ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 235 (2024). С. 34–39
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-235-34-39

УДК 519.117, 517.587

# ОБ ОДНОМ ПРИЕМЕ ПОЛУЧЕНИЯ ТОЖДЕСТВ С БИНОМИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ОРТОГОНАЛЬНЫМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

© 2024 г. **В. А. ВОБЛЫЙ**

Аннотация. С помощью единого подхода получен ряд новых комбинаторных тождеств с биномиальными коэффициентами и ортогональными многочленами. Эти тождества содержат многочлены Эрмита, многочлены Лежандра, многочлены Чебышева первого и второго рода, многочлены Гегенбауера и многочлены Кравчука.

***Ключевые слова***: комбинаторное тождество, биномиальные коэффициенты, ортогональные многочлены, многочлены Эрмита, многочлены Лежандра, многочлены Чебышева, многочлены Гегенбауера, многочлены Кравчука.

# AN APPROACH TO OBTAINING IDENTITIES WITH BINOMIAL COEFFICIENTS AND ORTHOGONAL POLYNOMIALS

© 2024 **V. A. VOBLYI**

Abstract. A series of new combinatorial identities with binomial coefficients and orthogonal polynomials is obtained by using a unified approach. These identities contain Hermite polynomials, Legendre polynomials, Chebyshev polynomials of the first and second kind, Gegenbauer polynomials, and Krawtchouk polynomials.

***Keywords and phrases***: combinatorial identity, binomial coefficients, orthogonal polynomials, Hermite polynomials, Legendre polynomials, Chebyshev polynomials, Gegenbauer polynomials, Krawtchouk polynomials.

***AMS Subject Classification***: 05A19, 33C45

Тождества с биномиальными коэффициентами встречаются не только в комбинаторном анализе, но также во многих разделах математики. В частности, они часто возникают при перечислении одного и того же класса графов разными способами (см. [4–6]). Тождества с многочленами Кравчука используются в задачах криптографии, теории кодирования и при перечислении графов (см. [3, 11, 14]).

В статье с помощью единого подхода получено большое количество новых комбинаторных тождеств с биномиальными коэффициентами, тригонометрическими функциями, гиперболическими функциями и многочленами Эрмита, многочленами Лежандра, многочленами Чебышева первого и второго рода, многочленами Гегенбауера и многочленами Кравчука.

 

**Теорема 1.** *Для любых целых чисел $p \geqslant 0$, $m \geqslant 0$ и любого целого числа $q$ верно комбинаторное тождество*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{k+m}^q (2k-n)^{2p+1} = \binom{n+2m}{m}^q n^{2p+1}. \tag{1}$$

*Доказательство.* Обозначим левую часть тождества (1) через $S_n$. После замены индекса суммирования $k = n - i$, $i = n - k$ имеем

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{k+m}^q (2k-n)^p = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+2m}{n-i+m}^q (n-2i)^{2p+1} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+2m}{i+m}^q (n-2i)^{2p+1},$$

$$2S_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{k+m}^q (2k-n)^{2p+1} + (-1)^{2p+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+2m}{k+m}^q (2k-n)^{2p+1} =$$
$$= \binom{n+2m}{n+m}^q n^{2p+1} - \binom{n+2m}{m}^q (-n)^{2p+1} = 2\binom{n+2m}{m}^q n^{2p+1}. \quad \square$$

С учетом инвариантности биномиального коэффициента и нечетности второго сомножителя относительно замены индекса суммирования $k = n - i$ доказательство теорем 2–8 аналогично доказательству теоремы 1.

**Теорема 2.** *Для любых целых чисел $p \geqslant 0$, $m \geqslant 0$ и любого целого числа $q$ верно комбинаторное тождество*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{2n+2m}{2k+m}^q (2k-n)^{2p+1} = \binom{2n+2m}{m}^q n^{2p+1}. \tag{2}$$

**Теорема 3.** *Для любых целых чисел $p \geqslant 0$, $m \geqslant 0$ и любого целого числа $q$ верно комбинаторное тождество*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{k+m}^q \Big(2^{2k-n} - 2^{n-2k}\Big) = \binom{n+2m}{m}^q \Big(2^n - 2^{-n}\Big). \tag{3}$$

**Теорема 4.** *Для любого целого числа $m \geqslant 0$, любого целого числа $q$ и любого действительного числа $x$ верно комбинаторное тождество*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{k+m}^q \sin((2k-n)x) = \binom{n+2m}{m}^q \sin(nx). \tag{4}$$

**Теорема 5.** *Для любого целого числа $m \geqslant 0$, любого целого числа $q$ и любого действительного числа $x$ верно комбинаторное тождество*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{k+m}^q \operatorname{arctg}((2k-n)x) = \binom{n+2m}{m}^q \operatorname{arctg}(nx). \tag{5}$$

**Теорема 6.** *Для любого целого числа $m \geqslant 0$, любого целого числа $q$ и любого действительного числа $x$ верно комбинаторное тождество*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{k+m}^q \operatorname{sh}((2k-n)x) = \binom{n+2m}{m}^q \operatorname{sh}(nx). \tag{6}$$

**Теорема 7.** *Для любого целого числа $m \geqslant 0$, любого целого числа $q$ и любого действительного числа $x$ верно комбинаторное тождество*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{k+m}^q \operatorname{th}((2k-n)x) = \binom{n+2m}{m}^q \operatorname{th}(nx). \tag{7}$$

**Теорема 8.** *Пусть* $\mathrm{sn}(x|r)$ — *эллиптическая функция Якоби. Для любого целого числа* $m \geqslant 0$, *любого целого числа* $q$ *и любых действительных чисел* $x$, $r$ *верно комбинаторное тождество*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{k+m}^{q} \mathrm{sn}((2k-n)x|r) = \binom{n+2m}{m}^{q} \mathrm{sn}(nx|r). \tag{8}$$

**Замечание 1.** Нечетность эллиптической функции Якоби $\mathrm{sn}(x|r)$ см. в [1, с. 384]. Так как $\mathrm{sn}(x|1) = \mathrm{th}(x)$, то формула (7) является следствием формулы (8).

**Теорема 9.** *Пусть* $H_n(x)$ — *многочлен Эрмита. Для любых целых чисел* $m \geqslant 0$, $r \geqslant 0$, *любого целого числа* $q$ *и любого действительного числа* $x$ *верно комбинаторное тождество*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{k+m}^{q} H_{2r+1}((2k-n)x) = \binom{n+2m}{m}^{q} H_{2r+1}(nx). \tag{9}$$

*Доказательство.* Для многочленов Эрмита известна формула (см. [1, с. 583])

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x).$$

Вводя обозначение $S_n$ для левой части равенства (4) и заменяя индекс суммирования ($k = n - i$, $i = n - k$) получим

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{k+m}^{q} H_{2r+1}((2k-n)x) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+2m}{n-i+m}^{q} H_{2r+1}((n-2i)x) =$$
$$= (-1)^{2r+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+2m}{k+m}^{q} H_{2r+1}((2k-n)x);$$

$$2S_n = \left[1 + (-1)^{2r+1}\right] \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n+2m}{k+m}^{q} H_{2r+1}((2k-n)x) +$$
$$+ \binom{n+2m}{n+m}^{q} H_{2r+1}(nx) + (-1)^{2r+1} \binom{n+2m}{m}^{q} H_{2r+1}(-nx) = 2\binom{n+2m}{m}^{q} H_{2r+1}(nx),$$

что равносильно равенству (4). □

Для многочленов Лежандра $P_n(x)$, многочленов Чебышева первого рода $T_n(x)$, многочленов Чебышева второго рода $U_n(x)$ и многочленов Гегенбауера $C_n^{(\lambda)}(x)$ известны следующие формулы (см. [1, с. 583]):

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \quad T_n(-x) = (-1)^n T_n(x),$$
$$U_n(-x) = (-1)^n U_n(x), \quad C_n^{(\lambda)}(-x) = (-1)^n C_n^{(\lambda)}(x).$$

Поэтому доказательство теорем 10–13 аналогично доказательству теоремы 9.

**Теорема 10.** *Пусть* $P_n(x)$ — *многочлен Лежандра. Для любых целых чисел* $m \geqslant 0$, $r \geqslant 0$, *любого целого числа* $q$ *и любого действительного числа* $x$ *верно комбинаторное тождество*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{k+m}^{q} P_{2r+1}((2k-n)x) = \binom{n+2m}{m}^{q} P_{2r+1}(nx). \tag{10}$$

**Теорема 11.** *Пусть* $T_n(x)$ — *многочлен Чебышева первого рода. Для любых целых чисел* $m \geqslant 0$, $r \geqslant 0$, *любого целого числа* $q$ *и любого действительного числа* $x$ *верно комбинаторное тождество*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{k+m}^{q} T_{2r+1}((2k-n)x) = \binom{n+2m}{m}^{q} T_{2r+1}(nx). \tag{11}$$

**Теорема 12.** *Пусть $U_n(x)$ — многочлен Чебышева второго рода. Для любых целых чисел $m \geqslant 0$, $r \geqslant 0$, любого целого числа $q$ и любого действительного числа $x$ верно комбинаторное тождество*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{k+m}^q U_{2r+1}((2k-n)x) = \binom{n+2m}{m}^q U_{2r+1}(nx). \tag{12}$$

**Теорема 13.** *Пусть $C_n^{(\lambda)}(x)$ — многочлен Гегенбауера. Для любых целых чисел $m \geqslant 0$, $r \geqslant 0$, любого целого числа $q$ и любых действительных чисел $x$, $\lambda$ верно комбинаторное тождество*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{k+m}^q C_{2r+1}^{(\lambda)}((2k-n)x) = \binom{n+2m}{m}^q C_{2r+1}^{(\lambda)}(nx). \tag{13}$$

Многочлены Кравчука $P_k(m;n)$ могут быть определены с помощью производящей функции (см. [14, с. 132]):

$$(1-z)^m(1+z)^{n-m} = \sum_{k=0}^{n} P_k(m;n)z^k.$$

**Теорема 14.** *Пусть $P_k(m;n)$ — многочлен Кравчука. Для любых целых неотрицательных чисел $p$, $r$, $m$ и любого целого числа $q$ верно комбинаторное тождество*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{k+m}^q P_{2r}(k,n)(2k-n)^{2p+1} = \binom{n+2m}{m}^q \binom{n}{2r} n^{2p+1}. \tag{14}$$

*Доказательство.* Для многочленов Кравчука известны формулы (см. [11])

$$P_s(n-i,n) = (-1)^s P_s(i,n), \quad P_s(0,n) = \binom{n}{s}, \quad P_s(n,n) = (-1)^s \binom{n}{s}.$$

Вводя обозначение $S_n$ для левой части равенства 8 и заменяя индекс суммирования ($k = n-i$, $i = n-k$) получим

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{n-i+m}^q P_{2r}(n-i,n)(n-2i)^{2p+1} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+2m}{i+m}^q (-1)^{2r} P_{2r}(i,n)(2i-n)^{2p+1}(-1)^{2p+1},$$

$$2S_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{k+m}^q P_{2r}(k,n)(2k-n)^{2p+1} - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+2m}{k+m}^q P_{2r}(k,n)(2k-n)^{2p+1} =$$
$$= \binom{n+2m}{n+m}^q P_{2r}(n,n)n^{2p+1} + \binom{n+2m}{m}^q P_{2r}(0,n)n^{2p+1} = 2\binom{n+2m}{m}^q \binom{n}{2r} n^{2p+1},$$

что равносильно равенству (13). □

В силу нечетности произведения сомножителей в каждом слагаемом относительно замены индекса суммирования $k = n - i$ доказательство теорем 15–22 аналогично доказательству теоремы 14.

**Теорема 15.** *Пусть $P_k(m;n)$ — многочлен Кравчука. Для любых целых неотрицательных чисел $p$, $r$, $m$ и любого целого числа $q$ верно тождество*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{k+m}^q P_r^2(k,n)(2k-n)^{2p+1} = \binom{n+2m}{m}^q \binom{n}{r}^2 n^{2p+1}. \tag{15}$$

**Теорема 16.** *Пусть $P_k(m;n)$ — многочлен Кравчука. Для любых целых неотрицательных чисел $p$, $r$, $m$ и любого целого числа $q$ верно комбинаторное тождество*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{2n+2m}{2k+m}^q P_{2r}(k,n)(2k-n)^{2p+1} = \binom{2n+2m}{m}^q \binom{n}{2r} n^{2p+1}. \tag{16}$$

**Теорема 17.** *Пусть $P_k(m;n)$ — многочлен Кравчука. Для любых целых неотрицательных чисел $m$, $r$ и любого целого числа $q$ верно комбинаторное тождество*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{k+m}^q P_{2r+1}(k,n) = -\binom{n+2m}{m}^q \binom{n}{2r+1}. \tag{17}$$

**Теорема 18.** *Пусть $P_k(m;n)$ — многочлен Кравчука. Для любых целых неотрицательных чисел $m$, $r$, $s$ и любого целого числа $q$ верно комбинаторное тождество*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{k+m}^q P_{2s}(k,n) P_{2r+1}(k,n) = -\binom{n+2m}{m}^q \binom{n}{2s}\binom{n}{2r+1}. \tag{18}$$

**Теорема 19.** *Пусть $P_k(m;n)$ — многочлен Кравчука. Для любых целых неотрицательных чисел $m$, $r$, $s$ и любого целого числа $q$ верно тождество*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{k+m}^q P_s^2(k,n) P_{2r+1}(k,n) = -\binom{n+2m}{m}^q \binom{n}{s}^2\binom{n}{2r+1}. \tag{19}$$

**Теорема 20.** *Пусть $P_k(m;n)$ — многочлен Кравчука, $H_n(x)$ — многочлен Эрмита. Для любых целых неотрицательных чисел $m$, $r$, $s$, любого целого числа $q$ и любого действительного числа $x$ верно тождество*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{k+m}^q P_{2s}(k,n) H_{2r+1}((2k-n)x) = \binom{n+2m}{m}^q \binom{n}{2s} H_{2r+1}(nx). \tag{20}$$

**Теорема 21.** *Пусть $P_k(m;n)$ — многочлен Кравчука, $H_n(x)$ — многочлен Эрмита. Для любых целых неотрицательных чисел $m$, $r$, $s$, любого целого числа $q$ и любого действительного числа $x$ верно тождество*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{k+m}^q P_s^2(k,n) H_{2r+1}((2k-n)x) = \binom{n+2m}{m}^q \binom{n}{s}^2 H_{2r+1}(nx). \tag{21}$$

**Теорема 22.** *Пусть $P_k(m;n)$ — многочлен Кравчука,для любых целых неотрицательных чисел $m$, $s$, любого целого числа $q$ и любого действительного числа $x$ верно тождество*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+2m}{k+m}^q P_s^2(k,n) \sin((2k-n)x) = \binom{n+2m}{m}^q \binom{n}{s}^2 \sin(nx). \tag{22}$$

В заключение отметим, что тождества (1)–(22) отсутствуют в известных книгах, содержащих множества тождеств с биномиальными коэффициентами [7, 9, 11, 12, 14, 17–22, 24, 25], а также в книгах с тождествами для ортогональных многочленов [2,11,12], книге [13] и статьях, содержащих тождества для многочленов Кравчука [11, 23].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979.
2. *Брычков Ю. А.* Специальные функции, производные, интегралы, ряды и другие формулы. — М.: Наука, 1983.
3. *Воблый В. А.* Об одном тождестве для многочленов Кравчука// в кн.: Мат. XX Междунар. семин. «Комбинаторные конфигурации и их приложения». — Кропивницкий: КНТУ, 2018. — С. 22–25.
4. *Воблый В. А.* О комбинаторном тождестве, связанном с перечислением графов// в кн.: Мат. XXI Междунар. семин. «Комбинаторные конфигурации и их приложения». — Кропивницкий: КНТУ, 2019. — С. 30–31.
5. *Воблый В. А.* Два комбинаторных тождества, связанных с перечислением графов// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *211*. — С. 11–14.
6. *Воблый В. А.* Новые тождества из перечисления графов// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2023. — *229*. — С. 33–36.

7. *Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А.* Задачи и упражнения по дискретной математике. — М.: Физматлит, 2009.
8. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971.
9. *Грэхем А., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. — М.: Мир, 1998.
10. *Егорычев Г. П.* Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм. — Новосибирск: Наука, 1977.
11. *Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., Миронова В. А.* Многочлены Кравчука и их применение в задачах криптографии и теории кодирования// Мат. вопр. криптогр. — 2015. — *6*, № 1. — С. 33–56.
12. Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения. — М.: Наука, 1982.
13. *Леонтьев В. К.* Избранные задачи комбинаторного анализа. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001.
14. *Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А.* Теория кодов, исправляющих ошибки. — М.: Связь, 1979.
15. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции.. — М.: Наука, 1981.
16. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Т. 2. Специальные функции.. — М.: Наука, 1983.
17. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Т. 3. Специальные функции. Дополнительные главы.. — М.: Наука, 1986.
18. *Риордан Дж.* Комбинаторные тождества. — М.: Наука, 1982.
19. *Charalambides C. A.* Enumerative Combinatorics. — Boca Raton: CRC Press, 2018.
20. *Gould H. W.* Combinatorial Identities. — Morgantown: West Virginia University, 1972.
21. *Kaucky J.* Combinatoricke Identity. — Bratislava: Veda, 1975.
22. *Lovasz L.* Combinatorial Problems and Exercises. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 2007.
23. *Podesta R. A.* New identities for binary Krawtchouk polynomials, binomial coefficients and Catalan numbers/ `arXiv:1603.09156v2 [math.CO]`.
24. *Spivey M. Z.* The Art of Proving Binomial Identities. — Boca Raton: CRC Press, 2019.
25. *Tomescu J.* Problems in Combinatorics and Graph Theory. — New York: Wiley, 1986.


## ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА


**Конфликт интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Финансирование.** Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

**Финансовые интересы.** Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.



Воблый Виталий Антониевич (Voblyi Vitalii Antonievich)
Всероссийский институт научной и технической информации
Российской академии наук, Москва
(Russian Institute for Scientific and Technical Information
of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia)
E-mail: `vitvobl@yandex.ru`