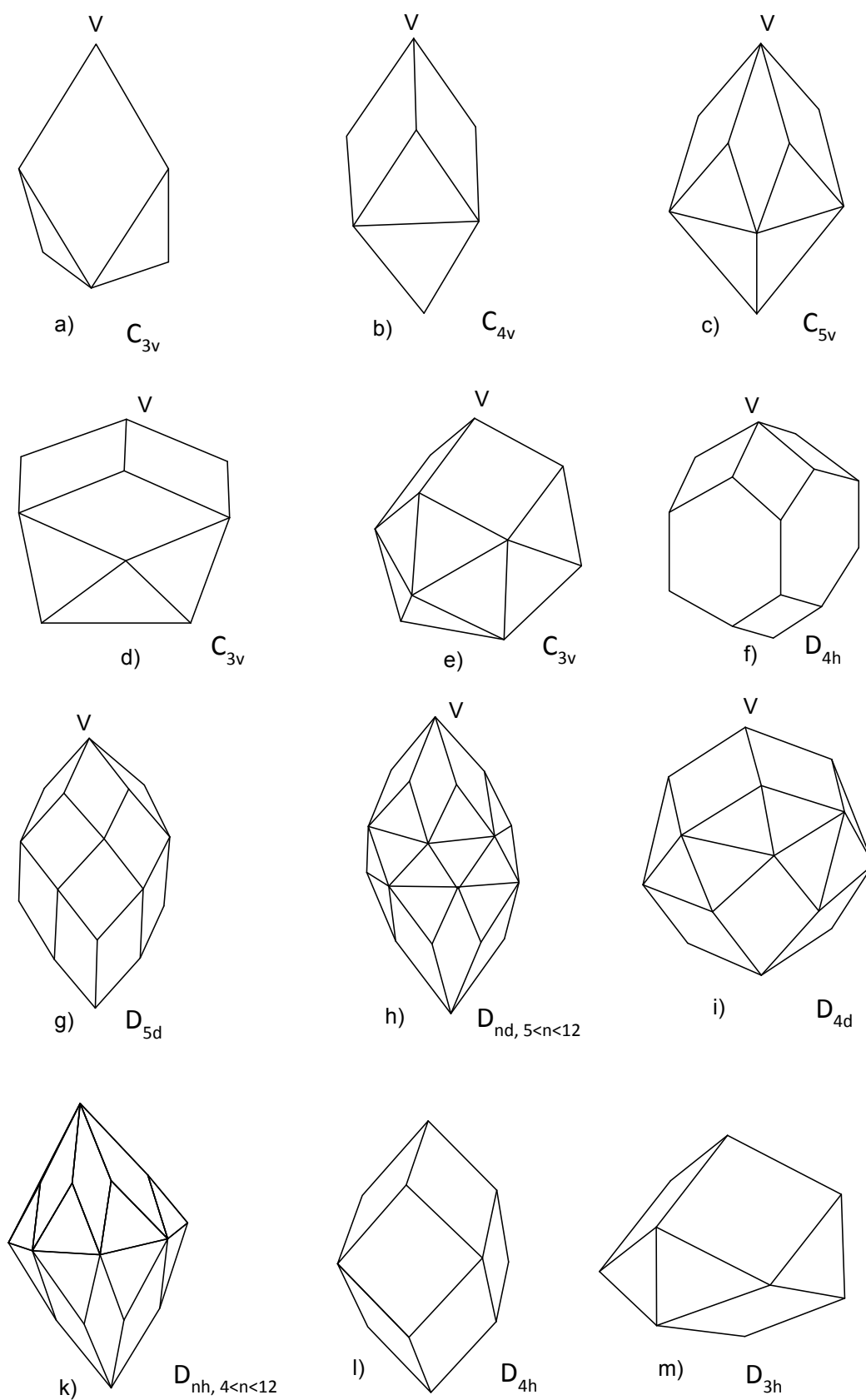
Рассмотрим, как и в части I, случай, когда в свободные углы ромбической звезды помещено по одной треугольной грани. В дальнейшем для удобства ромбическую звезду вершины V с правильными гранями в свободных углах будем называть *ромбической шапочкой* и обозначать $K(V)$.

При $n = 3, 4, 5$ отделение поясом граней другой возможной ромбической вершины невозможно. При $5 < n < 12$ такое отделение возможно только антипризматическим поясом. Действительно, в вершинах ломаной $L(V)$, которые совпадают с острыми углами ромбов звезды вершины V , могут сходиться самое большее 5 треугольных граней. Приставить к антипризматическому поясу ещё один такой же пояс нельзя, иначе в одной вершине (например, вершина Q на рис. 1(d)) будут сходиться шесть правильных граней. Приставляя к первому поясу ромбическую шапочку $K(V')$, конгруэнтную первой ромбической шапочке, получим один из многогранников 6–11 в формулировке теоремы, в которых ромбические вершины изолированы (см. рис. 2(h)). Приставить любую симметричную ромбическую шапочку $K(V')$ к антипризматическому поясу так, чтобы её ось симметрии была бы не параллельна оси симметрии шапочки $K(V)$, невозможно, иначе нарушится условие для суммы плоских углов в вершинах, в которых сходятся острый угол ромба шапочки $K(V')$ и три угла треугольников антипризматического пояса.

Таким образом, число RR -многогранников из [5] с правильными треугольными гранями в случае, когда в свободных углах ромбических звёзд помещено по одной грани, не изменится, если не ограничиваться одним разделяющим поясом правильных граней и двумя ромбическими вершинами.

Повторяя построения части I в случае, когда в свободные углы β помещены по две правильных треугольных грани, видим, что при $n = 4$ в углы γ можно поместить ромбы, как это сделано в [4]. Таким образом, если не ограничиваться заранее числом вершин, то в случае, если в свободные углы поместить по две треугольных грани, будет существовать только один RR -многогранник — 24-гранник, конструктивное доказательство существования которого выполнено в [4] (см. рис. 2(i)). Невозможность аналогичного построения для случая $n = 3$ очевидна из части I.

Покажем, что RR -многогранник с двумя и большим числом вершин, когда в свободные углы β помещены по две правильных треугольных грани, невозможен в случае $n = 5$.

Рис. 2. RR -многогранники с правильными гранями одного типа.

Пусть β_1 — свободный угол с вершиной S и сторонами m и n ромбической звезды $\text{Star}(V_1)$. Рассмотрим равный ему угол ϕ с вершиной T и сторонами p и q , где T — вершина острого угла ромба из $\text{Star}(V_2)$ (см. рис. 1(g)). Так как ребро $r \nparallel p$, а $s \nparallel q$, то угол $\phi < \beta$. Предположим, что существует вторая ромбическая звезда $\text{Star}(V_2)$. Совершая переход по рёбрам, соответственно параллельным сторонам угла ϕ , через вершину звезды $\text{Star}(V_2)$, получим, что ϕ равен свободному углу β_2 звезды $\text{Star}(V_2)$. Отсюда получаем неравенство: $\beta_2 < \beta_1$. Меняя местами вершины V_1 и V_2 , получим противоположное неравенство. Оба неравенства одновременно несовместимы. Следовательно, при $n = 5$ RR -многогранник невозможен.

Проводя рассуждения, аналогичные части I настоящего доказательства, видим, что для нахождения всех RR -многогранников с квадратными гранями, достаточно рассмотреть случаи $n = 4$ и $n = 5$. Но при $n = 4$ мы получим только 12-гранник с двумя ромбическими вершинами и квадратными гранями («дважды расширенный кубоктаэдр»), у которого $\alpha = \pi/6$. Однако его ромбические вершины не изолированы, и пока его не учитываем (см. рис. 2(1)).

При $n = 5$ из изложенного в части I следует, что в этом случае, если не ограничивать число ромбических вершин и число разделяющих поясов, существует только один многогранник с остроугольными ромбическими вершинами — 20-гранник с двумя ромбическими вершинами, упомянутый выше (см. рис. 2(g)).

Из предыдущего изложения следует также, что RR -многогранников с пятиугольными гранями и с числом вершин, большим 5, не существует. С шестиугольными правильными гранями существует только удлинённый ромбический додекаэдр (см. рис. 2(f)). При $k > 6$ не существуют RR -многогранники с правильными k -угольными гранями.

RR -многогранников с изолированными тупоугольными ромбическими вершинами, число которых больше одной, не существует.

Действительно, в [5] показано, что если у многогранника с изолированными ромбическими вершинами помимо одной тупоугольной ромбической вершины существует ещё хотя бы одна, то оси симметрии их гранных звёзд должны совпадать. Но таких многогранников, как показано в [5], не существует.

III. В этой части будут найдены все RR -многогранники, у которых существуют неизолированные ромбические вершины. Пусть гранные звёзды таких вершин имеют общие вершины на граничной ломаной $L(V)$, но не имеют общих рёбер.

Сначала рассмотрим случай остроугольных ромбических вершин. При этом случай треугольных правильных граней требует более подробного рассмотрения.

Итак, пусть имеется RR -многогранник с правильными треугольными гранями, у которого остроугольные n -ромбические звёзды $\text{Star}(V)$ и $\text{Star}(W)$ имеют общие граничные вершины.

На рис. 1 показаны случаи, когда n -ромбические звёзды вершин V и W имеют одну (см. рис. 1(e)) или две (рис. 1(f)) общие вершины. В случае общих трёх вершин очевидно, что $\text{Star}(V)$ и $\text{Star}(W)$ имеют n общих вершин. На рис. 1(e) видно, что сумма плоских углов в вершине P заведомо будет больше 2π . Действительно, в этой вершине будут сходиться шесть правильных треугольников и два ромба. Поэтому этот случай невозможен.

Невозможен и случай двух общих вершин. Действительно, угол α даже в случае максимального значения $n = 11$ будет больше $\pi/6$, что следует из формулы (1). Так как вершина P на рис. 1(f) является общей для пяти треугольных и двух углов α , то и в этом случае в вершине P сумма плоских углов будет больше 2π .

Аналогично убеждаемся в том, что невозможен RR -многогранник с ромбическими вершинами с одной или двумя общими вершинами и правильными k -угольными гранями при $k > 3$.

Если общих вершин у двух ромбических звёзд больше двух, то в свободных углах этих звёзд могут быть либо треугольные грани — и тогда получим семь многогранников с двумя неизолированными n -ромбическими вершинами, $4 < n < 12$, и треугольными гранями (см. рис. 2(k)); либо две ромбические шапочки имеют общие грани — четыре квадрата. В последнем случае мы получим 12-гранник с двумя неизолированными 4-ромбическими вершинами и четырьмя квадратами, упомянутый выше: «дважды расширенный кубоктаэдр» (см. рис. 2(1)).

Пусть ромбические вершины тупоугольные.

Рассмотрим только случай, когда правильные грани треугольные, так как в случае нетреугольных граней не трудно убедиться в невозможности RR -многогранников с неизолированными тупоугольными ромбическими вершинами.

Если общими являются только вершины двух острых углов ромбов ромбических звёзд (см. рис. 1(h)), то в вершине P сумма плоских углов будет больше 2π . Аналогично, если общими являются только вершины острого и тупого углов ромбов ромбических звёзд (см. рис. 1(i)).

Если общими являются вершины двух тупых углов ромбов ромбических звёзд (см. рис. 1(k)), то общими будут все три вершины тупых углов ромбов двух ромбических звёзд $\text{Star}(V)$ и $\text{Star}(W)$. Действительно, в этом случае тупые углы ромбов должны быть равны, и $\text{Star}(V)$ и $\text{Star}(W)$ отделены друг от друга только шестью треугольными гранями, не образующими пояса в смысле данного выше определения пояса граней. Таким образом, в этом случае получим RR -многогранник с шестью правильными гранями и двумя тупоугольными ромбическими вершинами (см. рис. 2(m)). Вычислениями находим для него значение тупого угла ромба:

$$\alpha = 2 \arcsin 0,75 \approx 97,18^\circ.$$

Итак, рассмотрены все возможные случаи расположения ромбических звёзд и правильных граней. Следовательно, найденные двадцать три многогранника исчерпывают класс всех RR -многогранников с изолированными и неизолированными ромбическими вершинами и правильными гранями одного типа. Теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Деза М., Гришукин В. П., Штогрин А. И. Изометрические полиэдральные подграфы в гиперкубах и кубических решетках. — М.: МЦНМО, 2007.
2. Залгаллер В. А. Выпуклые многогранники с правильными гранями// Зап. науч. семин. ЛОМИ. — 1967. — 2. — С. 1–220.
3. Емеличев В. А., Ковалёв М. М., Кравцов М. К. Многогранники. Графы. Оптимизация. — М.: Наука, 1981.
4. Субботин В. И. О двух классах многогранников с ромбическими вершинами// Зап. науч. семин. ПОМИ. — 153–164. — 476.
5. Субботин В. И. О полноте списка выпуклых RR -многогранников// Чебышев. сб. — 2020. — 1. — С. 297–309.
6. Coxeter H. S. M. Regular and semi-regular polytopes, III// Math. Z. — 1988. — 200, № 21. — P. 3–45.
7. Cromwell P. R. Polyhedra. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.
8. Grünbaum B. Regular polyhedra—old and new// Aequat. Math. — 1977. — 16. — P. 1–20.
9. Grünbaum B. New uniform polyhedra// in: Discrete Geometry: In Honor of W. Kuperberg's 60th Birthday (Bezdek A., ed.). — New York: Marcel Dekker, 2003. — P. 331–350.
10. Johnson N. W. Convex polyhedra with regular faces// Can. J. Math. — 1966. — 18, № 1. — P. 169–200.

Субботин Владимир Иванович

Южно-Российский государственный политехнический университет

имени М. И. Платова, Новочеркасск

E-mail: geometry@mail.ru